25
31351
376

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

10 S I

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2010 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2010 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2010

සංයුක්ත ගණිතය I இணைந்த கணிதம் I **Combined Mathematics I**	පැය තුනයි மூன்று மணித்தியாலம் *Three hours*

※ ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (*a*) α සහ β යනු $f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ; මෙහි p හා q තාත්ත්වික වන අතර $2p^2 + q \neq 0$ වේ. $y(p-x) = p + x$ නම්, x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $g(y) \equiv (2p^2+q)y^2 + 2(q-p^2)y + q = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $y \neq -1$ වේ.
ඒ නයින්, $g(y)=0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.
p හා q ඇසුරෙන් $\left(\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2$ ප්‍රකාශ කරන්න.

   (*b*) a, b, c හා m යනු $a+b+c=0$ හා $ab+bc+ca+3m=0$ වන ආකාරයේ නියත නම්,
$(y+ax)(y+bx)(y+cx) = y\left(y^2 - 3mx^2\right) + abcx^3$ බව සාධනය කරන්න.
$y = x^2 + m$ නම්, $\left(x^2+ax+m\right)\left(x^2+bx+m\right)\left(x^2+cx+m\right) = x^6 + abcx^3 + m^3$ බව පෙන්වන්න.
$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට $\left(x^2-2x+m\right), \left(x^2+ax+m\right)$ හා $\left(x^2+bx+m\right)$ යන සාධක තිබේ නම්,
m, a හා b හි අගයන් සොයන්න.
ඒ නයින්, (i) සියලු x සඳහා $g(x)$ සෘණ නොවන බව පෙන්වන්න,
(ii) $g(x)=0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

2. (*a*) $1, 2, 4, 5, 6, 8$ හා 9 සංඛ්‍යාංක හතෙන්, ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක්
   (i) පුනරාවර්තනය සහිතව,
   (ii) පුනරාවර්තනය රහිතව
තෝරා ගෙන, **සංඛ්‍යාංක හතරේ** වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.
   (i) අවස්ථාවේ දී, සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක් වාර දෙකකට වඩා වැඩියෙන් නොතිබේ දැයි සොයන්න.
   (ii) අවස්ථාවේ දී, සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් හා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් තිබේ දැයි, සොයන්න.
ඒවායින් කොපමණ ගණනක් ඉරට්ටේ වේ දැයි සොයන්න.

   (*b*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, සුපුරුදු අංකනයෙන්,
$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + \ldots + {}^nC_rx^r + \ldots + {}^nC_nx^n$ යැයි ගනිමු; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වේ.
$(1+x)^{n-1}$ හා $(1+x)$ හි ගුණිතය සැලකීමෙන් $r = 1, 2, \ldots, n-1$ සඳහා ${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r$ බව පෙන්වන්න.
${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\ {}^nC_{n-1} + (-1)^n\ {}^nC_n = 0$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
වෙනත් ක්‍රමයක් මගින් ඉහත ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න.
n යනු ඉරට්ටේ නිඛිලයක් නම් ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots + {}^nC_n = 2^{n-1}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

[දෙවන පිටුව බලන්න.

3. ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා, **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** මගින්, $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $r = 1, 2, \ldots$ සඳහා $u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$ වන ආකාරයට u_r ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

[ඔබට $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව උපකල්පනය කළ හැකි ය.]

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \cdots$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය v_r ලියා දක්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ බව පෙන්වන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2 + 2^2} + \frac{7}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \frac{9}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} + \ldots$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය w_r යැයි ගනිමු.

$w_r = f(r) - f(r+1)$ වන ආකාරයට $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $S_n = \sum_{r=1}^{n} w_r$ සොයන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

4. (*a*) $|z - a| = |z + a|$ සපුරාලනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිර්ණය කරන්න; මෙහි a යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.

(*b*) z_1 හා $z_2\ (\neq 0)$ යනු $|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.

(*a*) කොටස උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\frac{iz_1}{z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න;

මෙහි k තාත්ත්වික වේ.

(i) $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ආර්ගන් සටහනෙහි P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍ය දෙක පිළිවෙළින් $z_1 + 2z_2$ හා $z_1 - 2z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නොවේ නම්, $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2 - 4}\right)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි O යනු ආර්ගන් තලයේ මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිර්ණය කරන්න.

[තුන්වන පිටුව බලන්න.

5. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$ අගයන්න.

(b) (i) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ හා $z=\tan^{-1}x$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{dy}{dz}$ සොයන්න.

(ii) $y=e^{m\sin^{-1}x}$ යැයි ගනිමු; මෙහි m යනු නියතයකි. $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-m^2y=0$ බව පෙන්වන්න.

$x=0$ හි දී, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ හි අගය සොයන්න.

(c) දෙන ලද l දිගින් යුත් කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයට නවා ඇති අතර අනෙක් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය වන $A(x)$ යන්න $A(x)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{(l-x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක, මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි x, $(0\le x\le l)$ යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිග වේ.

ඒ නයින්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක්, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට, $A(x)$ වර්ගඵලය අවම වන බව පෙන්වන්න.

6. (a) **භින්න භාග** උපයෝගී කර ගනිමින් $\displaystyle\int \frac{2x}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2}\,dx$ සොයන්න.

(b) $I=\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ හා $J=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

(i) $bI + aJ = e^{ax}\sin bx,$

(ii) $aI - bJ = e^{ax}\cos bx$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

(c) $x^3t+1=0$ ආදේශය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\left(x^3-1\right)}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

7. (a) $a_1x+b_1y+c_1=0$ හා $a_2x+b_2y+c_2=0$ සරල රේඛා අතර කෝණයේ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\left(x_0, y_0\right)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක සමීකරණය $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=t$ ලෙස පරාමිතික ආකාරයෙන් දී ඇත; මෙහි $a^2+b^2=1$ හා t පරාමිතියක් වේ. $|t|$ යනු $\left(x_0, y_0\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට (x,y) ලක්ෂ්‍යයට රේඛාව දිගේ මනින ලද දිග බව පෙන්වන්න.

(c) $ABCD$ රොම්බසය පූර්ණ ලෙස පළමු පාදකය තුළ පිහිටයි. AB හා AD හි සමීකරණ පිළිවෙළින් $x-2y+5=0$ හා $2x-y+1=0$ වේ. BAD කෝණය සුළු කෝණයක් වන අතර $AC=2\sqrt{2}$ වේ. (a) හා (b) කොටස් උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, AC හි හා රොම්බසයේ අනෙක් පාද දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. E යනු රොම්බසයේ විකර්ණවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය නම් DE හි දිග සොයා, **ඒ නයින්,** රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

8. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ හා $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තර ලෙස හෝ බාහිර ලෙස හෝ එකිනෙක ස්පර්ශවීම සඳහා අවශ්‍යතා ප්‍රකාශ කරන්න.

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ යනු වෘත්තයක් යැයි ද, $P_1(x_1, y_1)$ යනු $S=0$ වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. P_1 ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$S_1 \equiv x^2+y^2+4x-2y-5=0$ හා $S_2 \equiv x^2+y^2-8x-6y+15=0$ වෘත්ත දෙක බාහිර ලෙස එකිනෙක ස්පර්ශවන බව සාධනය කරන්න.

$S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

P යනු, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_1=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග, k වරක් P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_2=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිගට සමාන වන ආකාරයට පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යයේ පථය,

(i) $k=1$ නම්, $S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවට ලම්බව A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවක් බව,

(ii) $k \neq 1$ නම්, A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයක් බව,

සාධනය කරන්න.

$k=\frac{1}{2}$ විට P ලක්ෂ්‍යයේ පථයේ සමීකරණය ලියා දක්වා, එය, A ලක්ෂ්‍යයේ දී $S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙන් එකක් බාහිර ලෙස ද, අනෙක අභ්‍යන්තර ලෙස ද ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

9. (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $2\left(\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ බව,

(ii) $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ නම් එවිට C කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව,

පෙන්වන්න.

(*b*) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta-\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි R හා α තාත්ත්වික වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}\cos^2\theta+(1-\sqrt{3})\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta-\cos\theta+\sin\theta=0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(*c*) $-1 \le x \le 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ බව පෙන්වන්න.

***

31355

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

10 S II

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2010 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2010 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2010

සංයුක්ත ගණිතය II இணைந்த கணிதம் II Combined Mathematics II	පැය තුනයි மூன்று மணித்தியாலம் *Three hours*

※ ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දක්වෙයි.)

1. (*a*) ස්කන්ධය M වූ P නම් අංශුවක්, පොළොව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට, $t = 0$ කාලයේ දී u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි. එක එකක ස්කන්ධය ඉතා කුඩා $m\,(<<M)$ වූ P_1, P_2 හා P_3 නම් අංශු තුනක් පිළිවෙළින් $t = \dfrac{u}{2g}$, $t = \dfrac{u}{g}$ හා $t = \dfrac{3u}{2g}$ කාලවලදී P අංශුවට සාපේක්ෂව තිරස් ලෙස එකම අභිදිශාවට $2v, 3v$ හා $6v$ ප්‍රවේගවලින් P අංශුවේ සිට ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි.

P අංශුවේ ප්‍රවේගය සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරය අඳින්න. P_1, P_2 හා P_3 අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ සිරස් සංරචක එක එකක් සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර, P අංශුවේ ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයේ කොටස් සමග සමපාත වන බව පෙන්වා, එම කොටස් හඳුනාදෙන්න.

P_1, P_2 හා P_3 අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ තිරස් සංරචක එක එකක් සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර, වෙනම රූප සටහනක අඳින්න.

ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර යොදා ගනිමින්,

(i) අංශු හතර $t = \dfrac{2u}{g}$ එකම කාලයේදී පොළොවට ළඟාවන බව,

(ii) P_1, P_2 හා P_3 අංශු තුන එකම ස්ථානයකදී පොළොවට වැටෙන බව,

පෙන්වන්න.

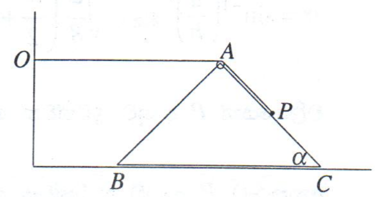
(*b*) මිනිසකුට නිශ්චල ජලයේ u වේගයෙන් පිහිනිය හැකි ය. d පළලින් යුත් ගඟක් පොළොවට සාපේක්ෂව $v\,(< u)$ වේගයෙන් ගලා බසී. ගඟෙහි එක් ඉවුරක් මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක මිනිසා සිටින අතර, ඔහු ගඟෙහි අනෙක් ඉවුර මත, ගඟ ගලන දිශාවට විරුද්ධ දිශාවෙහි පිහිටි Q ලක්ෂ්‍යයකට පිහිනා ආපසු P ලක්ෂ්‍යය වෙත පිහිනීමට බලාපොරොත්තු වෙයි. ඉවුරු සෘජු හා එකිනෙකට සමාන්තර ද, PQ ගඟ ගලන දිශාවට විරුද්ධ දිශාව සමග $\alpha, \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි ද නම්, සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ, එකම රූප සටහනක ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ, Q ලක්ෂ්‍යයට පිහිනා ආපසු P ලක්ෂ්‍යයට පිහිනීමට මිනිසාට ගතවන කාලය $\dfrac{2d\sqrt{u^2 \operatorname{cosec}^2\alpha - v^2}}{u^2 - v^2}$ බව පෙන්වන්න.

(i) Q ලක්ෂ්‍යය P ලක්ෂ්‍යයේ සිට ගඟ ගලන දිශාවේ ද, PQ ගඟ ගලන දිශාව සමග $\alpha, \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි ද නම්, ගන්නා ලද මුළු කාලයෙහි වෙනසක් සිදු නොවන බව,

(ii) මුළු කාලය අවම වන්නේ, P ලක්ෂ්‍යයට සෘජු ලෙස ඉදිරිපසින් අනෙක් ඉවුර මත Q ලක්ෂ්‍යය පිහිටන විට බව,

අපෝහනය කරන්න.

2. සිරස් බිත්තියක් මත O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, BC ඔස්සේ යන මුහුණත, තිරස් අචල සුමට බිමක් මත පිහිටි ස්කන්ධය M වූ සුමට කුඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන ABC ත්‍රිකෝණාකාර සිරස් හරස්කඩෙහි A ශීර්ෂයේ වූ අචල සුමට කප්පියක් මතින් යයි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවරට සම්බන්ධ කර ඇති අතර රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති ආකාරයට OA තිරස් වන පරිදි තන්තුව නොබුරුල්ව තබා ඇත. F යනු බිමට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණයේ විශාලත්වය ද, f යනු කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය ද නම්, $f = F$ බව පෙන්වන්න.



[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

AC තිරසට α කෝණයකින් ආනත නම්, P අංශුව සඳහා AC ඔස්සේ ද, පද්ධතිය සඳහා තිරසට ද, චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\dfrac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$ ත්වරණයකින් කුඤ්ඤය බිත්තිය දෙසට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

ආරම්භයේ දී, සිරස් බිත්තියේ සිට තිරස් d දුරකින් B පිහිටන පරිදි පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ පවතී. d ට වඩා PC විශාල නම්, $\sqrt{\dfrac{2d\{M+2m(1-\cos\alpha)\}}{mg\sin\alpha}}$ කාලයකට පසු $\sqrt{\dfrac{2dmg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}}$ වේගයෙන් B, බිත්තියෙහි ගැටෙන බව පෙන්වන්න.

බිත්තියෙහි B ගැටීමට මොහොතකට පෙර, බිමට සාපේක්ෂව P අංශුවේ වේගය $2\sqrt{\dfrac{dmg\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{M+2m(1-\cos\alpha)}}$ බවත් පෙන්වන්න.

3. P නම් සුමට අංශුවක් තිරසට $\alpha, \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. තිරස් ලෙස P අංශුව චලනය වන මොහොතේ දී, එය, දිග l වූ අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකින් එල්ලෙමින් නිශ්චලතාවේ ඇති සමාන ස්කන්ධයෙන් යුත් Q නම් තවත් සුමට අංශුවක් සමග ගැටේ. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර තිරස් පීල්ලක් මත O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. P අංශුවේ පෙත හා OQ අඩංගු සිරස් තලයට පීල්ල ලම්බ වේ.

ආරම්භයේ දී, P හා Q අංශු දෙක අතර තිරස් දුර $\dfrac{u^2\sin2\alpha}{2g}$ බව පෙන්වන්න.

අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම්, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශු දෙක පිළිවෙළින් $\dfrac{(1-e)u\cos\alpha}{2}$ හා $\dfrac{(1+e)u\cos\alpha}{2}$ ප්‍රවේගවලින් තිරස් ලෙස චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න.

OQ යටිඅත් සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන විට, Q අංශුවේ චලිත සමීකරණයේ OQ දිගේ සංරචකය ද, Q අංශුව සඳහා යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණය ද, ලියා දක්වන්න.

$u\cos\alpha \geq \dfrac{2\sqrt{5gl}}{1+e}$ නම්, Q අංශුව වෘත්ත චලිතය සම්පූර්ණ කරන බව **අපෝහනය** කරන්න.

P අංශුව ගමන් කරන ලද තිරස් දුර $\dfrac{(3-e)u^2\sin2\alpha}{4g}$ බව පෙන්වන්න.

$e=3$ නම්, P අංශුව ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙන බව **අපෝහනය** කරන්න.

4. ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර සීලිමක O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය නම්, P අංශුව සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙන විට, තන්තුවේ a විතතිය $a=\dfrac{mgl}{\lambda}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

OP සිරස්වන ලෙස ද, එහි දිග $l+a+b$ ට සමාන වන ලෙස ද, තන්තුව වැඩි දුරටත් $b(>a)$ දිගකින් අදිනු ලැබ, P අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරෙයි. තන්තුවේ දිග $l+a+x$ වන විට, P අංශුවේ චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\ddot{x}+\dfrac{g}{a}x=0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $-a\leq x\leq b$ වේ.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $x=A\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t+B\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A හා B සොයන්න.

$\alpha=\sin^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ වන $\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ කාලයක් සඳහා P අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව ද, සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් P අංශුව ඉවත්වන මොහොතේදී, එහි ප්‍රවේගය උඩුඅතට $\sqrt{\dfrac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)}$ බව ද පෙන්වන්න.

අනතුරුව P අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන බව ද, $b>a\sqrt{1+\dfrac{2\lambda}{mg}}$ නම්, එය නිශ්ශූන්‍ය ප්‍රවේගයකින් සීලිමේ ගැටෙන බව ද පෙන්වන්න.

[තුන්වෙනි පිටුව බලන්න.

5. (*a*) පැත්තක දිග මීටර $2a$ වන $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක AB, BC, CD, ED, EF හා AF පාද දිගේ, විශාලත්ව පිළිවෙළින් නිව්ටන $2P, P, 2P, 3P, 2P$ හා P වූ බල, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාඅතට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය, විශාලත්වය නිව්ටන මීටර $\sqrt{3}Pa$ වූ බලයුග්මයක් සමග AC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන නිව්ටන $2\sqrt{3}\,P$ වූ සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය බව සාධනය කරන්න.

පද්ධතිය තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය නම්, මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ හා (අවශ්‍ය නම් දික්කරන ලද) FA හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

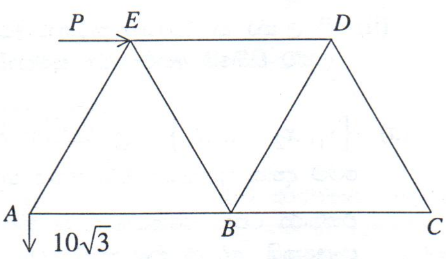
ඒ නයින්, පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවත්වා ගැනීම සඳහා, පද්ධතියට එක්කළ යුතු තනි බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(*b*) සමාන දිගින් හා, බර පිළිවෙළින් W හා $w\,(W > w)$ වූ AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හිදී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{2}$ වන සේ හා, රළු තිරස් පොළොවක් මත A හා C දෙකෙළවර පිහිටන සේ, දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ පවතී. μ යනු දඬු හා පොළොව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය නම්, සමතුලිතතාව ආරක්ෂා කර ගැනීම සඳහා μ ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය $\dfrac{W+w}{W+3w}$ බව පෙන්වන්න.

$\mu = \dfrac{W+w}{W+3w}$ නම්, ලිස්සීම A හිදී නොව C හිදී සිදුවීමට ආසන්න බව සාධනය කරන්න.

6. (*a*) එක එකක දිග $2a$ වූ AB, BC, CD හා DE ඒකාකාර දඬු හතරක් B, C හා D හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා DE දඬු එක එකක බර $2W$ ද, BC හා CD දඬු එක එකක බර W ද වේ. එකම තිරස් මට්ටමක පිහිටි A හා E ලක්ෂ්‍ය වලින් දඬු සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර AB හා BC දඬු සිරස සමග පිළිවෙළින් α හා β කෝණ සාදන සේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී. $\tan\beta = 4\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) සමාන දිගින් යුත් AB, BC, CD, DE, EA, EB හා BD සැහැල්ලු දඬු හතක්, රූපයේ දක්වෙන පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට, ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. රාමු කට්ටුව C හිදී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර A හිදී නිව්ටන $10\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. E හිදී P තිරස් බලයක් මගින්, AC තිරස් වන ලෙස රාමු කට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත.



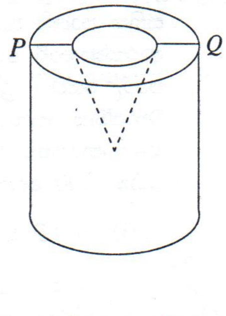
(i) E හි P බලයේ විශාලත්වය අගයන්න.

(ii) C හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ම ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

7. උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, එහි අක්ෂය මත, ආධාරකයේ සිට $\dfrac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ආධාරකයේ අරය r හා උස h වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් සඳහා අච්චුවක්, අරය $R\,(> r)$ හා උස $H\,(> h)$ වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරාකාර කොටයක් තුළ කේතු කුහරයක් තැනීමෙන්, නිපදවා ඇත. කේතු කුහරයේ සමමිතික අක්ෂය සිලින්ඩරාකාර කොටයේ සමමිතික අක්ෂය සමග සමපාත වේ. තනාගන්නා ලද අච්චුව රූපයේ පෙන්වා ඇති අයුරින් වේ. PQ විෂ්කම්භයේ සිට අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර සොයන්න.



$R = 2r$ හා, අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතු කුහරයේ ශීර්ෂයේ පිහිටයි නම්, $h = 2\left(4-\sqrt{14}\right)H$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$R = 2r$ වනසේ වූ අච්චුව P ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තබා ඇති අතර එය නිදහස් ලෙස සමතුලිතතාවේ එල්ලෙමින් ඇත. තවද, $H = 3r$ නම්, යටිඅත් සිරස සමග PQ හි ආනතිය සොයන්න.

8. A හා B යනු ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. A' හා B' යනු පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි යැයි ගනිමු. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.

A හා B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි නම්,

(i) A හා B'

(ii) A' හා B'

ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

ජාත්‍යන්තර එක් දින තරගාවලියකට පෙර ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායමේ X නම් නිත්‍ය පිතිකරුවා හෝ Y නම් නිත්‍ය පන්දුයවන්නා ආබාධයකට ලක්වීමට ඉඩප්‍රස්ථාවක් ඇති බව අතීත තොරතුරුවලින් හෙළිදරවු වෙයි. X එවැනි ආබාධයකට ලක්වීමේ සම්භාවිතාව 0.2 ක් වන අතර, එය Y සඳහා 0.1 ක් වේ. ආබාධවලට ලක්වීම එකිනෙකින් ස්වායත්ත ලෙස සිදුවේ. N, A, B හා AB සිද්ධි පහත දක්වෙන ආකාරයට අර්ථ දක්වා ඇත:

N: X හෝ Y යන දෙදෙනාගෙන් කිසිවකුත් ආබාධයකට ලක් නොවීම,

A: X පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම,

B: Y පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම,

AB: X සහ Y දෙදෙනාම ආබාධයන්ට ලක්වීම.

$P(N) = 0.72,\ P(A) = 0.18,\ P(B) = 0.08$ හා $P(AB) = 0.02$ බව පෙන්වන්න.

දෙන ලද N, A, B හෝ AB සිද්ධියක් සඳහා ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම තරගාවලියක් ජය ගැනීමේ, පරාජයවීමේ හෝ ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් කිරීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතා වගුවේ පෙන්වා ඇත; මෙහි (U, V) කෝෂය, U දී ඇති විට V හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(V|U)$ නිරූපණය කරයි.

සිද්ධිය (U)	තරගාවලියක ප්‍රතිඵලය (V)		
	ජයගැනීම	පරාජයවීම	ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන්වීම
N	0.9	0.08	0.02
A	0.5	0.4	0.1
B	0.7	0.2	0.1
AB	0.3	0.6	0.1

(i) සුදුසු රුක් සටහනක් ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ, ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ළඟ එන තරගාවලිය ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම තරගාවලියක් පරාජය වී ඇති බව දී ඇති විට, එම තරගාවලියට පෙර Y ආබාධයකට ලක්ව තිබීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව සොයන්න.

9. (*a*) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ යනු එක්තරා අධ්‍යයනයකින් ලබාගන්නා ලද නිරීක්ෂණ n වල කුලකයක් යැයි ගනිමු. මෙම දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව අර්ථ දක්වන්න.

එක්තරා පෙති වර්ගයක ඇති ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය මිලිග්‍රෑම් 52 හා මිලිග්‍රෑම් 67 අතර වේ යැයි සැලකෙයි. අඩංගු ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය සඳහා පරීක්ෂා කරන ලද පෙති 40 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් මිලිග්‍රෑම් 58 හා (මිලිග්‍රෑම්)^2 3.2 වේ. දත්ත නැවත පරීක්ෂා කර බැලීමේදී මිලිග්‍රෑම් 63 හා මිලිග්‍රෑම් 55 අගය දෙක සාවද්‍යව මිලිග්‍රෑම් 65 හා මිලිග්‍රෑම් 53 ලෙස ගෙන ඇති බව සොයාගන්නා ලදී.

(i) මෙම වරද නිසා මධ්‍යන්‍යයට බලපෑමක් නොමැති බව,

(ii) නිවැරදි කිරීම නිසා විචලතාව අඩුවන බව

පෙන්වන්න.

(*b*) එක්තරා නගරයකදී, කැලණි ගඟ හරහා මගීන් ප්‍රවාහනය කිරීමේ බලාපොරොත්තුවෙන්, ආසන්න ලෙස කිලෝග්‍රෑම් 1500 ක උපරිම භාරබරක් සහිත පාලම් පාරුවක් නිර්මාණය කෙරෙයි. මෙම බර සීමාව ඉක්මවා යෑම ආරක්ෂාකාරී නොවන බැවින්, ප්‍රදේශයේ පළාත් පාලන අධිකාරියට, මෙම පාරු සේවය ප්‍රයෝජනයට ගැනීමට බලාපොරොත්තුවන මගීන්ගේ බරෙහි ව්‍යාප්තිය සොයාගැනීමට සමීක්ෂණයක් පැවැත්වීමට වුවමනා වේ. මෙම මගී සංගහනයෙන්, මගීන් 200 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක් ගන්නා ලදී. මෙම මගීන් 200 දෙනාගේ බර සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ දී ඇත.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (බර කිලෝග්‍රෑම්වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 - 10	10
10 - 20	27
20 - 30	33
30 - 40	35
40 - 50	38
50 - 60	30
60 - 70	19
70 - 80	8

(i) බරෙහි ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයන්න.

වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන ඇසුරෙන්, පාරුවෙහි බර සීමාව ප්‍රකාශ කිරීමට පළාත් පාලන අධිකාරිය බලාපොරොත්තු වේ. ඉහත තොරතුරු පදනම් කර ගෙන වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන සොයන්න.

(ii) ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය සොයා, ව්‍යාප්තියේ හැඩය ලබාගන්න.

* * *