දෙවන වාර පරීක්ෂණය - 13 ශ්‍රේණිය - 2020

Second Term Test - Grade 13 - 2020

විභාග අංකය .... සංයුක්ත ගණිතය I කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- **මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.**
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- **A කොටස**
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
  වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- **B කොටස**
  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- **නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.**
- **ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.**

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ	1	
	2	
අධීක්ෂණය		

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I(A කොටස)

01. සියලු $n \in N$ සඳහා $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$ බව ගණිත අභ්‍යුහන මුලධර්මය මගින් පෙන්වන්න.

02. $|3x-1| > x+3$ යන අසමානතාවය ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන් විසඳන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $|3x+5| > x+5$ යන අසමානතාවය සපුරාලන x හි අගය පරාසය විසඳන්න

03. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x}$ හි අගය සොයන්න.

04. $\dfrac{1}{2!}, \dfrac{2}{3!}, \dfrac{3}{4!}, \dfrac{4}{5!}$.......... ශ්‍රේණියේ r වන පදය වන Ur ලියන්න.

$f(r)=\dfrac{1}{r!}$ නම්, $f(r)-f(r+1), Ur$ ඇසුරින් ලියා එමගින් $\sum\limits_{r=1}^{n} Ur$ අගයන්න.

05. $x=(t+1)^2 t, \quad y=\frac{1}{2}t^3+3; t\geq -1$ යන පරාමිතික සමීකරණයෙන් දෙනු ලබන වක්‍රයට $t=2$ වන් ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳිනු ලබන ලම්බයේ සමීකරණය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

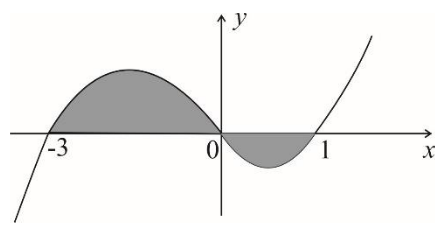
....

....

....

....

06. රූපයේ දැක්වෙන්නේ $y=x(x-1)(x+3)$ හි වක්‍රය යි. x - අක්ෂය මගින් ද වක්‍රය මගින් ද ආවෘත පරිමිත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය අනුකලනය මගින් සොයන්න.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

07. $y^2 = 8x$ පරාවලය මත, $x^2 + (y+6)^2 = 1$ වෘත්තයට අවම දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

08. ABC ත්‍රිකෝණයක AB හා AC පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - y + 5 = 0$ හා $x + 2y = 0$ වේ. A ලක්ෂ්‍යය යනු $(1, -2)$ වේ නම්, BC රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

09. x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $(1,-2)$ සහ $(3,-4)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද වෘත්තවල සමීකරණය සොයන්න.

10. $\sin 6x+\cos 4x+2=0$ සමීකරණයෙහි විසඳුම් $0\le x\le 2\pi$ පරාසය තුළ සොයන්න.

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I B කොටස

❖ **ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.**

---

11. a. i. $x^2-3+k(2x+3)=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල අන්තරය 2 නම්, k හි අගය සොයන්න.

ii. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{c}$ වර්ගජ සමීකරණයේ c තාත්වික අගයක් නම්, එම සමීකරණයේ මූල තාත්වික හා ප්‍රභින්න බව පෙන්වන්න. මෙහි $x\neq \pm 1$ හා $c\neq 0$ වේ.

b. $x^5-3x^4+2x^3-2x^2+3x+1$ යන බහුපදය $f(x)$ මගින් නිරූපණය වේ.

i. $(x+1)$ වත් $(x-1)$ වත් $f(x)$ හි සාධක නොවන බව පෙන්වන්න.

ii. $q(x)$ යනු බහු පදයක් ද a හා b නියත ද වන $f(x)\equiv(x^2-1)q(x)+ax+b$ යන සර්ව සාම්‍යයේ $x=1$ හා $x=-1$ ආදේශයෙන් හෝ අන අයුරකින් හෝ $f(x)$ බහු පදය (x^2-1) න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.

iii. $f(x)$ බහුපදය (x^2+1) න් බෙදූ විට, ශේෂය $2x$ බව පෙන්වන්න.

iv. $f(x)=2x$ සමීකරණයේ සියලු ම තාත්වික මූල සොයන්න.

12. a. ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක p වැනි සහ q වැනි පද පිළිවෙලින් q හා p වේ. එහි $(p+q)$ වැනි පදය $\left(\frac{q^p}{p^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ බව පෙන්වන්න.

b. $1+n^2+n^4\equiv(1+n^2)^2-n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\ldots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය වන Ur ලියන්න.

ඉහත සර්වසාම්‍ය භාවිතයෙන් හෝ අන්අයුරකින් හෝ $\frac{1}{2}\{f(r)-f(r+1)\}=Ur$ වන පරිදි $f(r)$ ශ්‍රිතයක් සොයා, එමගින් $\sum_{r=1}^{n}Ur=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$ බව පෙන්වන්න.

13. *a.* සියලු $n \in N$ සඳහා,

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots \quad + \cos[\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right]\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ බව

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් පෙන්වන්න.

b. PERMUTATIONS යන වචනයේ අකුරු සියල්ලම භාවිතයෙන් සෑදිය හැකි එකිනෙකට වෙනස් වචන ගණන සොයන්න. ඒවා අතරින්

i. P ගෙන් ආරම්භ වී S ගෙන් අවසන් වන වචන

ii. ස්වර අකුරු සියල්ල එකට ඇති වචන

iii. P හා S අතර අකුරු 4ක් ඇති වචන කීයක් වේ ද?

c. පිරිමි ළමයි 9 දෙනෙක් හා ගැහැනු ළමයි 4 දෙනෙක් අතරින් තෝරා ගත් සමාජිකයින් 7 කින් සමන්විත කමිටුවක් සෑදීමට අවශ්‍ය ව ඇත. කමිටුව තුළ

i. හරියට ම ගැහැනු ළමයින් 3 දෙනෙක්

ii. අවම වශයෙන් ගැහැනු ළමයින් 3 දෙනෙක් වත්

iii. උපරිම වශයෙන් ගැහැනු ළමයින් 3 දෙනෙක් ඇතුළත් වන සේ කමිටුව සෑදිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

14. *a.* $x \neq 1$ හා $x \neq -\frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \frac{16(x+1)}{(x-1)^2(3x+1)}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{-32x(3x+5)}{(x-1)^3(3x+1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

b. i. පිරමිඩයක ආකාරයට තනා ඇති කූඩාරමක ආධාරකය සමචතුරස්‍රාකාර වෙයි. එහි ශීර්ෂයේ සිට ආධාරයේ එක් එක් දාරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට දිග $3\sqrt{6}\ m$ වෙයි. කූඩාරමෙහි පතුලේ වර්ගඵලය A නම්, එහි පරිමාව වන V, $V=\dfrac{A}{6}\sqrt{216-A}$ බව පෙන්වන්න.

ii. V උපරිම වන A හි අගය සොයා එම අවස්ථාවේ දී කූඩාරමෙහි උස සහ ආධාරකයේ දාරයක දිග සොයන්න.

iii. කූඩාරමෙහි පතුල සහ පැති සඳහා එකම වර්ගයේ රෙදි භාවිත කරයි නම්, උපරිම ඉඩ ප්‍රමාණයක් ඇති කූඩාරමක් තැනීමට අවශ්‍ය රෙදි ප්‍රමාණය සොයන්න.

15. a. $\dfrac{1}{(1-z)(1-2z)}\equiv\dfrac{A}{1-z}+\dfrac{B}{1+2z}$ වන පරිදි A හා B නියතයන් සොයන්න.

$t=\sin x$ යන්න ආදේශයෙන් $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin 4x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin 4x}dx=P\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+Q\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right|+C$ බව පෙන්වන්න. මෙහි C අභිමත නියතයක් වන අතර P, Q නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

b. $f(x)$ යනු $[a,b]$ සංවෘත ප්‍රාන්තරය තුළ අනුකලනය කළ හැකි ශ්‍රිතයක් නම්, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ බව සාධනය කරන්න.

$I=\displaystyle\int_a^b\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$ ද $J=\displaystyle\int_a^b\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}dx$ ද වේ. $I=J$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $I=\dfrac{\pi}{2}(b-a)$ බව සාධනය කරන්න.

c. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ සොයන්න.

16. *a.* $P(x_1, y_1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax + by + c = 0$ රේඛාවට ලම්බක දුර සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $A \equiv (7, 11)$ වන අතර BC පාදයේ සමීකරණය $3x - 4y - 2 = 0$ වේ. BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ කෝටිකය 1 වන අතර ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 30ක් වේ. B හා C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

b. x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන ඕනෑම වෘත්තයක සාධාරණ සමීකරණය g හා f තාත්වික නියත විට $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන විචල්‍ය වෘත්තයක් $A(-1, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. A හරහා යන, වෘත්තයේ විචල්‍ය විශ්කම්භයේ අනෙක් කෙළවරේ පථය $y = \frac{1}{12}(x+1)^2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

17. *a.* $y = 2|\cos 2x|$ හි හා $y = 1 + \sin x$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් $0 \le x \le 2\pi$ පරාසය තුළ එකම සටහනක අඳින්න. ඒ නයින්, $2|\cos 2x| = 1 + \sin x$ සඳහා ඉහත පරාසය තුළ ඇති විසඳුම් ගණන සඳහන් කරන්න.

b. සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වන සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, යම්කිසි ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ වේ නම්, එම ත්‍රිකෝණය සෘජුකෝණී බව පෙන්වන්න. ($\hat{A} \ne \hat{B}$ වේ.)

c. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන x හි අගයයන් සොයන්න.

වයඹ පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව
Provincial Department of Education - NWP

10 S II

පළමු වාර පරීක්ෂණය - 13 ශ්‍රේණිය - 2020

First Term Test - Grade 13 - 2020

විභාග අංකය .... සංයුක්ත ගණිතය II කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- **මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.**
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- **A කොටස**
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
  වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- **B කොටස**
  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- **නියමිත** කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට **භාර දෙන්න.**
- **ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි** B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

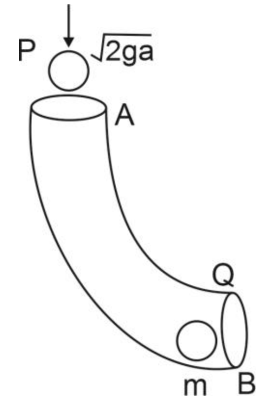
අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ	1	
	2	
අධීක්ෂණය		

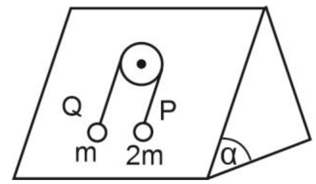
(A කොටස)

01) මේ සමඟ වන රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරය a වන වෘත්ත පාදයක ආකාරයට නමා ඇති සිහින් සුමට AB බටයේ A, B විවෘත කටවල් පිළිවෙලින් සිරස්ව හා තිරස්ව පිහිටන ලෙස සිරස් තලයක සවිකොට ඇත. බටයේ පහළම B පිහිටීමේ ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක් තබා ඇති අතර ස්කන්ධය m වූ P නම් තවත් අංශුවක් ආරම්භක $\sqrt{2ga}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට නලය තුලට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. බටය දිගේ පහළට චලනය වන අංශුව B හි වන Q අංශුව සමඟ සරලව ගැටී බද්ධ වේ. බටයෙන් ඉවත්වන මෙම සංයුක්ත අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.



02) තිරසට θ කෝණයක් ආනතව ආරම්භක u ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කල වස්තුව t කාලයක දී ආරම්භක ප්‍රක්ෂේපන දිශාවට ලම්බකව චලනය වේ. $t = \frac{u \sin\theta}{g}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

03) මේ සමඟ දැක්වෙන රූපයේ පරිදි අචලව සවිකොට ඇති තිරසට α සුළු කෝණයක් ආනත සුමට ආනත තලයක් මත සැහැල්ලු සුමට කප්පියක් සවිකොට ඇත. මෙම කප්පිය මතින් පන්නා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙලින් ස්කන්ධයන් $2m$ හා m බැගින් වූ P හා Q අංශු දෙකක් අමුණා ඒවා තන්තු ඇදී පවතින ලෙස තලය මත නිසලව තබා සීරුවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. පසුව ඇතිවන චලිතයේ දී එක් එක් අංශුවේ ත්වරණය $\frac{g\sin\alpha}{3}$ බවත් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{4}{3}mg\sin\alpha$ බවත් පෙන්වන්න.



04) ස්කන්ධය $M\ kg$ වන කාර් රථයක් $R\ N$ ප්‍රතිරෝධකයට එරෙහිව සමතලා මාර්ගයක් දිගේ $H\ kw$ නියත ජවයක් සහිතව නියත $v\ ms^{-1}$ ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරයි. කාර් රථය මත ප්‍රතිරෝධය $R = \frac{H \times 10^3}{V}\ N$ බව පෙන්වන්න. මෙම රථය ඊළඟට එම $R\ N$ විශාලත්වයෙන්ම යුතු ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව එම Hkw ජවයෙන්ම තිරසට α කෝණයක් ආනත මාර්ගයක ඉහළ සිට වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ $\frac{v}{2}\mathrm{ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයකින් චලනය වන විට එහි ත්වරණය $\left\{\frac{\mathrm{H} \times 10^3}{\mathrm{Mv}} - \mathrm{g}\sin\alpha\right\}\mathrm{ms}^{-2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

05) සුපුරුදු අංකනයෙන් $A, B,$ හා C පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\left(2\underline{i}+4\underline{j}\right)$, $\left(4\underline{i}+4\underline{j}\right)$ හා $(\lambda\underline{i}+\mu\underline{j})$ මගින් නිරූපණය වේ. මෙහි λ හා μ තාත්වික නියත වේ. O අක්ෂ මූලය වන විට $OABC$ මගින් ත්‍රැපීසියමක ශීර්ෂ දැක්වේ. මෙහි OA හා CB සමාන්තර වන අතර $CB = \frac{1}{2}\,OA$ වේ. λ හා μ හි අගයයන් ගණනය කරන්න. $A\hat{O}C = \theta$ නම්, $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{65}}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

06) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් පවතින විට අංශුව සිරස් තලයේ OP ට ලම්බව (තිරසට) $\sqrt{3l\,g}$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. OP යටි අත් සිරස සමඟ $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ සුලු කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයා, එවිට තන්තුවේ ආතතිය $\frac{14\,mg}{5}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

....

....

....

....

....

....

....

....

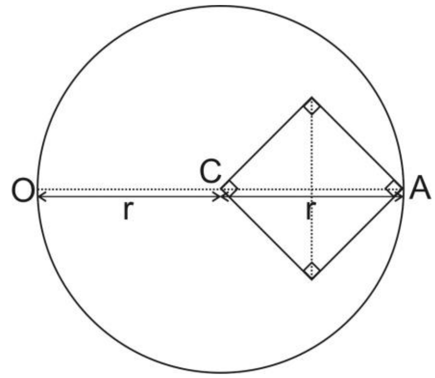
....

....

....

....

07) යාබද රූපයේ පරිදි අරය r වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර ආස්තරයකින් OA සමමිතික වන සේ අරය, විකර්ණයක් වන සේ සමචතුරස්‍ර කොටසක් කපා ඉවත් කෙරේ. ඉතිරි කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය O සිට සමමිතික අක්ෂය මත $\frac{(4\pi-3)}{2\,(2\pi-1)}\,r$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



08) ස්වභාවික දිග l ද ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2mg$ ද වූ ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් අමුණා, එය O හි තබා $\sqrt{2\,lg}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති නියමය භාවිතයෙන් O සිට අංශුවට යා හැකි උපරිම දුර සොයන්න.

09) $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$, $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ නම් $P\,(A \cap B)$ හා $P\,(A' \cap B)$ සොයන්න. මෙහි A' යනු A හි අනුපූරක සිද්ධිය වේ.

10) පෙට්ටියක් තුළ සර්ව සම රතු බෝල n ගණනක් ද නිල් බෝල 4 ක් ද ඇත. පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල දෙකක් අනුක්‍රමිකව ඉවතට ගනු ලැබේ. ඉවතට ගත් බෝල දෙකම රතු ඒවා වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ ක් නම් n හි අගය සොයන්න.

සංයුක්ත ගණිතය 13 - II (B කොටස)

11) (a) නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹන අභ්‍යවකාශ යානයක් $\frac{g}{2}$ නියත ත්වරණයක් යටතේ සිරස්ව ඉහළට ගුවන් ගතවේ. T නම් කාලයකට පසු යානයෙන් කොටසක් බිඳී ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව චලනය වී පොළොව මත පතිතවේ. බිඳුන කොටස සිය උපරිම උස පිහිටීමට එළඹෙන මොහොතේ යානය ද ක්‍රියාවිරහිතව ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව චලනය වී පොළොව මත පතිත වේ. අරම්භයේ සිට අභ්‍යවකාශ යානය, බිඳුන කොටස හා ඉතිරි යානය යන කොටස් පොළොව මත පතිත වන තෙක් චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න.

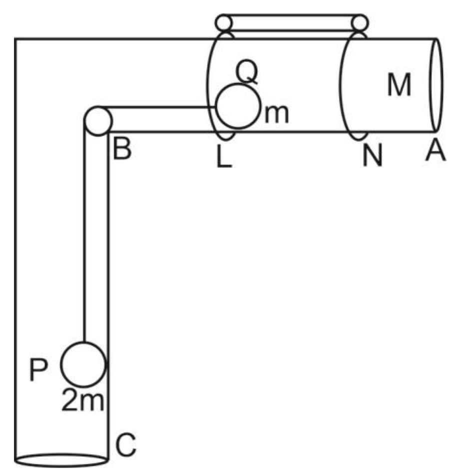
එනයින් යානයෙන් කොටසක් බිඳී යන මොහොතේ යානයේ ප්‍රවේගය $\frac{gT}{2}$ බවත්, බිඳුන කොටස නැඟ ඇති උපරිම උස $\frac{3gT^2}{8}$ බවත් පෙන්වන්න.

තවද ක්‍රියාවිරහිත වන විට යානයේ ප්‍රවේගය $\frac{3gT}{4}$ බවත් යානය නැඟ ඇති උපරිම උස $\frac{27gT^2}{32}$ බවත් පෙන්වන්න.

චලිතය ආරම්භයෙන් පසු යානයෙන් බිඳුන කොටස හා යානය පොළොවට පතිත වන්නේ $\frac{\sqrt{3}}{2}\, gT$ හා $\frac{3\sqrt{3}}{4}\, gT$ ප්‍රවේග වලින් බව පෙන්වන්න.

(b) D ප්‍රහාරක යාත්‍රාවක් $u\ kmh^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට යාත්‍රා කරයි. S නම් නැවක් $v\ kmh^{-1}$ නියත ප්‍රවේගයෙන් නැගෙනහිරින් උතුරට α කෝණයක් ආනත දිශාවක් ඔස්සේ යාත්‍රා කරයි. $(v\cos\alpha > u\,)$එක්තරා මොහොතක දී S නැව D ප්‍රහාරක යාත්‍රාවට $a\ km$ දුරක් දකුණින් පිහිටයි. S හා D හි සාපේක්ෂ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ ඇඳ ප්‍රහාරක යාත්‍රාවට සාපේක්ෂ ව නැවේ පෙත අඳින්න. ප්‍රහාරක යාත්‍රාව හා නැව අතර කෙටිම දුර $\frac{a\,(v\cos\alpha - u)}{\sqrt{v^2+u^2-2uv\cos\alpha}}\ km$ බව පෙන්වන්න. තවද නැව හා ප්‍රහාරක යාත්‍රාව මෙම කෙටිම දුර පිහිටීමට පැමිණීමට S නැව D යාත්‍රාවට a දුරක් දකුණින් පිහිටන මොහොතේ සිට ගතවන කාලය පැය $\frac{av\sin\alpha}{v^2+u^2-2uv\cos\alpha}$ බව ද පෙන්වන්න.

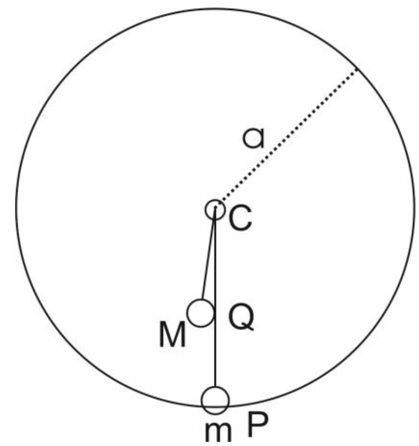
12) (a) ස්කන්ධය M වූ තුනී සුමට නලයක් B හිදී ඍජුකෝණීව නමා ඇත. AB කොටස තිරස වන අතර එයට L හා N සුමට මුදු තුළින් නිදහස්ව තිරස්ව චලනය විය හැක. BC කොටස සිරස්ය. ස්කන්ධයන් පිළිවෙලින් $2m$ හා m වශයෙන් වූ P හා Q අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට අමුණා තන්තුව B හි සවිකොට ඇති සුමට අචල කප්පිය මතින් පන්නා තන්තුව ඇදී පවතින ලෙස Q අංශුව AB තල කොටස මතත් P අංශුව BC කොටස තුල සිරස්ව එල්ලමින් ද පවතින ලෙස අල්වා තබා සීරුවෙන් අතහරිනු ලැබේ. P අංශුවට BC දිශාවට ද Q අංශුවට AB දිශාවට ද පද්ධතියට BA දිශාවට වූ චලිත සමීකරණ ලබා ගන්න. නලයේ ත්වරණය $\frac{2mg}{3M+8m}$ බවත්,



නලයට සාපේක්ෂව එක එකක් අංශු වල ත්වරණ $\left(\frac{M+3m}{3M+8m}\right) 2g$ බවත්, P අංශුවේ පොළොවට සාපේක්ෂ ත්වරණය,

$\left(\frac{2g}{3M+8m}\right)\sqrt{M^2+\ 10\,m^2+6Mm}$ බවත් පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

b) ස්කන්ධය m වූ සුමට P නම් පබලුවක් සිරස් තලයක අචලව සවි කරන ලද අරය a වූ සුමට වෘත්තාකාර කම්බියක් තුලින් යවා ඇත. පබලුවට කම්බිය තුල නිදහසේ සර්පණය විය හැක. පබලුවට ඇඳූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙළවර කම්බි කේන්ද්‍රයේ පිහිටි C නම් සුමට මුද්දක් තුලින් යවා අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය M වූ Q නම් අංශුවකට ඇඳා ඇත. ආරම්භයේ දී P පබලුව කම්බියේ පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ තබා $\sqrt{kga}$ $(k > 1)$ වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කරන්නේ, පබලුව කම්බිය දිගේ වෘත්තාකාර චලිතයක් නිරූපණය කරන ලෙසය. P පබලුව ඇඳූ තන්තු කොටස C හරහා යන යටි අත් සිරස සමඟ θ සුළු කෝණයක් තනන අවස්ථාවේ P පබලුවේ වේගය v යන්න,



$v^2 = kga - 2ga + 2ga\cos\theta$ මගින් ලැබෙන බවත්, P පබලුව මත කම්බිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව R යන්න $R = mg\left(k - 2 + 3\cos\theta - \frac{M}{m}\right)$ මගින් ලැබෙන බවත් පෙන්වන්න.

$k = 6$ යැයි ගනිමින් $m < M < 7m$ වන්නේ නම්, චලිතයේ යම් අවස්ථාවක P පබලුව හා කම්බිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව අතුරුදන්වන බව පෙන්වන්න.

13) ස්වභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ගැටගසා ඇත. එහි අනෙක් කෙළවර අචල O නම් ලක්ෂ්‍යකට ගැටගසා ඇත. P අංශුව සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙන විට එම තන්තුවේ විතතිය l වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න. දැන් P අංශුව O ලක්ෂ්‍යයේ තබා සීරුවෙන් අතහරිනු ලැබේ. අංශුව l දුරක් සිරස්ව පහළට වැටුන පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{2gl}$ බව පෙන්වන්න. P අංශුව O සිට තන්තුවේ දිග x වන විට $(x > l)$ අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන් $-\frac{g}{l}(x - 2l) = \ddot{x}$ බව පෙන්වන්න. තවද අංශුවේ ප්‍රවේගය $\dot{x}$ යන්න $A(> 0)$ නියතයක් වන $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(A^2 - x^2)$ මගින් දෙනු ලැබේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A හි අගය ලබා ගන්න.

P අංශුව $2\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\sqrt{2} + \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ කාලයකට පසුව නැවත O ලක්ෂ්‍ය කරා එලඹෙන බව පෙන්වන්න.

14) (a) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අභිශූන්‍ය නොවන සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකකි. α හා β අදිශ වන විට, $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = 0$ වීම සඳහා අවශ්‍යතාව $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව සාධනය කරන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයේ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ මගින් නිරූපණය වේ. D යනු $OD{:}DA = 1{:}2$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. BD හා AC , X හිදී ඡේදනය වේ. λ හා μ අදිශ විට $OX = \lambda OC$ හා $BX = \mu BD$ ලෙස ගැනීමෙන් λ හා μ හි අගයන් සොයා $BX{:}XD = 3{:}1$ බව හා $OX{:}XC = 1{:}3$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ $AB = a$, $AD = 2a$ ද, M යනු AD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද වේ. P , $2P$, $4P$, $6P$, $3\sqrt{2}P$ හා $\sqrt{5}P$ යන බල පිළිවෙලින් CB , DA , BA, CD, MB හා DB දිගේ අකුරුවල පටිපාටියට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය A හරහා යන තනි බලයකට හා යුග්මයකට තුල්‍ය නම් තනි බලයේ විශාලත්වය හා දිශාවත් යුග්මයේ ඝූර්ණයේ විශාලත්වය $6Pa$ බව පෙන්වා එහි භ්‍රමණ අත සොයන්න.

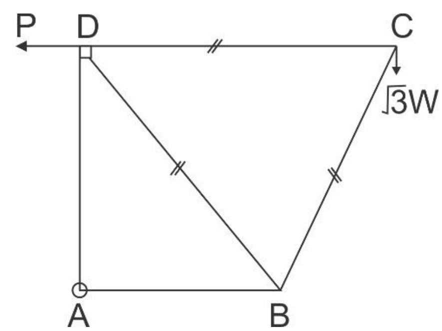
15) (a) AB, BC, CD හා AD යනු බර w බැගින් වන දිග $2a$ බැගින් වන ඒකාකාර දඬු හතරකි. ඒවා නිදහස් ලෙස සන්ධි කිරීමෙන් $ABCD$ රොම්බසය සාදා තිබේ. පද්ධතිය A ලක්ෂයෙන් එල්ලා ඇති අතර $AL = CM = \frac{a}{2}$ වනසේ පිළිවෙලින් AB හා BC දඬු මත L හා M ලක්ෂ්‍ය වල දී LM සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් සම්බන්ධ කර ඇත. LM තන්තුව ද AC ද සිරස් වන අතර පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව C ට ඉහළින් A පිහිටන සේ ඇත. $B\hat{A}D = B\hat{C}D = 60^0$ බව දී ඇත.

(i) C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියව සොයා එය තිරසට දරණ ආනතිය $tan^{-1}\left(2\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) LM තන්තුවේ ආතතිය $\frac{8w}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(b) AB, BC, CD, BD හා AD සැහැල්ලු දඬු පහක් යාබඳ රූපයේ පරිදි රාමු සැකිල්ලක් සෑදෙන සේ සුමටව ඒවායේ කෙළවර වලින් අසව් කර ඇත. $BC = BD = CD = 2a$ වේ. A සන්ධිය සුමට ලෙස අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර C හිදී $\sqrt{3}w$ භාරයක් එල්ලා D හිදී යෙදූ තිරස් P බලයක් මගින් රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක AB හා DC දඬු තිරස්ව ද AD දණ්ඩ සිරස්ව ද වන සේ සමතුලිතව තබා ඇත.



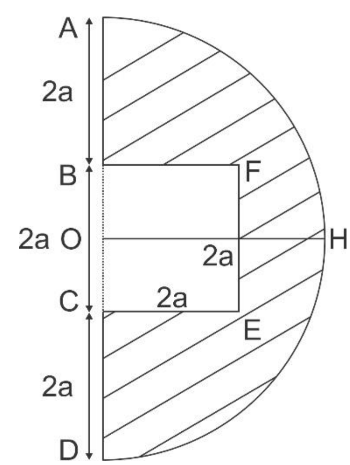
(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයා එහි තිරසට ආනතිය සොයන්න.

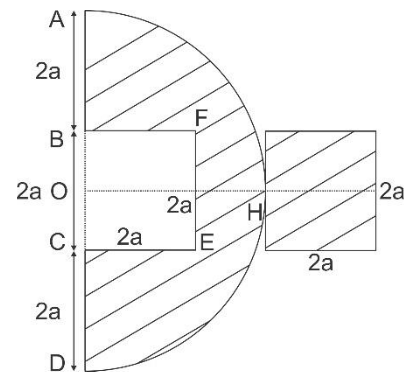
(iii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් එක් එක් සන්ධිය සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. එනයින්, සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වමින් සොයන්න.

16) අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{4a}{3\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

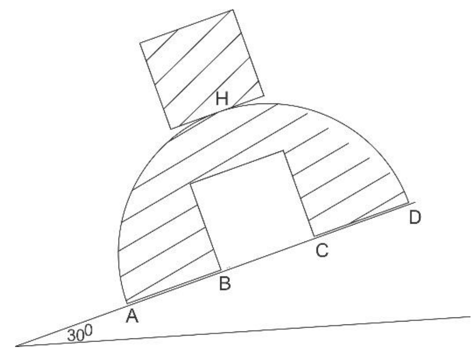
යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරය $3a$ වූ අර්ධ වෘත්තාකාර AHD ඒකාකාර තල ආස්තරයෙන් OH සමමිතික වන ලෙස පැත්තක දිග $2a$ වූ $BFEC$ සමචතුරස්‍රය කපා ඉවත් කර ඇත. එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත O සිට $\frac{28\,a}{9\pi-8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



අනතුරුව කපා ඉවත් කරන ලද සමචතුරස්‍රය OH සමමිතික අක්ෂය වනසේ H හි දී යාබඳ රූපයේ පරිදි සවිකරනු ලැබේ. එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත O සිට $\frac{2a}{3\pi}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි එම ආස්තර තිරසට 30^0 කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත ස්වකීය තලය සිරස්ව ද AB හා CD දාර උපරිම බැවුම් රේඛාවක් මත ද ඇතිව සමතුලිතව පිහිටයි. $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු ආස්තරය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.



17) (a) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයේ ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධි අර්ථ දක්වන්න.

(i) A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි වේ.
(ii) A හා B නිරවශේෂ සිද්ධි වේ.

(b) A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයක අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධී තුනක් යැයි ගනිමු.
(i) $P(A) = 2a^2,\ P(B) = 2a$ හා $P\,(C) = 8a - 1$

නම් a හි අගය සොයන්න.

(c) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු.

(i) $P(A) = P(A \cap B) + P\,(A \cap B')$
(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.
මෙහි B' යනු B හි අනුපූරක සිද්ධිය වේ.
$P(A') = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B') = \frac{2}{5}$ නම්,
$P(A \cap B)$, $P\,(A \cup B)$, $P\,(A' \cap B)$, $P\,(A' \cup B)$ හා $P\,(A' \cup B')$ සොයන්න.

(d) සිරස ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{5}$ ක් වූ නැඹුරු කාසියක් 'සේයා' උඩ දමනු ලැබේ. කාසියේ සිරස ලැබුණේ නම්, සර්ව සම රතු බෝල 3 ක් ද, නිල් බෝල 2 ක් ද, ඇති A නම් පෙට්ටියකින් සසම්භාවී ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල 2ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.
කාසියේ අගය ලැබුණේ නම්, සවර් සම රතු බෝල 2 ක් ද නිල් බෝල 1 ක් ද ඇති B නම් පෙට්ටියකින් ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල 2 ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) රතුබෝල 2 ක් ලැබීමේ,

(ii) කාසියේ අගය ලැබී රතු බෝල 1 ක් පමණක් ලැබීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

NWP

Second Term Test - Grade 13 - 2020

Combined Mathematics I.

(01) When $n=1$

$LHS = 1 \qquad RHS = \dfrac{1\{3\times 1 - 1\}}{2}$

$= 1$

$LHS = RHS$

$\therefore$ The result is true for $n=1$ 5

Take any $p \in \mathbb{Z}^+$

Assume that the result is true for $n=p$

$1+4+7+\cdots+(3p-2) = \dfrac{p(3p-1)}{2}$ 5 ——— (A)

When $n=p+1$

$\underbrace{1+4+7+\cdots+(3p-2)}_{\text{from (1)}} + (3p+1) = \dfrac{p(3p-1)}{2} + (3p+1)$ 5

$= \dfrac{3p^2-p+6p+2}{2}$

$= \dfrac{3p^2+5p+2}{2}$

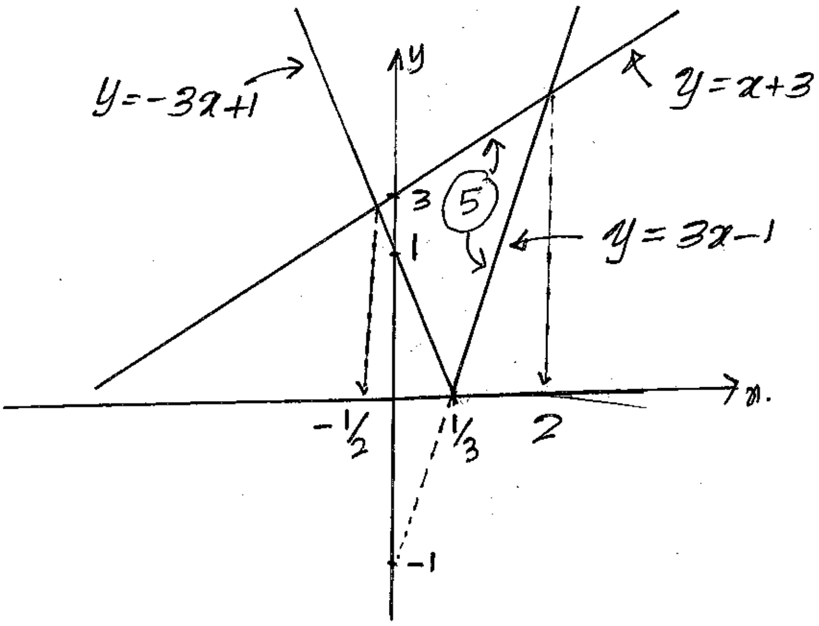
$= \dfrac{(p+1)(3p+2)}{2}$ 5

$= \dfrac{(p+1)[3(p+1)-1]}{2}$

$\therefore$ If the result is true for $n=p \in \mathbb{Z}^+$. then it is also true for $n=p+1$. $\therefore$ by using the principle of mathematical induction. The result is true for all $n \in \mathbb{Z}^+$. 5

25

(02)



$-3x+1 = x+3$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

$3x-1 = x+3$ 5

$2x = 4$

$x = 2$

$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$ 5

$|3x+5| > x+5 \Rightarrow |3(x+2)-1| > (x+2)+3$

let $X = x+2$

$|3X-1| > X+3$

$\therefore X = x+2 \qquad X = x+2$

$-\frac{1}{2} = x+2 \qquad 2 = x+2$

$x = -2\frac{1}{2} \qquad x = 0$ 5

$\therefore$ Solution is $x \in (-\infty, -2\frac{1}{2}) \cup (0, \infty)$ 5

$\boxed{25}$

(03)

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{4\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^5}{1 - \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right\}^5}{1 - \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cos^5(x - \pi/4)}{1 - \sin 2x} \quad 5$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cos^5 y}{1 - \cos 2y}$$

Putting $x - \pi/4 = y$

as $\lim_{x \to \pi/4}$, $\lim_{y \to 0}$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{4\sqrt{2}(1 - \cos^5 y)}{1 - (2\cos^2 y - 1)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{4\sqrt{2}(1 - \cos^5 y) \ 5}{2(1 - \cos^2 y) \ 5}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{4\sqrt{2}\cancel{(1 - \cos y)}(\cos^4 y + \cos^3 y + \cdots + 1)}{2\cancel{(1 - \cos y)}(1 + \cos y)}$$

$\cos y - 1 \neq 0$

$$= \frac{4\sqrt{2}(1 + 1 + 1 + 1 + 1)}{2(1 + 1)} \quad 5$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \times 5}{4}$$

$$= 5\sqrt{2} \quad 5$$

25

(04) $U_r = \dfrac{r}{(r+1)!}$

$$f(r) - f(r+1) = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!}$$

$$= \frac{r+1-1}{(r+1)!}$$

$$= \frac{r}{(r+1)!}$$

$$= U_r \quad (5)$$

$U_r = f(r) - f(r+1)$

When $r=1$ $\quad U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

$r=2$ $\quad U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r=3$ $\quad U_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(4)}$ $\quad (10)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$r=n-1$ $\quad U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r=n$ $\quad U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

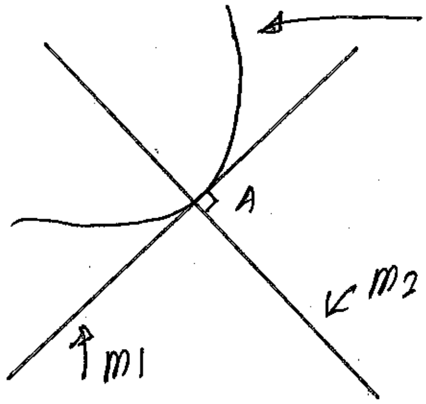
$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (5)$$

25

(05)



$x = (t+1)^2 t$

$y = \frac{1}{2} t^3$

$x = (t+1)^2 t$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2} t^3$

$\frac{dx}{dt} = (t+1)^2 + t \cdot 2(t+1)$ $\qquad$ $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} t^2$

$= (t+1)[(t+1) + 2t]$ 5

$= \underline{\underline{(t+1)}}\,(3t+1)$

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$

$= \frac{\frac{3}{2}t^2}{(t+1)(3t+1)} = \frac{3t^2}{2(t+1)(3t+1)}$ 5

$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=2}$ $\qquad$ $m_1 m_2 = -1$

$= \frac{3 \times 4}{2 \times 3 \times 7}$ $\qquad$ $\frac{2}{7}(m_2) = -1$

$= \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$ $\qquad$ $m_2 = -\frac{7}{2}$ 5

When $t = 2$

$x = 18$

$y = 4$

$\therefore A(18, 4)$ 5

$\therefore$ Equation of the normal

$\frac{y-4}{x-18} = -\frac{7}{2}$ 5

$2y - 8 = -7x + 126$

$\underline{\underline{2y + 7x = 134}}$

$\boxed{25}$

(06) The area is given by

$$\int_{-3}^{0} y\,dx - \int_{0}^{1} y\,dx \quad 5$$

Now $\int y\,dx = \int x^3 + 2x^2 - 3x\,dx$

$$= \left\{\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right\} \quad 5$$

So $\int_{-3}^{0} y\,dx = 0 - \left\{\frac{81}{4} - \frac{2\times 27}{3} - \frac{3}{2}\times 9\right\}$

$$= \frac{45}{4} \quad 5$$

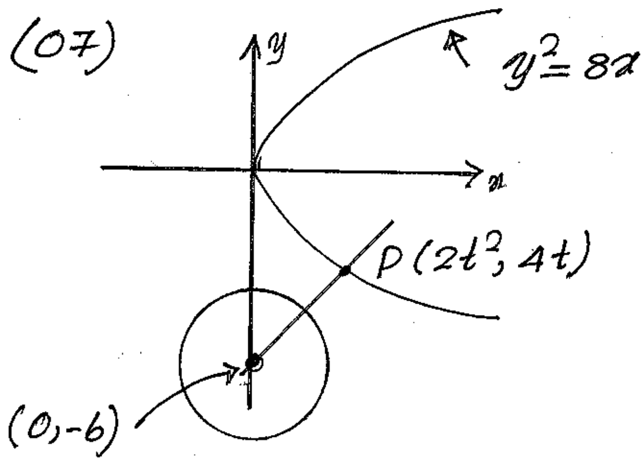
$$\int_{0}^{-2} y\,dx = \left\{\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right\} - 0$$

$$= \frac{-7}{12} \quad 5$$

So the area required is $\frac{45}{4} + \frac{7}{2} = \frac{71}{2}$ 5

$\boxed{25}$

(07)



Let $P(2t^2, 4t)$ be any Point on the parabola then

$(CP)^2 = (2t^2)^2 + (4t+6)^2$

$= 4t^4 + 4(2t+3)^2$

$f(t) = 4t^4 + 4(2t+3)^2$ 5

$f'(t) = 16t^3 + 16(2t+3)$

$= 16(t^3 + 2t + 3)$

$= 16(t+1)(t^2 - t + 3)$

$= 16(t+1)\left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right\}$ 5

$\therefore f'(t) = 0 \Rightarrow t = -1$ 5

Also $f''(t) = 16(3t^2 + 2)$ 5

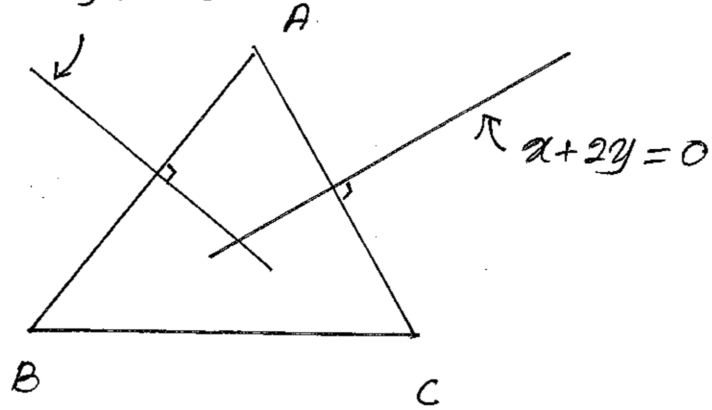
$[f''(t)]_{t=-1} = 16\{3+2\} > 0$

$\therefore f(t)$ is least when $t = -1$

$\therefore$ Thus, the required co-ordinate are $(2,-4)$ 5

$\boxed{25}$

(08) $x-y+5=0$



let the co-ordinates of B be (α,β).

Since co-ordinates of A are $(1,-2)$

$\therefore$ the slope of $AB = \dfrac{\beta+2}{\alpha-1}$

The equation of the perpendicular bisector of AB is $x-y+5=0$

$$\Rightarrow \frac{\beta+2}{\alpha-1} \cdot 1 = -1$$

$$\beta+2 = -\alpha+1$$

$$\alpha+\beta = -1 \quad \text{—— (1)} \quad (5)$$

Also the midpoint of AB lies on $x-y+5=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \left(\frac{\beta-2}{2}\right) + 5 = 0$$

$$\alpha+1-\beta+2+10=0$$

$$\alpha-\beta = -13 \quad \text{—— (2)} \quad (5)$$

(1) and (2) $\quad 2\alpha = -14$

$$\underline{\underline{\alpha = -7}}$$

(1) $\Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta = +6}}$

$B \equiv (-7, 6)$ (5)

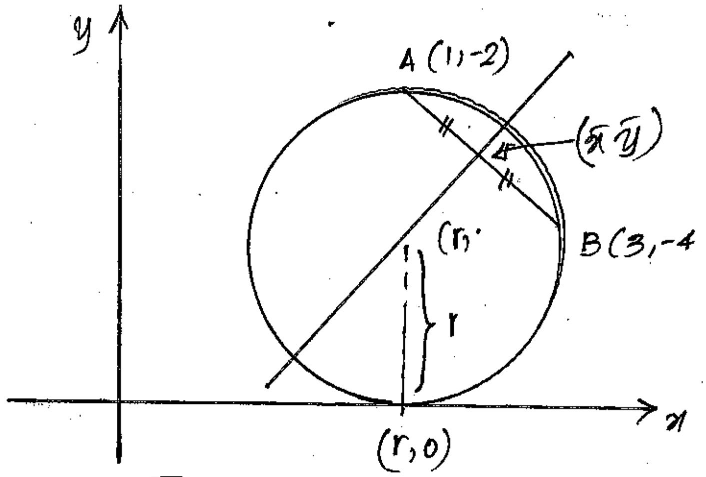
Similarly the co-ordinates of C are $\left(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (5)

$\therefore$ the equation of the line BC is

$$(y-6) = \frac{\left(\frac{2}{5}-6\right)}{\left(\frac{11}{5}+7\right)}(x+7)$$

$$\underline{\underline{14x+23y=40}} \quad (5)$$

(09)



$\bar{x} = 2 \qquad \bar{y} = -3$

$(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (2, -3)$

$\therefore$ the slope of $AB = \dfrac{-4+2}{3-1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$\therefore$ The equation of the perpendicular bisector of AB is

$$\frac{y+3}{x-2} = +1$$

$$\frac{y+3}{1} = \frac{x-2}{1} = t$$

$y = t-3$ and $x = t+2$

$\therefore$ Centre of the Circle $\equiv (t+2, t-3)$ (5)

$$\sqrt{(t+2-1)^2 + (t-3+2)^2} = t-3. \quad (5)$$

$(t+1)^2 + (t-1)^2 = (t-3)^2$

$t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 = (t-3)^2$

$2t^2 + 2 = t^2 - 6t + 9$

$t^2 + 6t - 7 = 0$

$(t+7)(t-1) = 0$

$t = -7$ or $t = 1$ (5)

$\therefore$ Centre $\equiv (-10, -5)$

radius $= 10$

$\therefore$ equation is

$(x+10)^2 + (y+5)^2 = 10^2$ (5)

or

centre $= (-2, 3)$

radius $= 2$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$ (5)

25

(10) $\sin 6x + \cos 4x + 2 = 0$; $0 \le x \le 2\pi$

ie. $3\sin 2x - 4\sin^3 2x + 1 - 2\sin^2 2x + 2 = 0$ 5

$-4\sin^3 2x - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 3 = 0$

Let $\sin 2x = y$

Then $-4y^3 - 2y^2 + 3y + 3 = 0$; $y = \sin 2x$

when $y = 1$, $-4 - 2 + 3 + 3 = 0$

$\therefore (y-1)$ is a factor 5

$\therefore (y-1)(-4y^2 + Ay - 3) = 0$

comparing y^2's coefficients.

$-2 = +4 + A \Rightarrow A = -6$

Let $g(x) = -4y^2 - 6y - 3$

$= -4\left(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}\right)$

$= -4\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - \frac{9}{16}\right]$

$= -4\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right] \neq 0$

$\therefore$ only a real solution. is at $y = 1$ 5

i.e. $\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \sin \pi/2$

$\therefore 2x = n\pi + (-1)^n \pi/2$ 5

$x = n\pi/2 + (-1)^n \pi/4$

for $n = 1$ $x = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$ //

$n = 2$ $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$ // 5

$n = 3$ $x = 3\pi/2 - \pi/4 = 5\pi/4$

25

(11) (a) (i) $x^2 - 3 + k(2x+3) = 0$

$x^2 + 2kx + 3(k-1) = 0 \quad <^{\alpha}_{\beta}$

$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = -2k \\ \alpha - \beta = 2 \quad 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1-k \\ \beta = -(k+1) \end{array}$

5

$\alpha\beta = 3(k-1)$

$\therefore (k-1)(k+1) = 3(k-1)$ 5

$\Rightarrow (k-1)(k+1-3) = 0$

$\therefore (k-1)(k-2) = 0$

$\therefore k = 1$ or $k = 2$

5 5

25

(ii) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{c}$; $x \neq \pm 1$, $c \neq 0$

$c(x - 1 + x + 1) = x^2 - 1$

$2cx = x^2 - 1$

$x^2 - 2cx - 1 = 0$ 5

$\Delta = (-2c)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$ 5

$= 4c^2 + 4$

$= 4(c^2+1) > 0$ always when c is real. 5

$\therefore$ The quadratic equation has distinct roots. 5

20

(b) (i) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$f(-1) = -1 - 3 - 2 - 2 - 3 + 1 = -10 \neq 0$

$\therefore (x+1)$ is not a factor of $f(x)$. 5

$f(1) = 1 - 3 + 2 - 2 + 3 + 1 = 2 \neq 0$ 5

$\therefore (x-1)$ is also not a factor of $f(x)$

5 $\therefore$ neither $(x+1)$ nor $(x-1)$ is a factor of $f(x)$. 15

(ii) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$f(x) = (x^2-1)\,q(x) + ax + b \;;\; q(x)$

When $x = 1$; $f(1) = a + b = 2$ — ① (5)

$f(-1) = -a + b = -10$ — ② (5)

$b = -4$ (5), $a = 6$ (5)

$\therefore$ the remainder when $f(x)$ is divided by (x^2-1) is $\underline{\underline{6x-4}}$ (5) [25]

(iii) $f(x) = (x^2+1)(x^3 + Ax^2 + Bx + C) + px + q$ (5)

$= x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Compairing co-efficient

$\underline{\underline{x^4}}$ $\quad -3 = A$

$\underline{\underline{x^3}}$ $\quad 2 = B + 1 \Rightarrow B = 1$

$\underline{\underline{x^2}}$ $\quad -2 = C + A \Rightarrow C = 1$ (15)

$\underline{\underline{x}}$ $\quad 3 = B + P \Rightarrow P = 2$

$\underline{\underline{\text{constants}}}$ $\quad 1 = C + q \Rightarrow q = 0$

$\therefore$ The remainder is $\underline{\underline{2x}}$ (5) [25]

(iv) $f(x) = 2x$

$\Rightarrow (x^2+1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) + 2x = 2x$

$\therefore (x^2+1)(x^3 - 3x^2 + x + 1) = 0$ (5)

Let $x^3 - 3x^2 + x + 1 = g(x)$

$g(1) = 1 - 3 + 1 + 1 = 0$

$\therefore (x-1)$ is a factor of $g(x)$ (5)

$\therefore g(x) = (x-1)(x^2 + kx - 1)$ (5)

compairing co-efficient of x^2

$-3 = -1 + k \Rightarrow k = -2$ (5)

$$g(x) = (x-1)(x^2-2x-1)$$
$$= (x-1)(x^2-2x+1-1-1)$$
$$= (x-1)\left[(x-1)^2-\sqrt{2}^2\right]$$
$$= (x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) \quad 5$$

$\therefore (x^2+1)(x-1)[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})] = 0$ 5

$\therefore$ all the real roots of $f(x) = 2x$ are

1, $1+\sqrt{2}$ and $1-\sqrt{2}$

5 5

40

(12) (a) Let the geometric progression is

$a, ar, ar^2, \dots ar^{n-1}$; a is 1st term and r is common ratio. 5

Then n^{th} term $u_n = ar^{n-1}$ 5

$\therefore$ p^{th} term $= u_p = ar^{p-1} = q$ — ① 5

q^{th} term $= u_q = ar^{q-1} = p$ — ② 5

$(p+q)^{th}$ term $= u_{p+q} = ar^{p+q-1}$ — ③ 5

①/② $\Rightarrow$ $\frac{q}{p} = r^{p-1-q+1} = r^{p-q} \Longrightarrow r = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ — ④ 5

① $\Rightarrow$ $a = q \times r^{1-p} = q\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right]^{1-p}$ 5

$\therefore u_{p+q} = \frac{q^{\frac{p-q+1-p}{p-q}}}{p^{\frac{1-p}{p-q}}} \times \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q} \times p+q-1}$ 10

$= \frac{q^{\frac{1-q+p+q-1}{p-q}}}{p^{\frac{1-p+p+q-1}{p-q}}}$ 5 $= \frac{q^{p/p-q}}{p^{q/p-q}} = \left(\frac{q^p}{p^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ 5

55

(b) To prove that $1+n^2+n^4 = (1+n^2)^2 - n^2$

$$RHS = 1+2n^2+n^4-n^2$$
$$= 1+n^2+n^4 \quad (10)$$
$$= LHS$$

$$\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots$$

$$U_r = \frac{r}{1+r^2+r^4} \ (5) = \frac{r}{(1+r^2)^2 - r^2} \ (5)$$

$$= \frac{r}{(1+r^2-r)(1+r^2+r)} = \frac{Ar+B}{(1+r^2-r)} + \frac{Cr+D}{(1+r^2+r)} \ (5)$$

$$= \frac{Ar+Ar^3+Ar^2+B+Br^2+Br + Cr+Cr^3-Cr^2+D+Dr^2-Dr}{(1+r^2-r)(1+r^2+r)}$$

$$= \frac{(A+B+C-D)r+(A+C)r^3+(A+B-C+D)r^2+B+D}{(1+r^2-r)(1+r^2+r)}$$

r	$A+B+C-D = 1$ — ①	①+② ⇒	$A+B = \frac{1}{2}$ — ⑤
r^3	$A+C = 0$ — ②	①−② ⇒	$C-D = \frac{1}{2}$ — ⑥
r^2	$A+B-C+D = 0$ — ③	② ⇒	$A = -C$
constant	$B+D = 0$ — ④	④ ⇒	$B = -D$ (10)

$\therefore$ ⑤ ⇒ $-C-D = \frac{1}{2}$ — ⑦

⑥+⑦ ⇒ $-2D = 1$ ⇒ $D = -\frac{1}{2}$ (5) $\therefore B = \frac{1}{2}$ (5)

⑦ ⇒ $C = 0$ (5)

$\therefore A = 0$ (5)

$$\therefore U_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+r^2-r} - \frac{1}{1+r^2+r}\right) \ (5)$$

Let $\frac{1}{1+r^2-r} = f(r)$ then $f(r+1) = \frac{1}{1+(r+1)^2-(r+1)}$

$$= \frac{1}{1+r^2+2r+1-r-1}$$

$$= \frac{1}{r^2+r+1} \quad 5$$

$$\therefore\ U_r = \frac{1}{2}\left(f(r) - f(r+1)\right) \quad 5$$

$$2U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$2\sum_{r=1}^{n} U_r = \begin{array}{l} f(1) - \cancel{f(2)} \\ \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)} \\ \vdots \\ \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)} \\ \cancel{f(n)} - f(n+1) \end{array} \quad 5 \quad 5$$

$$= f(1) - f(n+1) \quad 5$$

$$\therefore\ \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1^2-1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right) \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{n^2+n+1-1}{n^2+n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{n(n+1)}{n^2+n+1} = \underline{\underline{\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}} \quad 5$$

95

(13) a. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \dots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left\{\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\} \sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

When $n=1$

$LHS = \cos\alpha$

$$RHS = \frac{\cos(\alpha+0)\sin(\beta/2)}{\sin(\beta/2)}$$

$= \cos\alpha$

$\underline{\underline{LHS = RHS}}$ (5)

Take any $p \in \mathbb{Z}^+$

Assume that the result is true for $n=p$.

$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \dots + \cos\{\alpha+(p-1)\beta\}$

$$= \frac{\cos\left\{\alpha + \left(\frac{p-1}{2}\right)\beta\right\} \sin\left(\frac{p\beta}{2}\right)}{\sin(\beta/2)} \quad \text{— (A)}$$

(5)

When $n = p+1$

$$\underbrace{\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \dots + \cos\{\alpha+(p-1)\beta\}}_{\text{from (A)}} + \cos\{\alpha+p\beta\} =$$

$$\frac{\cos\left\{\alpha + \left(\frac{p-1}{2}\right)\beta\right\} \sin\left(\frac{p\beta}{2}\right)}{\sin(\beta/2)} + \cos(\alpha+p\beta)$$

(5)

$$= \frac{2\cos\left\{\alpha+\left(\frac{p-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\left(\frac{p\beta}{2}\right) + 2\sin\left(\beta/2\right)\cos\left(\alpha+p\beta\right)}{2\sin\left(\beta/2\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin\left\{\alpha+p\beta-\beta/2\right\}} - \sin\left(\alpha-\beta/2\right) + \sin\left\{\alpha+p\beta+\beta/2\right\} - \sin\left\{\alpha+p\beta-\beta/2\right\}}{2\sin\left(\beta/2\right)}$$

5 5

$$= \frac{\sin\left\{\alpha+p\beta+\beta/2\right\} - \sin\left(\alpha-\beta/2\right)}{2\sin\left(\beta/2\right)}$$

$$= \frac{2\cos\left(\alpha+\frac{p\beta}{2}\right)\sin\left(p+1\right)\frac{\beta}{2}}{2\sin\left(\beta/2\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha+\frac{p\beta}{2}\right)\sin\left(p+1\right)\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\beta/2\right)}$$ 5

If the result is true for $n=p\in\mathbb{Z}^+$. then it is also true for $n=p+1$. therefor by using the principle of mathematical induction the result is true for all $n\in\mathbb{Z}^+$. 5

35

(b) $\frac{12!}{2!} = 239500800$ (5)

I $\frac{10!}{2!} = 1814400$ (10)

II $\frac{7!}{2!} \times 5! = 302400$ (10)

III $\frac{10!}{2!} = 1814400$ (10)

35

(c) I ${}^4C_3 \times {}^9C_4 = 504$ (10)

II

Boys	Girls
4	3
3	4

${}^9C_4 \times {}^4C_3 = 504$ (10)

${}^9C_3 \times {}^4C_4 = 84$ (10)

588 (5)

III

Boys	Girls
4	3
5	2
6	1
7	0

${}^9C_4 \times {}^4C_3 = 504$ (10)

${}^9C_5 \times {}^4C_2 = 756$ (10)

${}^9C_6 \times {}^4C_1 = 336$ (10)

${}^9C_7 \times {}^4C_0 = 36$ (10)

1632 (5)

80

(14) (a) $y = f(x) = \dfrac{16(x+1)}{(x-1)^2(3x+1)} = \dfrac{16(x+1)}{3x^3-5x^2+x+1}$

$$f'(x) = 16\left[\frac{(x-1)^2(3x+1)\times 1-(x+1)(9x^2-10x+1)}{(x-1)^4(3x+1)^2}\right]$$ 5 5

$$= 16\,\frac{(x-1)(3x+1)-(x+1)(9x-1)}{(x-1)^3(3x+1)^2}$$

$$= \frac{16\times(-2x)(3x+5)}{(x-1)^3(3x+1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x+5)}{(x-1)^3(3x+1)^2}$$ 5

Vertical asymptotes. $x=1$, $x=-\frac{1}{3}$ 5

Horizonta asymptote. $x \to \pm\infty$, $y=0$ 5

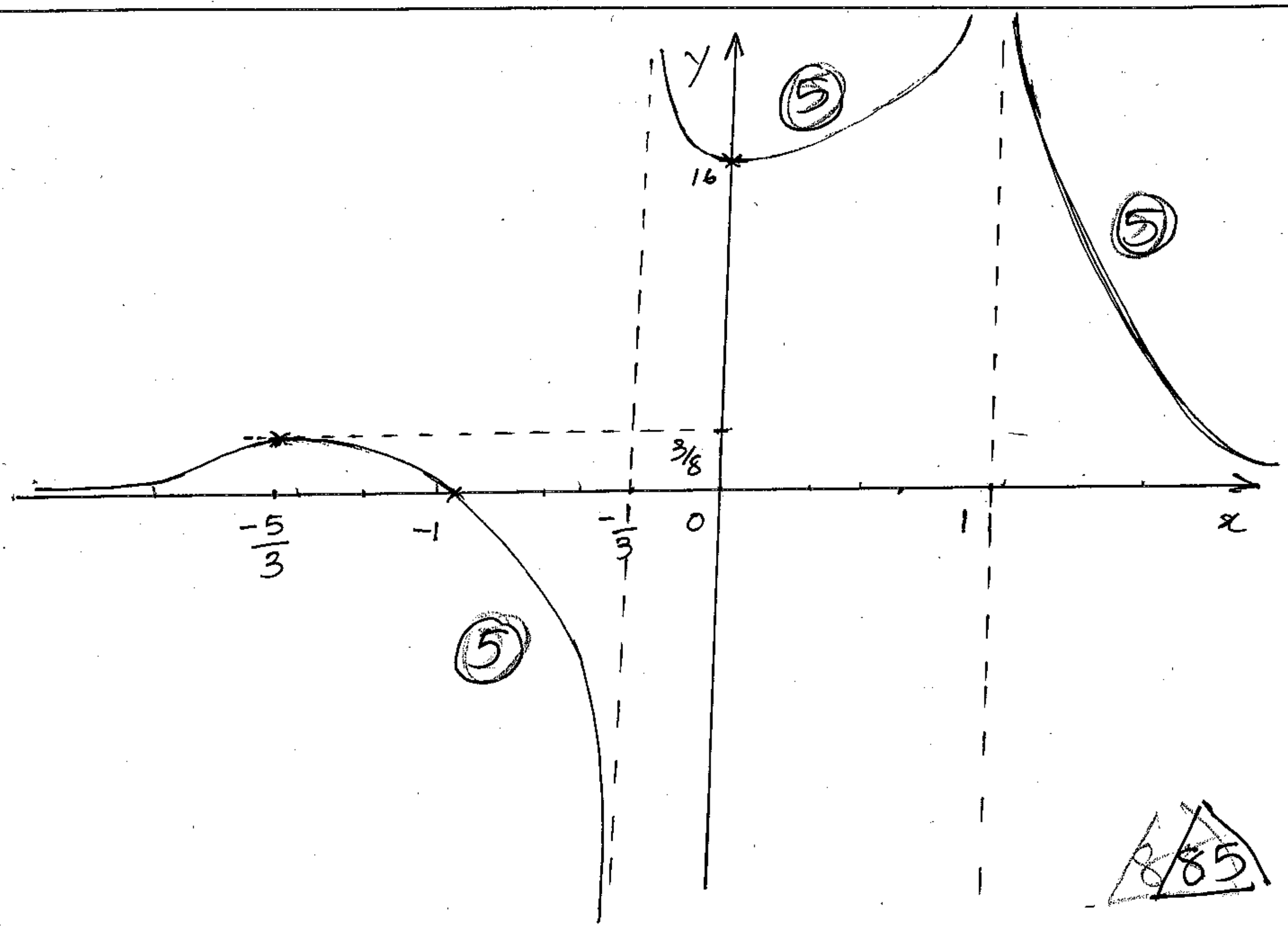
The point horizontal asymptote intersects the curve.
when $y=0$, $x=-1 \Rightarrow (-1,0)$ 5

Turning points.
when $f'(x)=0$, $x=\frac{-5}{3}$ 5 or $x=0$ 5
$y=\frac{3}{8}$ $y=16$

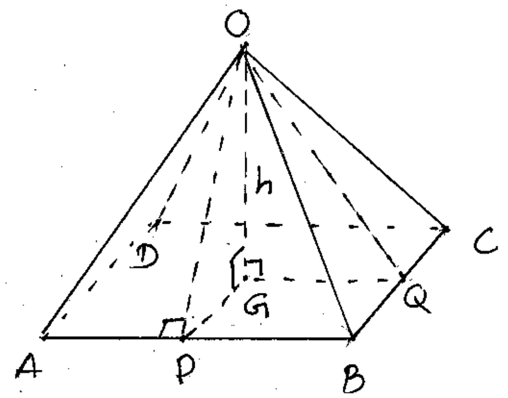
Then

	$-\infty<x<\frac{-5}{3}$	$\frac{-5}{3}<x<\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}<x<0$	$0<x<1$	$1<x<\infty$
sign of $f'(x)$	$\frac{+\ -}{-\ +}$ (+)	$+\ +$ $-\ +$ (−)	$+\ +$ $-\ +$ (−)	$-\ +$ $-\ +$ (+)	$-\ +$ $+\ +$ (−)
	/	\			\

25



(b) (i)



Let $AP = x$ m.

But $A = 4x^2$

$OP = 3\sqrt{6}$ m, $OG = h$

Area $ABCD = A$

Volume $V = \frac{1}{3} A h$

$h^2 = (3\sqrt{6})^2 - x^2$

$= 9 \times 6 - \frac{A}{4}$

$h^2 = \frac{54 \times 4 - A}{4} = \frac{216 - A}{4}$

$\therefore V = \frac{1}{3} \times A \times \sqrt{\frac{216 - A}{4}}$

$V = \frac{A}{6}\sqrt{216 - A}$

15

(ii) $V = \frac{1}{6} A (216-A)^{1/2}$

$\frac{dV}{dA} = \frac{1}{6}\left[A \times \frac{1}{2}(216-A)^{-1/2} \times (-1) + (216-A)^{1/2} \times 1 \right]$ 10

$= \frac{1}{6}\left(\frac{-A}{2\sqrt{216-A}} + \sqrt{216-A} \right)$

$= \frac{1}{6} \frac{-A + 2(216-A)}{2\sqrt{216-A}}$

$= \frac{1}{12} \frac{432-3A}{\sqrt{216-A}} = \frac{1}{4} \frac{144-A}{\sqrt{216-A}}$ 5

When $\frac{dV}{dA} = 0$, $A = 144 \ m^2$ 5

	$0 < A < 144$	$A = 144$	$144 < A < 216$
sign of $\frac{dV}{dA}$	$+$		$-$

15

$\therefore$ V is maximum, when $A = 144 \ m^2$

Then side length of the base $= 12 \ m$ 5

Height $= \sqrt{\frac{216-144}{4}} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2} \ m$ 5

45

(iii) $144 + 4 \times \frac{1}{2} \times 12 \times 3\sqrt{6}$

$= 144 + 72\sqrt{6}$

$= 72(2+\sqrt{6}) \ m^2$ 5

5

(15) a. $$\frac{1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{(1-z)} + \frac{B}{(1-2z)}$$

$$1 = A(1-2z) + B(1-z)$$

Compairing
coefficient of z, $-2A - B = 0$ — (1)

constants, $A + B = 1$ — (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $-A = 1 \Rightarrow A = -1$ (5)

(2) $\Rightarrow$ $-1 + B = 1 \Rightarrow B = 2$ (5)

$$\therefore \frac{1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$ (10)

When $t = \sin x$, $\frac{dt}{dx} = \cos x$. (5)

$$\int \frac{\sin x}{\sin 4x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{4\cos^2 x\cdot\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$$ (10)

$$= \frac{1}{4}\left\{\int \frac{-1}{1-t^2}\,dt + \int \frac{2}{1-2t^2}\,dt\right\}$$ (5)

$$= \frac{-1}{4}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-2t^2}\,dt$$

$$= \frac{-1}{4}\int \frac{1}{1-t^2}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2 - t^2}\,dt$$

$$= \frac{-1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}t}{1-\sqrt{2}t}\right| + C$$

5 5

$$= \frac{-1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right| + C$$

5 5

$; \; P = \frac{-1}{8}$ and $Q = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

5 5 50

(b) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(a+b-y)\,(-dy)$$

Where $x = a+b-y \; ; \; \frac{dx}{dy} = -1$

when $x = a, \; y = b$

when $x = b, \; y = a$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-y)\,dy.$$

Since y is a variable, let $y = x$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$ 15

$$I = \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{a+b-x-a}{b-(a+b-x)}}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\, dx = J \quad (10)$$

$$I + J = \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, dx + \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{x-a+b-x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{b-a}{\sqrt{-ab+(a+b)x+x^2}}\, dx$$

$$= (b-a) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}}$$

$$= (b-a) \left[\sin^{-1} \left(\frac{x + \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \right) \right]_a^b$$

$$= (b-a) \left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) \right]$$

$$= (b-a) \left[\pi/2 + \pi/2 \right]$$

$$= \pi (b-a) \quad (20)$$

40

$$\int e^{3x} \sin 4x\, dx = \int \sin 4x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \int \frac{e^{3x}}{3} \cos 4x . 4\, dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \sin 4x - \frac{4}{3} \int \cos 4x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\sin 4x - \frac{4}{3}\left[\frac{e^{3x}}{3}\cos 4x + \int \frac{e^{3x}}{3}\sin 4x \cdot 4\,dx\right]$$

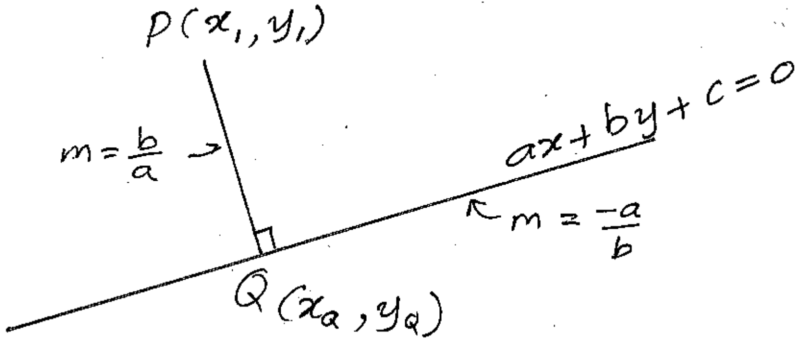
$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

$$\frac{25}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x$$

$$25\int e^{3x}\sin 4x\,dx = 3e^{3x}\sin 4x - 4e^{3x}\cos 4x$$

$$\therefore \int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{e^{3x}}{25}\left(3\sin 4x - 4\cos 4x\right) + C$$

(16) (a)



Let Q is the perpendicular base.

$$\frac{y_1 - y_Q}{x_1 - x_Q} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{y_1 - y_Q}{b} = \frac{x_1 - x_Q}{a} = t \text{ ; } t \text{ is a parametre.}$$

$\therefore \; y_Q = y_1 - bt \quad , \quad x_Q = x_1 - at$

Since Q is on $ax + by + c = 0$

$$a(x_1 - at) + b(y_1 - bt) + c = 0$$

$$\Rightarrow \; ax_1 + by_1 + c - t(a^2 + b^2) = 0$$

$$\Rightarrow \; t = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

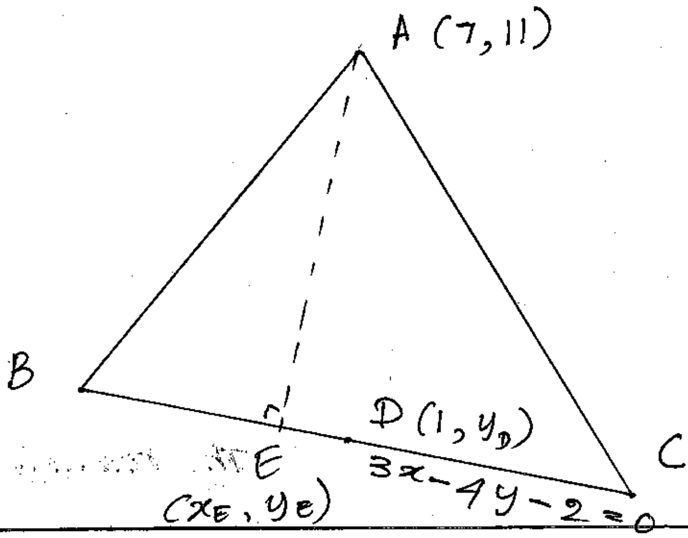
Since $PQ^2 = (x_1 - x_Q)^2 + (y_1 - y_Q)^2$;

$$PQ^2 = \frac{a^2(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \; PQ = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

35



Let mid-point of BC is E.
Let the perpendicular to BC from A is E.

Since Q is on BC, $3\times 1 - 4\times y_D - 2 = 0$

$$\Rightarrow \quad y_D = \frac{1}{4}$$

Also $\dfrac{x_B + x_C}{2} = 1 \Rightarrow x_B + x_C = 2$ — ①

$\dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y_B + y_C = \dfrac{1}{2}$ — ②

But $AE = \left| \dfrac{3\times 7 - 4\times 11 - 2}{\sqrt{3^2+4^2}} \right| = 5$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\times BC \times 5 = 30 \Rightarrow \quad BC = 12$ units.

$\therefore$ $BD = DC = 6$ units.

$\therefore \quad (x_B - 1)^2 + (y_B - \frac{1}{4})^2 = 6^2$ — ③

Also $3x_B - 4y_B - 2 = 0 \Rightarrow x_B = \frac{4}{3}y_B + \frac{2}{3}$

$$\therefore ③ \Rightarrow \left(\frac{4}{3}y_B + \frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(y_B - \frac{1}{4}\right)^2 = 6^2$$

$$\left(\frac{4y_B - 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4y_B - 1}{4}\right)^2 = 6^2$$

$$(4y_B - 1)^2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) = 6^2$$

$$(4y_B - 1)^2 = \frac{6^2\times 9\times 16}{25}$$

$$\therefore 4y_B - 1 = \pm\frac{6\times 3\times 4}{5}$$

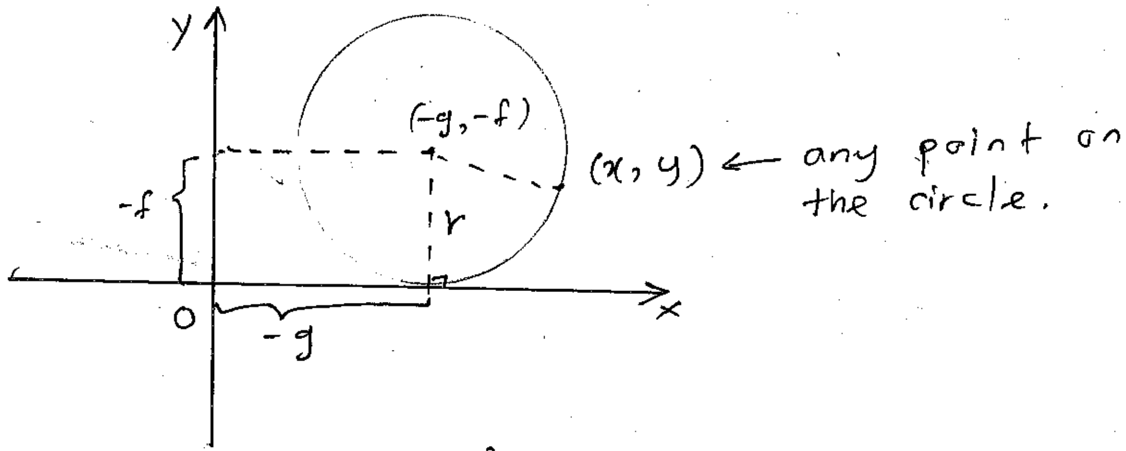
$\underline{\underline{+}}$ $\quad 4y_B = \frac{72}{5} + 1 = \frac{77}{5} \Rightarrow y_B = \frac{77}{20}$

$\therefore x_B = \frac{\cancel{4}}{3}\times\frac{77}{\cancel{20}_{5}} + \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{87}{15} \Rightarrow B \equiv \left(\frac{87}{15}, \frac{77}{20}\right)$

$\underline{\underline{-}}$ $\quad 4y_B = \frac{-72}{5} + 1 = \frac{-67}{5} \Rightarrow y_B = \frac{-67}{20}$

$\therefore x_B = \frac{\cancel{4}}{3}\times\frac{-67}{\cancel{20}_{5}} + \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{-57}{15} \Rightarrow C \equiv \left(\frac{-57}{15}, \frac{-67}{20}\right)$

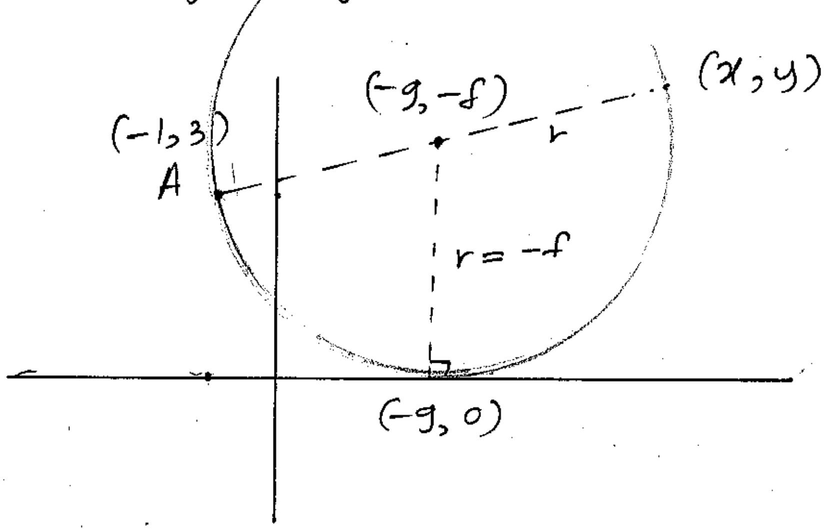
(16) (b)



$$(x+g)^2+(y+f)^2=(-f)^2$$

$\therefore \quad x^2+y^2+2gx+2fy+g^2+f^2=f^2$

$\therefore \quad x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ ← equation of given circle.



$\dfrac{x-1}{2}=-g \qquad \dfrac{y+3}{2}=-f$

$$\left(x+\frac{1-x}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y+3}{2}\right)^2=(-f)^2$$

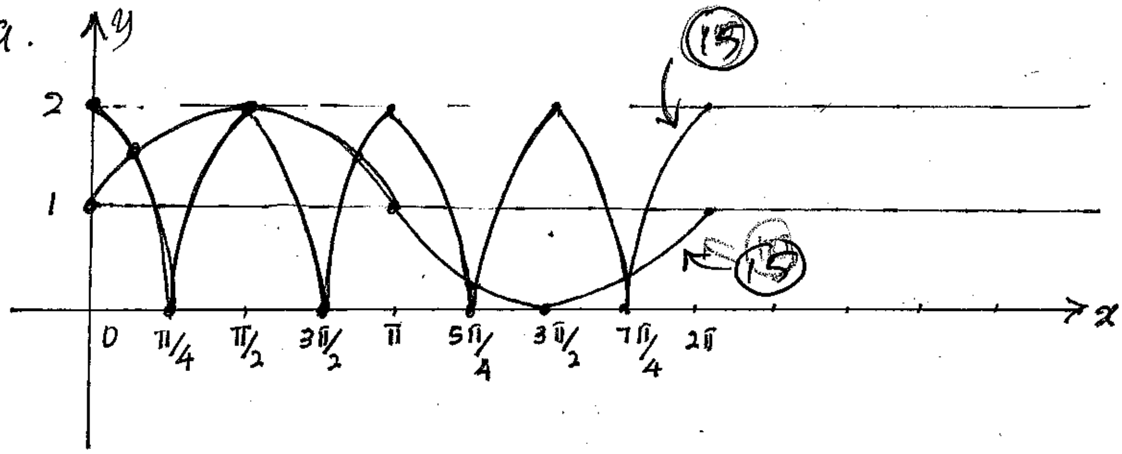
$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-3}{2}\right)^2=\left(\frac{y+3}{2}\right)^2$$

$$x^2+2x+1+\cancel{y^2}-6y+\cancel{9}=\cancel{y^2}+6y+\cancel{9}$$

$\therefore \quad (x+1)^2=12y \implies \underline{\underline{y=\frac{1}{12}(x+1)^2}}$

50

(17) a.



no. of solutions $= \underline{\underline{7}}$ 5

25

b) For Sine rule. 25

Let $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = k$

$\dfrac{\sin A}{a} = k \Rightarrow \sin A = ka$

$\dfrac{\sin B}{b} = k \Rightarrow \sin B = kb$

$\dfrac{\sin C}{c} = k \Rightarrow \sin C = kc$

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\sin A\cos B + \cos A\sin B} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{\cancel{k}\cancel{a}\left\{\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cancel{a}c}\right\} - \cancel{k}b\left\{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}}{\cancel{k}\cancel{a}\left\{\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cancel{a}c}\right\} + \cancel{k}\cancel{b}\left\{\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cancel{b}c}\right\}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a^2+\cancel{c^2}-b^2-b^2-\cancel{c^2}+a^2}{\cancel{a^2}+c^2-\cancel{b^2}+\cancel{b^2}+c^2-\cancel{a^2}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{\cancel{2}(a^2-b^2)}{\cancel{2}c^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$a^2+b^2=c^2.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{C} = \pi/2}}$$

$\therefore$ ABC is a right-angled triangle//

45

c) $\underbrace{\tan^{-1}x}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}2x}_{\beta} = \frac{2\pi}{3}$

$$\alpha+\beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{x+2x}{1-x\cdot 2x} = -\sqrt{3}$$

$$3x = -\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 2x^2$$

$$2\sqrt{3}x^2-3x-\sqrt{3}=0$$

$$x = \frac{3\pm\sqrt{9+4\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\pm\sqrt{33}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{4}$$

$x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$ or $x = \frac{3-\sqrt{11}}{4}$

45

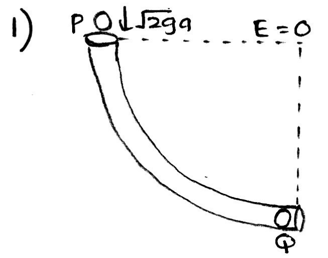
MARKING SCHEME

G.C.E (Advance Level) - March 2020

Grade 13 - Term Test II

COMBINED MATHEMATICS II

PART A

1) 

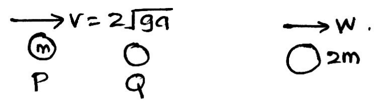
Applying the Law of conservation of energy for P,

$$0 + \frac{1}{2} m \cdot 2ga = -mga + \frac{1}{2} mv^2 \quad (10)$$

$$2ga = -2ga + v^2$$

$$v^2 = 4ga$$

$$v = 2\sqrt{ga} \quad (5)$$



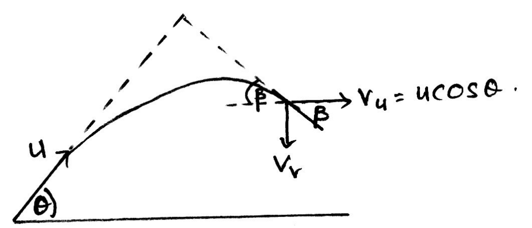
Applying the law of Conservation of energy,

$$\rightarrow \quad m \cdot 2\sqrt{ga} = 2m\,W \quad (5)$$

$$W = \sqrt{ga} \quad (5)$$

25

---

2) 

$$\beta + \theta = 90^\circ$$

$$\tan(\beta + \theta) = \tan 90^\circ$$

$$\frac{\tan\beta + \tan\theta}{1 - \tan\beta\tan\theta} \rightarrow \infty$$

$$1 - \tan\beta\tan\theta = 0$$

$$\tan\beta\tan\theta = 1 \quad (5) \quad \text{—— } (1)$$

$$\rightarrow \quad V_u = u\cos\theta$$

$$\uparrow \quad v = u + at$$

$$V_r = u\sin\theta - gt$$

$$\downarrow \quad -V_r = gt - u\sin\theta \quad (5)$$

$$\tan\beta = \frac{-V_r}{V_u} = \frac{gt - u\sin\theta}{u\cos\theta} \quad (5)$$

from (1),

$$\left(\frac{gt - u\sin\theta}{u\cos\theta}\right)\tan\theta = 1 \quad (5)$$

$$\left(\frac{gt - u\sin\theta}{u\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = 1$$

$$gt\sin\theta - u\sin^2\theta = u\cos^2\theta$$

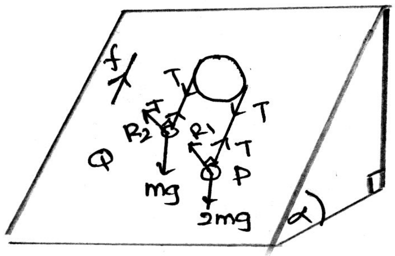
$$gt\sin\theta = u(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$t = \frac{u}{g\sin\theta} \quad (5)$$

$\boxed{25}$

---

3)



(5) diagram

Applying $F = ma$ $\swarrow$, for P,

$$2mg\sin\alpha - T = 2mf \quad \text{——} (1) \quad (5)$$

Applying $F = ma$ $\nearrow$, for Q

$$T - mg\sin\alpha = mf \quad \text{——} (2) \quad (5)$$

(1) + (2), $\quad mg\sin\alpha = 3mf$

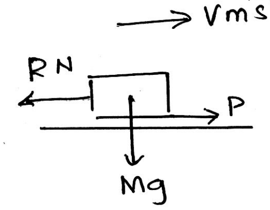
$$f = \frac{g\sin\alpha}{3} \quad (5)$$

From (2),

$$T = mg\sin\alpha + \frac{mg\sin\alpha}{3}$$

$$T = \frac{4mg\sin\alpha}{3} \quad (5)$$

$\boxed{25}$

4) 

For car, $H = Pv$

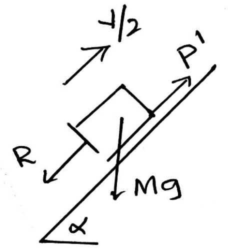
$$H \times 10^3 = Pv$$

$$P = \frac{H \times 10^3}{v} \ N \quad (5)$$

Applying $F = ma \rightarrow$

$$P - R = 0$$

$$P = R = \frac{H \times 10^3}{v} \ N \quad (5)$$



For the motion on the inclined plane

$$H = PV$$

$$H \times 10^3 = P' \frac{v}{2}$$

$$P' = \frac{2H \times 10^3}{v} \ N. \quad (5)$$

Applying $\nearrow$ $F = ma$

$$P' - R - Mg \sin\alpha = Ma \quad (5)$$

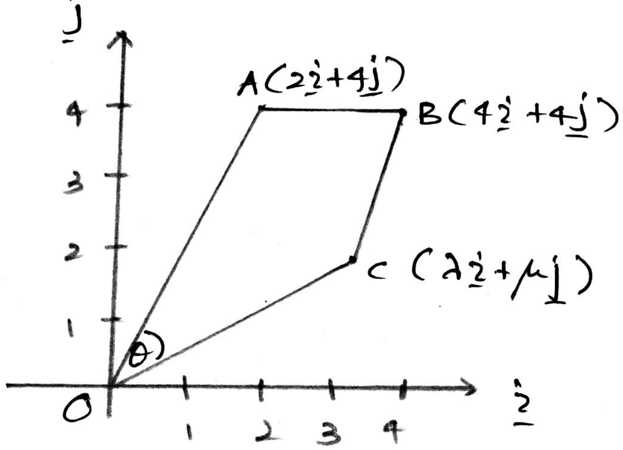
$$\frac{2H \times 10^3}{v} - \frac{H \times 10^3}{v} - Mg \sin\alpha = Ma$$

$$a = \left(\frac{H \times 10^3}{Mv} - g \sin\alpha \right) ms^{-2}$$

(5)

$\boxed{25}$

5)



As OA // CB and OA = 2CB

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{CB} \quad 5$$

$$2\underline{i} + 4\underline{j} = 2\left[4\underline{i} + 4\underline{j} - (\lambda \underline{i} + \mu \underline{j})\right] \quad 5$$

$$2\underline{i} + 4\underline{j} = 2\left[(4-\lambda)\underline{i} + (4-\mu)\underline{j}\right]$$

$$(2 - 8 + 2\lambda)\underline{i} + \left[4 - 2(4-\mu)\right]\underline{j} = 0$$

$$(-6 + 2\lambda)\underline{i} + (-4 + 2\mu)\underline{j} = 0$$

$$-6 + 2\lambda = 0 \qquad -4 + 2\mu = 0$$

$$\lambda = 3 \qquad \mu = 2 \qquad 5 \text{ both}$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = (3\underline{i} + 2\underline{j})$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos\theta .$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos\theta . \quad 5$$

$$(2\underline{i} + 4\underline{j}) \cdot (3\underline{i} + 2\underline{j}) = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos\theta$$

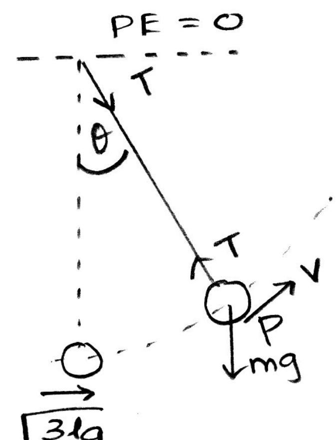
$$6 + 8 = \sqrt{20} \cdot \sqrt{13} \cos\theta .$$

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{13}} = \frac{14}{2\sqrt{5}\sqrt{13}}$$

$$\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{65}} \quad 5$$

25

6)



$\cos\theta = \frac{3}{5}$

Applying the Law of Conservation of energy

$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta = \frac{1}{2}.m.3lg - mgl.$ (10)

$v^2 = 3lg - 2lg + 2lg.\frac{3}{5}$

$v^2 = \sqrt{\frac{11lg}{5}}$ (5)

For P,

Applying $F = ma$ ↖

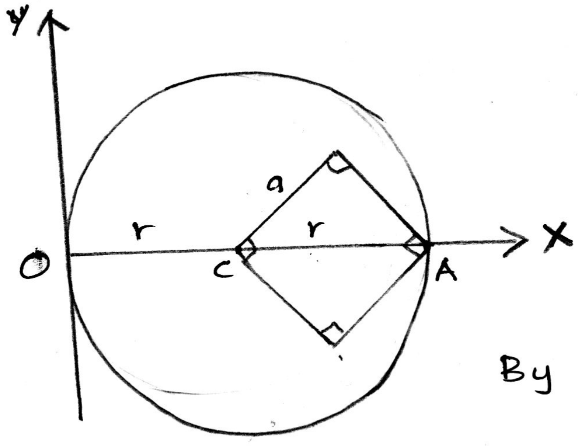
$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l}.$ (5)

$T = \frac{11mlg}{5l} + \frac{3mg}{5}$

$T = \frac{14mg}{5}$ (5)

25

7)



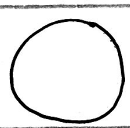
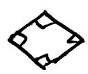
$2a^2 = r^2$

$a = \frac{r}{\sqrt{2}}$

Density $- \rho$

By symmetry

$\overline{Y} = 0.$

Object	Mass	Distance from O to center. g.	
	$\pi r^2 \rho$	r	5
	$\frac{r^2\rho}{2}$	$\frac{3r}{2}$	5
Composite body	$(\pi - \frac{1}{2}) r^2 \rho$	$\bar{x}$	

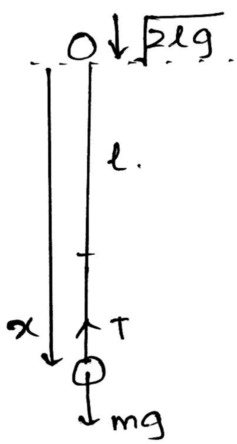
$$\left(\pi - \frac{1}{2}\right) r^2 \rho g \, \bar{x} = \pi r^2 \rho g \, r - \frac{r^2}{2} \rho g \times \frac{3r}{2} \quad 10$$

$$\left(\frac{2\pi - 1}{2}\right) \bar{x} = \left(\frac{4\pi - 3}{4}\right) r.$$

$$\bar{x} = \frac{4\pi - 3}{2(2\pi - 1)} r. \quad 5$$

25

8)



P.E = 0

By the Law of Conservation of energy,

$$\frac{1}{2}\,\frac{2mg(x-l)^2}{l} - mgx = \frac{1}{2}m \cdot 2gl \quad (15)$$

$$\frac{x^2 - 2xl + l^2}{l} = l + x \quad (5)$$

$$x^2 - 2xl + l^2 = l^2 + xl.$$

$$x = 3l. \quad (x>0)$$

(5)

The maximum distance travelled by the particle is $3l$.

25

---

9) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (5)

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{9}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{15} \quad (5)$$

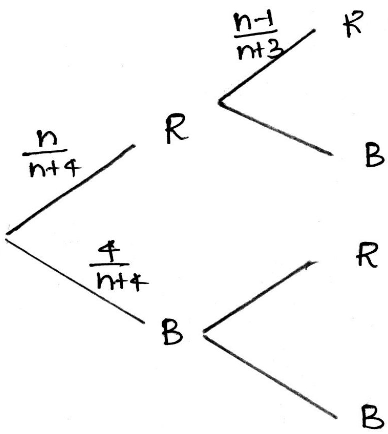
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{15}$$

$$= \frac{7}{30} \quad (5)$$

25

10)



$$\left(\frac{n}{n+4}\right)\left(\frac{n-1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$$3n^2 - 3n = n^2 + 7n + 12$$

$$n^2 - 5n + 6 = 0 \quad (5)$$

$$(n-6)(n+1) = 0$$

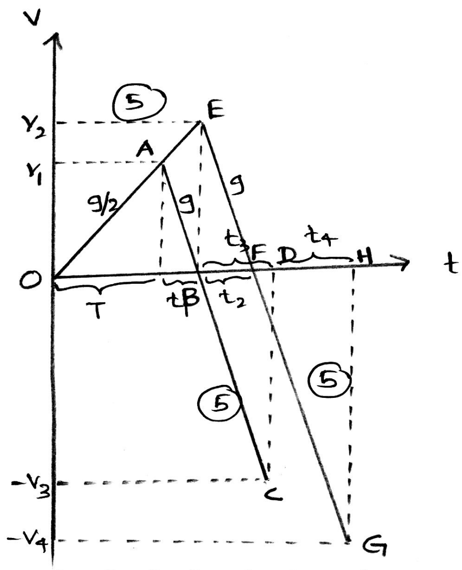
$$n = 6 \quad \text{or} \quad n = -1 \quad (5)$$

but $n \neq -1$, $\therefore$ $n = 6$ (5)

25

PART B.

11) a)



$\boxed{15}$

$\underline{OA}$ $\quad \dfrac{V_1}{T} = \dfrac{g}{2}$

$V_1 = \dfrac{gT}{2}$ (5)

$\underline{AB}$, $\quad \dfrac{V_1}{t_1} = g$

$t_1 = \dfrac{V_1}{g}$

$t_1 = \dfrac{gT/2}{g}$

$t_1 = \dfrac{T}{2}.$ (5)

Maximum height reached by the released part $=$ Area of OAB (5)

$= \dfrac{1}{2}\left(T + \dfrac{T}{2}\right) V_1$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3T}{2}\right)\left(\dfrac{gT}{2}\right)$

$= \dfrac{3gT^2}{8}$ (5)

$\boxed{20}$

$\underline{OE}$ $\quad \dfrac{V_2}{T + T/2} = \dfrac{g}{2}$

$\dfrac{V_2}{3T/2} = \dfrac{g}{2}$

$V_2 = \dfrac{3gT}{4}$ (5)

$\underline{ED}.$ $\quad \dfrac{V_2}{t_2} = g$

$t_2 = \dfrac{V_2}{g}$

$t_2 = \dfrac{3T}{4}$ (5)

The maximum beigh reached by the shuttle = Area of OED (5)

$= \frac{1}{2}\left(T+\frac{T}{2}+\frac{3T}{4}\right)\frac{3gT}{4}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{9T}{4}\right)\left(\frac{3gT}{4}\right)$

$= \frac{27gT^2}{32}$ (5)

$\boxed{20}$

Maximum height reached by released part = Distance travelled to reach the earth

Area of OAB = Area of BCD

$\frac{3gT^2}{8} = \frac{1}{2}t_3 V_3$. ——— (1) (5)

BC $\quad \frac{V_3}{t_3} = g$

$t_3 = \frac{V_3}{g}$.

By (1), $\quad \frac{3gT^2}{8} = \frac{1}{2}\frac{V_3}{g} \cdot V_3$

$V_3 = \frac{3g^2T^2}{4}$

$V_3 = \frac{\sqrt{3}gT}{2}$ (5) $\quad \boxed{10}$.

Maximum height reached by shuttle = Distance travelled to reach earth.

Area of OEF = Area of FGH

$\frac{27gT^2}{32} = \frac{1}{2}t_4 V_4$ ——— (2) , (5)

FH $\quad \frac{V_4}{t_4} = g$

$t_4 = \frac{V_4}{g}$.

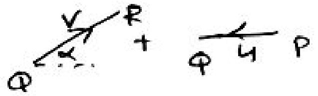
$\frac{27gT^2}{32} = \frac{1}{2}\cdot\frac{V_4}{g}\cdot V_4$

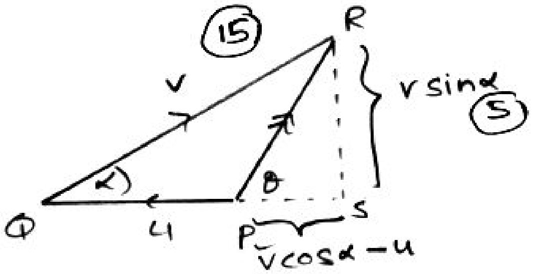
$V_4 = \frac{3\sqrt{3}gT}{4}$ (5) $\quad \boxed{10}$

11) b) $V_{D,E} \longrightarrow u$

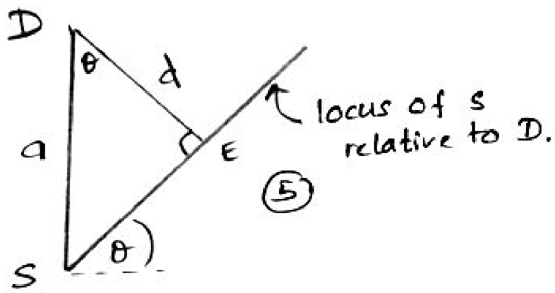
$V_{S,E}$ 

$$V_{S,D} = V_{S,E} + V_{E,D} \quad 5$$

=  5



$\boxed{30}$



$\boxed{05}$.

Shortest distance $DE = a\sin(90-\theta)$

$= a\cos\theta$. 5

PRS Δ

$\cos\theta = \dfrac{v\cos\alpha - u}{\sqrt{(v\cos\alpha-u)^2+(v\sin\alpha)^2}}$ 5

$= a \dfrac{v\cos\alpha - u}{\sqrt{(v\cos\alpha-u)^2+(v\sin\alpha)^2}}$ 10

$= \dfrac{a(v\cos\alpha - u)}{\sqrt{v^2+u^2-2uv\cos\alpha}}$ 5

$\boxed{25}$.

Time taken for shortest distance $\Big\} = \dfrac{SE}{PR} = \dfrac{a\sin\theta}{PR}$ 5

$= \dfrac{\dfrac{av\sin\alpha}{\sqrt{(v\cos\alpha-u)^2+(v\sin\alpha)^2}}}{\sqrt{(v\cos\alpha-u)^2+(v\sin\alpha)^2}}$ 10

$= \dfrac{av\sin\alpha}{\sqrt{v^2+u^2-2uv\cos\alpha}}$ 5 $\boxed{20}$

12) b) For m, $\leftarrow F = ma$

$$T = m(f - F) \quad \text{--- (1)} \quad (10)$$

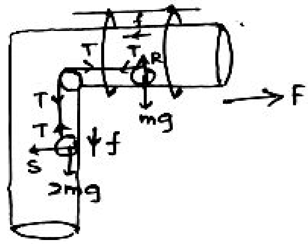
For $2m$, $\downarrow F = ma$

$$2mg - T = 2mf \quad \text{--- (2)} \quad (10)$$

For system, $\rightarrow F = ma$

$$0 = MF + m(F - f) + 2mF$$

$$0 = (M + 3m)F - mf \quad \text{--- (3)} \quad (10)$$



$a_{M,E} \rightarrow F$

$a_{m,M} \overset{\leftarrow}{f}$ $\quad a_{m,E}$

$a_{2m,M} \downarrow f$

$a_{m,E} = \overset{\leftarrow}{f} + \vec{F}$

$a_{2m,E} = \downarrow f + \vec{F}$ (10)

$\boxed{40}$

(1) + (2)

$$2mg = 3mf - mF$$

$$2g = 3f - F \quad \text{--- (4)} \quad (5)$$

$$f = \frac{2g + F}{3} \quad (5)$$

From (3)

$$0 = (M + 3m)F - m\left(\frac{2g + F}{3}\right) \quad (5)$$

$$0 = \left(M + 3m - \frac{m}{3}\right)F - \frac{2mg}{3}$$

$$\frac{2mg}{3} = \left(\frac{3M + 8m}{3}\right)F$$

$$F = \left(\frac{2mg}{3M + 8m}\right) \quad (5)$$

From (3), $f = \frac{1}{m}(M + 3m)\left(\frac{2mg}{3M + 8m}\right)$

$$= 2g\left(\frac{M + 3m}{3M + 8m}\right) \quad (5)$$

$\boxed{25}$

Acceleration of P. $\overset{\rightarrow F}{\downarrow f}$

$$a = \sqrt{F^2 + f^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2mg}{3M + 8m}\right)^2 + \left(\frac{2(M + 3m)g}{3M + 8m}\right)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{2g}{3M + 8m}\sqrt{M^2 + 10m^2 + 6Mm} \quad (5)$$

$\boxed{10}$

12) b)

Applying the Principle of Conservation of energy.

$$-Mgl - mga + \frac{1}{2}mkga = -Mgl - mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad (10)$$

$$-mga + \frac{1}{2}mkga = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = ga(k-2+2\cos\theta) \quad (5)$$

Applying ~~for~~ $F = ma$ for P,

$$R + T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a} \quad (10)$$

$$R = -T + mg\cos\theta + \frac{m}{a}ga(k-2+2\cos\theta)$$

For the equlibrium of Q.

$$T - Mg = 0$$

$$T = Mg \quad (5)$$

$$\therefore \quad R = -Mg + mg\cos\theta + \frac{m}{a} \cdot ga(k-2+2\cos\theta) \quad (5)$$

$$= mg\left[k-2+3\cos\theta - \frac{M}{m}\right] \quad (5)$$

When $k = 6$.

$$R = mg\left[6-2+3\cos\theta - \frac{M}{m}\right] \quad (5)$$

$$= mg\left[4 + 3\cos\theta - \frac{M}{m}\right]$$

$\boxed{45}$

When the reaction disappeared.

(5)

$$R = 0$$

$$mg\left(4 + 3\cos\theta - \frac{M}{m}\right) = 0$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{M}{m} - 4}{3} \quad (5)$$

But $0 < \theta < \pi.$ (5)

$\cos 0 > \cos\theta > \cos\pi.$ (5)

$$1 > \frac{\frac{M}{m} - 4}{3} > -1 \quad (5)$$

$$3 > \frac{M}{m} - 4 > -3$$

$$7 > \frac{M}{m} > 1$$

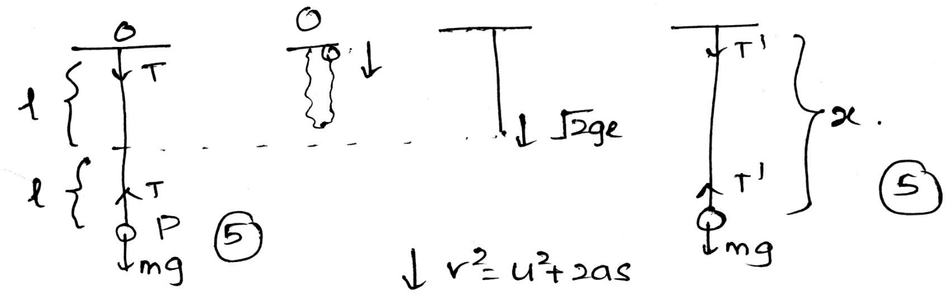
$$7m > M > m$$

The reaction is disappeared when

$7m > M > m.$ (5)

$\boxed{30}$.

13)



↑ $F = ma$

$T - mg = 0$ (10)

$\frac{\lambda l}{l} - mg = 0$ (5)

$\lambda = mg$ (5)

+ diagram. $\boxed{25}$

↓ $v^2 = u^2 + 2as$

$v^2 = 0 + 2gl$ (10)

$v = \sqrt{2gl}$. (5)

$\boxed{15}$

↓ $F = ma$.

$mg - T' = m\ddot{x}$ (10)

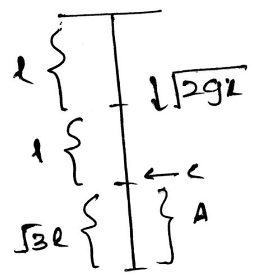
$mg - mg\left(\frac{x - l}{l}\right) = m\ddot{x}$ (5)

$-\frac{g}{l}(x - l - l) = \ddot{x}$

$-\frac{g}{l}(x - 2l) = \ddot{x}$ (5)

$\therefore$ The motion is simple harmonic. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. (5)

+ diagram $\boxed{30}$



$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$.

$\dot{x} = \sqrt{2gl}$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $x = l$. (10) conditions

$2gl = \frac{g}{l}(A^2 - l^2)$ (5)

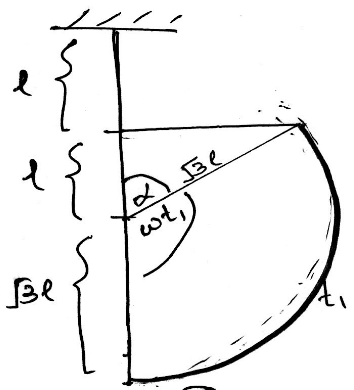
$2l^2 + l^2 = A^2$

$A^2 = 3l^2$

$A = \sqrt{3}\,l$. (5)

$\boxed{20}$

To calculate the time, let consider a horizontal circular motion of radius $\sqrt{3}l$ moving with ω angular velocity. (5)



(5)

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{3}l} \quad (5)$$

$$\alpha = \cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \quad (5)$$

$$\omega t_1 = \pi - \alpha. \quad (5)$$

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (5)$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$\boxed{30}$

For the motion from O to distance l,

$\downarrow\ v = u + at$

$\sqrt{2gl} = 0 + gt_2$ (5)

$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ (5)

$\boxed{10}$

Time taken by particle to reach the maximum distance from O,

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} + \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right\} \quad (5)$$

Time taken to reach the maximum height is equat to the time taken by particle to return O. (10)

$\therefore$ Total time taken to reach O again $= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right\}$ (5)

$\boxed{20}$

14) a) $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = 0$

Let $\alpha \neq 0$. 5

$\underline{a} + \frac{\beta}{\alpha} \underline{b} = 0$

$\underline{a} = \frac{-\beta}{\alpha} \underline{b}$ 5

But $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non-zero, non parallel vectors.

$\therefore$ The above result is impossible.

then $\alpha = 0$ 5

Let $\beta \neq 0$,

$\frac{\alpha}{\beta} \underline{a} + \underline{b} = 0$

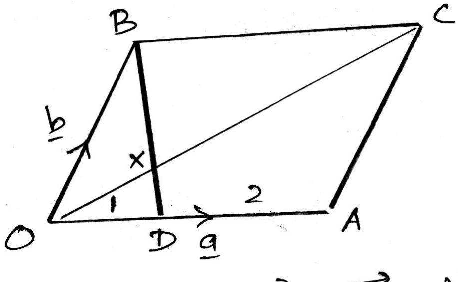
$\frac{\alpha \underline{a}}{\beta} = -\underline{b}$

As $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non-zero, non parallel vectors, above result is impossible (similarly) 5

$\therefore \beta = 0$

$\therefore$ For $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = 0$, $\alpha = 0$ and $\beta = 0$ 5

$\boxed{25}$



$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$.

$\left.\begin{array}{l} OX = \lambda OC \\ OX \parallel OC \end{array}\right\} \overrightarrow{OX} = \lambda \overrightarrow{OC}$

$\left.\begin{array}{l} BX = \mu BD \\ BX \parallel BD \end{array}\right\} \overrightarrow{BX} = \mu \overrightarrow{BD}$

5

$\overrightarrow{OX} = \lambda \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OX} = \lambda (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})$ (5)

$\overrightarrow{OX} = \lambda (\underline{a} + \underline{b})$ (5) ——— (1)

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX}$ (5)

$= \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{OB} + \mu (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD})$

$= \underline{b} + \mu (-\underline{b} + \frac{1}{3}\underline{a})$

$= (1-\mu)\underline{b} + \frac{\mu}{3}\underline{a}$ ——— (2) (5)

By (1) and (2).

$\lambda(\underline{a}+\underline{b}) = (1-\mu)\underline{b} + \frac{\mu}{3}\underline{a}$

$(\lambda - \frac{\mu}{3})\underline{a} + (\lambda - 1 + \mu)\underline{b} = 0$ (5) $\boxed{30}$

As $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non-parallel and non-zero vectors.

$\lambda - \frac{\mu}{3} = 0$ and $\lambda - 1 + \mu = 0$

$\lambda = \frac{\mu}{3}$ — (1) and $\lambda + \mu = 1$ — (2) (5)

By (1) and (2).

$\frac{\mu}{3} + \mu = 1$

$4\mu = 3$

$\mu = 3/4$ (5)

$\lambda = 1/4$ (5)

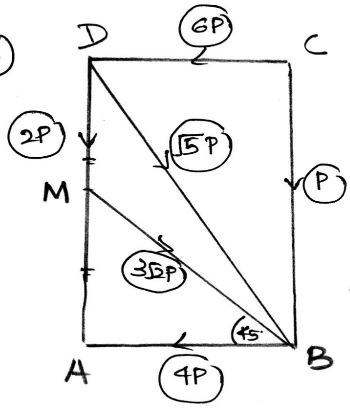
$\therefore OX = \frac{1}{4} OC$

$OX : XC = 1 : 3$ (5)

$BX = \frac{3}{4} BD$.

$BX : XD = 3 : 1$ (5)

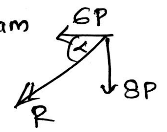
$\boxed{25}$

b) 

$\overleftarrow{X} = 4P + 6P - 3P - P = 6P$ (10) (5)

$\downarrow Y = P + 2P + 3P + 2P$ (10)

$= 8P$ (5)

(5) diagram 

$R = \sqrt{(6P)^2 + (8P)^2}$

$= 10P$ (5)

$\tan\alpha = \frac{8P}{6P} = \frac{4}{3}$ (5)

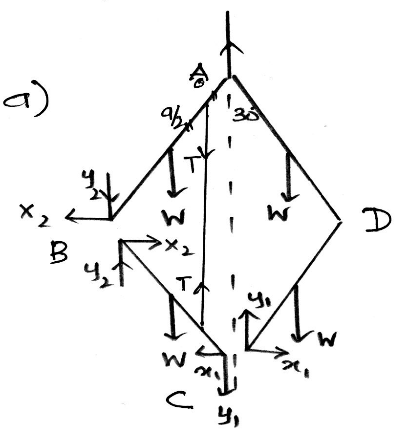
$\overset{\frown}{A},\ G. = P.a - 6P.2a + 3\sqrt{2}P.\frac{a}{\sqrt{2}} + \sqrt{5}P.a.\frac{2}{\sqrt{5}}$ (10)

$= P.a - 12Pa + 3Pa + 2Pa.$ (5)

$= -6Pa$ (5)

There is a couple of moment 6Pa in anticlockwise (5)

$\boxed{70}$

(15) a) 

For the equ.^{m} of AD and CD,

$\overset{\frown}{A}$, (10)

$x_1 \times 4a\cos 30 - 2W.a\sin 30 = 0$

$x_1 . 4a . \frac{\sqrt{3}}{2} = 2W.a.\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}}$ (5)

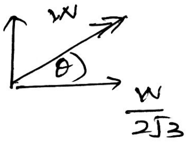
For the equ.^{m} of CD.

$\overset{\frown}{D},\ y_1 \times 2a\sin 30 - x_1 \times 2a\cos 30 - W\times a\sin 30 = 0$ (10)

$y_1 \times 2a.\frac{1}{2} - x_1 \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} - W.a.\frac{1}{2} = 0$

$y_1 = W.$ (5)

Reaction at C. $= \sqrt{\left(\frac{W}{2\sqrt{3}}\right)^2 + W^2}$



$= \frac{W}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$ (5)

$\tan\theta = \frac{W}{W/2\sqrt{3}}$

$\theta = \tan^{-1}(2\sqrt{3})$ (5)

ii) For the equ^m of BC.

$\overset{\curvearrowleft}{B}$ $T \times \frac{3a}{2}\sin 30^\circ - W.\times a\sin 30^\circ - x_1 \times 2a\cos 30$
$- y_1 \times 2a\sin 30^\circ = 0$ (10)

$T \times \frac{3a}{2} \times \frac{1}{2} = W.\frac{a}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W \times 2a \times \frac{1}{2}$

$\frac{3T}{4} = \frac{W}{2} + \frac{W}{2} + W$

$\frac{3T}{4} = 2W$

$T = \frac{8W}{3}$ (5)

iii). For the equ^m of BC,

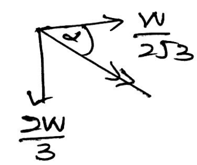
$\rightarrow$ $x_2 = x_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}}.$

$\uparrow$ $y_2 = -T + y_1 + W.$

$y_2 = -\frac{8W}{3} + 2W$

$y_2 = \frac{-2W}{3}$

Reaction at B $= \sqrt{\left(\frac{W}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2W}{3}\right)^2}$



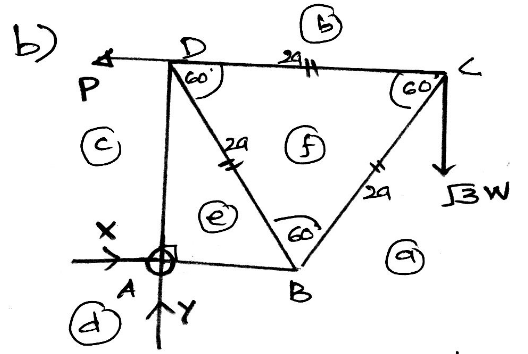
$= \frac{\sqrt{19}}{6}W$ (5)

$\tan\alpha = \frac{2W/3}{W/2\sqrt{3}}$

65

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ (5).

15) b)



For the eq^m of system,

$\curvearrowleft A$ $P \times 2a \cos 30^\circ = \sqrt{3}W \times 2a.$

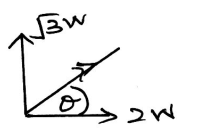
$P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}W$

$P = 2W$ (5)

$\rightarrow$ $X = P = 2W.$

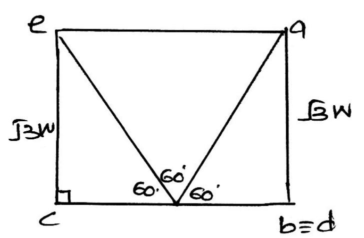
$\uparrow$ $Y = \sqrt{3}W.$

Reaction at A $= \sqrt{(2W)^2 + (\sqrt{3}W)^2}$ (5)



$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5)



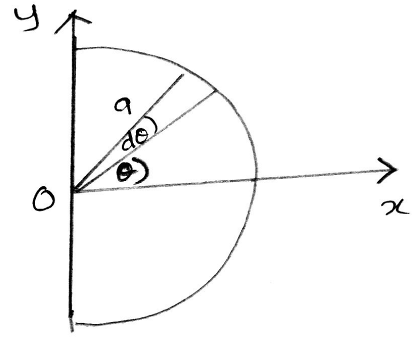
(20)

rod	Magnitude	Tension/Thrust
AB (ea)	$2W$	Thrust
AD (ce)	$\sqrt{3}W$	Thrust
BD (ef)	$2W$	Tension
BC (af)	$2W$	Thrust
CD (bf)	W	Thrust

(25) (25)

85

(16)



By symmetry, the center of mass lies on Ox axis. (5)

ρ is the mass per unit area.

$$x = \frac{2a}{3}\cos\theta$$

$$dm = \frac{1}{2}a^2\, d\theta \rho.$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2a}{3}\cos\theta \times \frac{1}{2}a^2\, d\theta\rho.}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}a^2\, d\theta\rho.} \quad (5) \; (5)$$

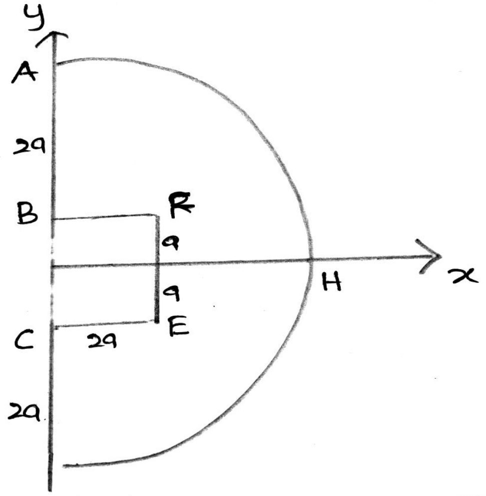
$$= \frac{2a}{3} \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta.}$$

$$= \frac{2a}{3} \frac{\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\left[\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}} \quad (5) \; (5)$$

$$= \frac{2a}{3} \times \frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{4a}{3\pi} \quad (5)$$

$\boxed{30}$



By symmetry, the center of mass lies on the Ox axis. 5

ρ is the mass per unit area.

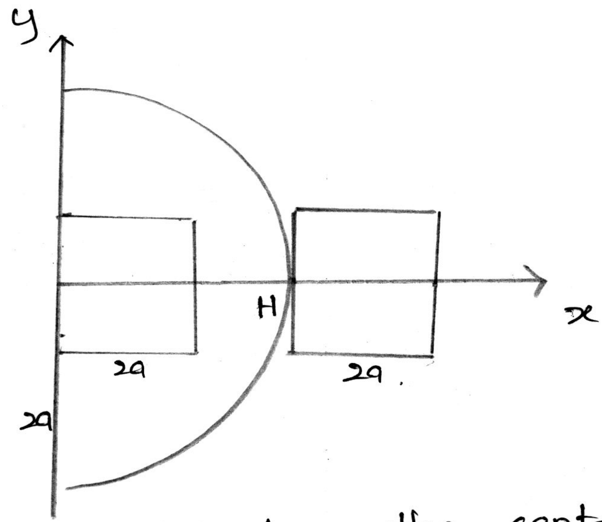
Object	Mass	Distance from O
D	$\frac{\pi(3a)^2}{2} = \frac{9\pi a^2\rho}{2}$ 5	$\frac{4(3a)}{3\pi} = \frac{4a}{\pi}$. 5
□	$4a^2\rho$ 5	a 5
⊐	$\left(\frac{9\pi-8}{2}\right)a^2\rho$ 5	$\bar{x}$

$$\left(\frac{9\pi-8}{2}\right)a^2\rho\ \bar{x} = \frac{9\pi a^2}{2}\rho \times \frac{4a}{\pi} - 4a^2\rho \times a \quad 10$$

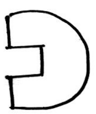
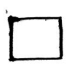
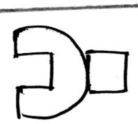
$$\left(\frac{9\pi-8}{2}\right)\bar{x} = (18-4)a$$

$$\bar{x} = \frac{28a}{9\pi-8} \quad 5$$

$\boxed{45}$



By symmetry, the center of mass lies on Ox axis. (5)

Object	mass	Distance from O	
	$\left(\frac{9\pi-8}{2}\right)a^2\rho$	$\frac{28a}{9\pi-8}$	(5)
	$4a^2\rho$.	$4a$	(5)
	$\frac{9\pi a^2}{2}\rho$. (5)	$\bar{x}$	

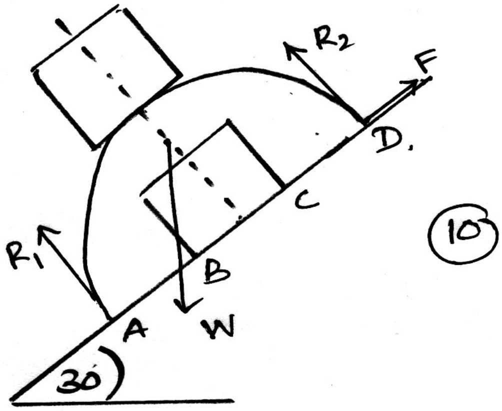
$$\frac{9\pi a^2}{2}\rho\,\bar{x} = \left(\frac{9\pi-8}{2}\right)a^2\rho\left(\frac{28a}{9\pi-8}\right) + 4a^2\rho \times 4a \quad (10)$$

$$\frac{9\pi}{2}\bar{x} = 14a + 16a. \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{60}{9\pi}a$$

$$\bar{x} = \frac{20}{3\pi}a \quad (5)$$

$\boxed{40}$



$\nearrow$ $F = W \sin 30'$ (5)

$\nwarrow$ $R_1 + R_2 = W \cos 30'$ (5)

For the equilibrium,

$\mu \geqslant \left| \dfrac{F}{R_1 + R_2} \right|$ (10)

$\mu \geqslant \dfrac{W \sin 30}{W \cos 30}$

$\mu \geqslant \tan 30'$

$\mu \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (5)

$\boxed{35}$

17) a) i) If $A \cap B = \phi$, then A and B are mutually exclusive events. 5

ii) If $A \cup B = \Omega$, then A and B are exhaustive. 5

$\boxed{10}$

b). $P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega)$ 5

$2a^2 + 2a + 8a - 1 = 1$ 5

$2a^2 + 10a - 2 = 0$

$a^2 + 5a - 1 = 0$ 5

$\left(a + \frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \frac{25}{4}$

$a + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$

$a = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$ 5

As $a > 0$, $a = \frac{\sqrt{29} - 5}{2}$ 5

$\boxed{25}$

c) i) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ 5

$P(A) = P\left[(A \cap B) \cup (A \cap B')\right]$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$ 5 — 1

$(\because (A \cap B) \cap (A \cap B') = \phi)$ 5

$\boxed{15}$

ii) $A \cup B = (A \cup B') \cup B$ 5

As $(A \cap B') \cap B = \phi$

$P(A \cup B) = P(A \cup B') + P(B)$ —— (1)
5

By (1) and (2),

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 5

$\boxed{15}$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$\frac{3}{4} = P(A \cap B) + \frac{2}{5}$ 5

$P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ 5

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{20}$ 5

$= \frac{15 + 10 - 7}{20}$

$= \frac{9}{10}$ 5

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} - \frac{7}{20}$ 5

$= \frac{3}{20}$ 5

$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$ 5

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{20}$ 5

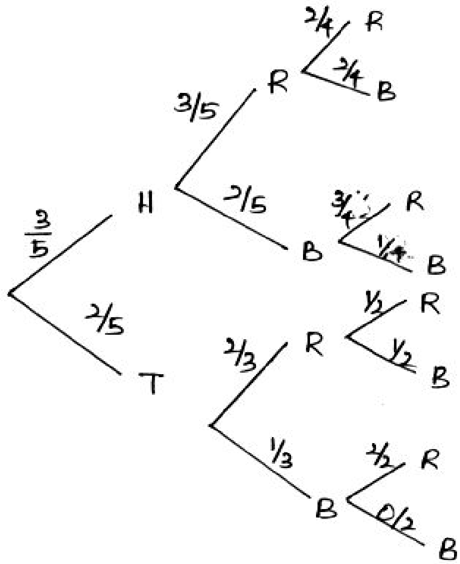
$= \frac{3}{5}$ 5

$\therefore \quad P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$ (5)

$= 1 - \frac{7}{20}$

$= \frac{13}{20}$ (5) $\boxed{55}$

d)



i) $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ (10)

$= \frac{18}{100} + \frac{2}{15}$

$= \frac{47}{150}$ (5)

ii) $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}$ (10)

$= \frac{4}{15}$ (5)

$\boxed{30}$