கணிதம்

தரம் 9

பகுதி I

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

முதலாம் பதிப்பு - 2017
இரண்டாம் பதிப்பு - 2018
மூன்றாம் பதிப்பு - 2019
நான்காம் பதிப்பு - 2020

ISBN 978-955-25-0154-8

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
இல. 35/3, கேரகல வீதி, கந்துபொட, தெல்கொடையில்
அமைந்துள்ள சென்வின் தனியார் நிறுவனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

Published by : Educational Publications Department
Printed by : Sanvin (Pvt) Ltd.
No. 35/3, Keragala Road, Kanduboda, Delgoda.

தேசிய கீதம்

சிறீ லங்கா தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நல்லெழில் பொலி சீரணி
நலங்கள் யாவும் நிறை வான்மணி லங்கா
ஞாலம் புகழ் வள வயல் நதி மலை மலர்
நறுஞ்சோலை கொள் லங்கா
நமதுறு புகலிடம் என ஒளிர்வாய்
நமதுதி ஏல் தாயே
நம தலை நினதடி மேல் வைத்தோமே
நமதுயிரே தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதாரருள் ஆனாய்
நவை தவிர் உணர்வானாய்
நமதேர் வலியானாய்
நவில் சுதந்திரம் ஆனாய்
நமதிளமையை நாட்டே
நகு மடி தனையோட்டே
அமைவுறும் அறிவுடனே
அடல் செறி துணிவருளே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

நமதார் ஒளி வளமே
நறிய மலர் என நிலவும் தாயே
யாமெலாம் ஒரு கருணை அனைபயந்த
எழில்கொள் சேய்கள் எனவே
இயலுறு பிளவுகள் தமை அறவே
இழிவென நீக்கிடுவோம்
ஈழ சிரோமணி வாழ்வுறு பூமணி
நமோ நமோ தாயே - நம் சிறீ லங்கா
நமோ நமோ நமோ நமோ தாயே

ஒரு தாய் மக்கள் நாமாவோம்
ஒன்றே நாம் வாழும் இல்லம்
நன்றே உடலில் ஓடும்
ஒன்றே நம் குருதி நிறம்

அதனால் சகோதரர் நாமாவோம்
ஒன்றாய் வாழும் வளரும் நாம்
நன்றாய் இவ் இல்லினிலே
நலமே வாழ்தல் வேண்டுமன்றோ

யாவரும் அன்பு கருணையுடன்
ஒற்றுமை சிறக்க வாழ்ந்திடுதல்
பொன்னும் மணியும் முத்துமல்ல - அதுவே
யான்று மழியாச் செல்வமன்றோ.

ஆனந்த சமரக்கோன்
கவிதையின் பெயர்ப்பு.

முன்னுரை

அபிவிருத்தியின் உச்சத்தை நோக்கிச் செல்லும் இன்றைய உலகிற்கு மிக நவீன கல்வி முறையே அவசியமானதாகும். இதனால் மனிதப்பண்பும் திறன்களும் மிக்க மாணவர் பரம்பரையொன்றை உருவாக்கிக்கொள்ள முடியும். இம்மகத்தான பணிக்கு வலுவூட்டி உலக சவால்களுக்குத் தைரியமாக முகம்கொடுக்கக்கூடிய மாணவர் பரம்பரையொன்றை உருவாக்குவதற்கு உதவுவது எமது கடமையாகும். எமது நாட்டின் மாணவச் செல்வங்களின் அறிவை மேம்படுத்துவதற்காகவே கற்றல் சாதனங்களைத் தயாரித்து வழங்கும் நடவடிக்கையில் எமது திணைக்களம் ஈடுபட்டுள்ளது.

பாடநூலானது ஓர் அறிவு பெட்டகமாவதுடன் எம்மை இரசனை மிக்கதோர் உலகிற்கு அழைத்தும் செல்கின்றது. அத்துடன் இப்பாடநூல்களானது உங்களது பகுத்தறிவை அதிகரிக்கும் ஓர் ஒளியாக இருந்து பல திறன்களை அடைய உதவுகின்றது. இப்பாடநூல்களானது பாடசாலைக் காலம் முடிவடைந்த பின்னரும் அளவில்லா நினைவுகளைத் தந்து எப்போதும் உங்களுடன் கைகோர்த்து காணப்படும் பொக்கிசங்களாகும். இப்பாடநூல்களின் மூலம் நீங்கள் மேலும் பல அறிவுப் பரிமாணங்களை அடைய அர்ப்பணிப்புடன் செயற்பட வேண்டும்.

இலவசக் கல்வியின் பெறுமதிமிக்க ஒரு பரிசாக இப்பாடநூல் உங்களின் கரங்களுக்கு வழங்கப்படுகிறது. அரசாங்கம் பாடநூல்களுக்காகச் செலவிடுகின்ற பெருந்தொகைப் பணத்திற்குரிய பெறுமதியை மாணவர்களாகிய உங்களால் மட்டுமே வழங்க முடியும். இப்பாடநூல்களைப் பயன்படுத்தி அறிவும் பண்பும் மிகுந்த நற்பிரஜைகளாக இந்த உலகத்தை ஒளிமயமாக்குவதற்கு நாட்டின் அனைத்து மாணவர்களுக்கும் தேவையான பலமும் வலிமையும் கிடைக்க வேண்டுமென உளமாற வாழ்த்துகின்றேன்.

இப்பாடநூலாக்கத்திற்கு எண்ணற்ற வளப் பங்களிப்பை வழங்கிய எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழு அங்கத்தவர்களுக்கும் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள உத்தியோகத்தர்களுக்கும் எனது உளம் நிறைந்த நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

பீ. என். அயிலப்பெரும
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல
2020.06.26

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

பீ. என். அயிலப்பெரும	-	கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி	-	ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி) கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

அ. குலரத்தினம்	-	பிரதி ஆணையாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர் குழு

என். வாகீசமூர்த்தி	-	ஓய்வு பெற்ற கல்விப் பணிப்பாளர்
ஆர். எஸ். ஈ. புஸ்பராஜன்	-	ஓய்வு பெற்ற உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர்
எம். எஸ். எம். ரபீது	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரிய ஆலோசகர்
யூ. விவேகானந்தன்	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
கலாநிதி ஜே. கே. ரத்னாயக்கா	-	சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர் கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.
எச்.எம்.ஜயசேன.	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, அம்பலாங்கொட.
வி.வி.ஆர்.விதாரம	-	ஆசிரிய ஆலோசர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, தெகியோவிட்ட.
டபிள்யூ. எம். டபிள்யூ.சீ. வலிசிங்க	-	உதவிப் பணிப்பாளர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, புத்தளம்.
அஜித் ரணசிங்க	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்விப் பணிமனை, கேகாலை.
வீ.எம்.பி.லால் விஜயகாந்த	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் சாந்த தோமஸ் கல்லூரி கல்கிஸ்சை.
அனுர வீரசிங்க	-	ஆசிரிய ஆலோசகர் (பிரிவேனா)

பதிப்பாசிரியர் குழு

கலாநிதி ரொமைன் ஜயவர்த்தன	-	*சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, கொழும்புப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி டீ.கே.மல்லவ ஆராச்சி	-	*சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, களனிப் பல்கலைக்கழகம்.*
கலாநிதி நளின் கனேகொட	-	*சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, ஜயவர்தனபுரப் பல்கலைகழகம்.*
எஸ். இராஜேந்திரம்	-	*சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.*
ஸ்ரீமா தசநாயக்க	-	*உதவிப் பணிப்பாளர் கணிதக் கிளை, கல்வி அமைச்சு.*
பீ.ஜெகத்குமார	-	*சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.*
அ.குலரத்தினம்	-	*பிரதி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*
தனுஜா மைத்திரி விதாரண	-	*உதவி ஆணையாளர். கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

மொழி பதிப்பாசிரியர்

எம். எம். நிலாப்தீன்	-	*ஆசிரிய ஆலோசகர் வலயக் கல்வி அலுவலகம் பொலன்னறுவை.*

சரவை பார்ப்பு

பீ. ராஜசேகரன்	-	*ஆசிரிய ஆலோசகர் (ஓய்வு நிலை)*

கணினி வடிவமைப்பு

முத்தையா காந்தரூபன்	-	*கணினி வடிவமைப்பாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

அட்டைப்படமும் வடிவமைப்பும்

சத்திவேல் சத்தியசீலன்	-	*கணினி வடிவமைப்பாளர் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.*

பொருளடக்கம்

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழுக்களின் அறிவுறுத்தல்

2015 ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைக்கு வரும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப இப்பாடநூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. பாடநூல் மாணவர்களுக்காகவே தயாரிக்கப்படுகின்றது. எனவே நீங்கள் தனித்து வாசித்தேனும் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க வகையில் எளிமையாகவும் விபரமாகவும் அதனைத் தயாரிக்க முயற்சித்தோம்.

பாட எண்ணக்கருக்களைக் கவர்ச்சியான வகையில் முன்வைப்பதற்காகவும் உறுதிபடுத்துவதற்காகவும் விபரித்தல், செயற்பாடு மற்றும் உதாரணங்கள் போன்று வெவ்வேறு முறைகளைப் பின்பற்றினோம். பயிற்சிகளைச் செய்வதன் விருப்பு விருத்தியடையும் வகையில் எளிமையிலிருந்து கடினம் வரை முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணிதப் பாடத்துக்குரிய எண்ணக்கருக்களைக் குறிக்கும் சொற்களை அரச கரும மொழித் திணைக்களம் தயாரித்துள்ள கணிதப் பாடக் கலைச் சொல் அகராதிக்கேற்பப் பயன்படுத்தினோம்.

பாடத்திட்டத்தில் தரம் 11 இற்குரிய பாடப்பகுதிகளைக் கற்பதற்கு, முன்னைய தரங்களில் நீங்கள் கற்ற சிற்சில விடயங்கள் தேவைப்படும். எனவே அம்முன்னறிவை ஞாபகப்படுத்துவதற்காக மீட்டற் பயிற்சிகள் தேவையான அத்தியாத்தின் தொடக்கத் திலும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின்மூலம் தரம் 11 இற்குரிய பாடவிடயங்களுக்காக நீங்கள் தயார்படுத்தப்படுவீர்கள்.

வகுப்பில் ஆசிரியர் கற்பிப்பதற்கு முன்னர் நீங்கள் இவ்வத்தியாயங்களை வாசிப்பதன் மூலமும் ஒவ்வோர் அத்தியாத்தில் வரும் மீட்டற் பயிற்சிகளை செய்வதன் மூலமும் இப்பாடநூலைப் பயன்படுத்தி உச்ச பயன்களைப் பெறலாம்.

கணிதக் கல்வியானது மகிழ்ச்சிகரமானதாகவும் பயனுடையதாகவும் அமைய நாங்கள் ஆசி கூறுகின்றோம்.

நூலாக்கக் குழுவினர்.

1 எண் கோலங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- இரு அடுத்துவரும் உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் சமமாக உள்ள ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பைக் காண்பதற்கும்
- ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு தரப்படும்போது எண் கோலத்தை எழுதுவதற்கும்
- எண் கோலங்களுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

எண் கோலங்களின் அறிமுகம்

கீழே சில எண் கோலங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

i. 3, 3, 3, 3, 3, ...
ii. 2, 4, 6, 8, 10, ...
iii. 5, 8, 11, 14, 17, ...
iv. 2, 4, 8, 16, 32, ...
v. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...
vi. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

முதலாம் எண் கோலம் மிகவும் எளிதானது. அக்கோலத்தில் இருக்கும் எல்லா எண்களும் 3 ஆகும்.

இரண்டாம் எண் கோலத்தில் முதலாவது எண் 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் இருக்கும் ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்ணுடன் 2 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

மூன்றாம் எண் கோலத்தில் முதலாவது எண் 5 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் இருக்கும் ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்ணுடன் 3 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

நான்காம் எண் கோலத்தில் முதலாவது எண் 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் இருக்கும் ஒவ்வோர் எண்ணும் அதற்கு முந்திய எண்ணை 2 இனால் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

ஐந்தாம் எண் கோலத்திற்கும் ஆறாம் எண் கோலத்திற்கும் அவற்றுக்கே உரிய இயல்புகள் உள்ளன.

எண் கோலங்களில் உள்ள எண்கள் அந்த எண் கோலத்தின் உறுப்புகள் எனப்படும். உதாரணமாக மேற்குறித்த முதலாவது எண் கோலத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 3 ஆகும்.

இரண்டாம் எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்பு 2 உம் இரண்டாம் உறுப்பு 4 உம் மூன்றாம் உறுப்பு 6 உம் ஆகும். இந்த எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னால் இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் 2 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

மூன்றாம் எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்பு 5 உம் இரண்டாம் உறுப்பு 8 உம் மூன்றாம் உறுப்பு 11 உம் ஆகும். இந்த எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னால் இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் 3 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது.

நான்காம் எண் கோலத்தில் முதலாம் உறுப்புக்குப் பின்னால் இருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்பை 2 இனால் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறாக ஐந்தாம் எண் கோலத்தினதும் ஆறாம் எண் கோலத்தினதும் உறுப்புகள் பெறப்படும் விதங்களையும் விவரிக்கத்தக்கதாக இருக்கின்ற போதிலும் அவை ஓரளவுக்குக் கடினமாக இருக்கலாம்.

மேற்குறித்த எண் கோலங்களில் உறுப்புகள் காற்புள்ளிகளினால் வேறாக்கப் பட்டிருப்பதையும் இறுதியில் மூன்று குற்றுகள் இடப்பட்டிருப்பதையும் அவதானிக்க. இது பொதுவாக எண் கோலங்கள் எழுதப்படும் விதமாகும். மூன்று குற்றுகளும் கோலம் தொடர்ந்து செல்வதைக் காட்டுகின்றன.

கணிதத்தில் கோலம் என்னும் பதத்திற்குப் பதிலாகத் **தொடரி** என்னும் பதம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. அதற்கேற்ப மேலே ஆறு எண் தொடரிகள் (அதாவது சுருக்கமாகக் கூறினால் தொடரிகள்) உள்ளன. தொடரியின் உறுப்புகளின் ஒழுங்குமுறை முக்கியமானதாகும். ஓர் உதாரணமாக

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

என்னும் தொடரியிலும்

$$1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 6, \ldots$$

என்னும் தொடரியிலும் ஒரே எண்கள் இருந்தாலும் அத்தொடரிகள் ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட தொடரிகளாகும்.

மேற்குறித்த தொடரிகளில் சில முதல் உறுப்புகள் மாத்திரம் அவற்றின் கோலத்தை விவரிக்கின்றன. எனினும் ஒரு தொடரியின் முதல் சில உறுப்புகளை மாத்திரம் கொண்டு அத்தொடரியின் கோலத்தை ஊகித்தல் உகந்ததன்று. ஓர் உதாரணமாக

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

என்னும் எண் கோலத்தின், அதாவது தொடரியின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளையும் மாத்திரம் எழுதி (அதாவது 1, 2, 3, 4, 5, ... ஐ எழுதி) அதன் அடுத்த உறுப்பு யாதென வினவினால் அது 6 என்னும் பிழையான விடை கிடைக்கலாம். ஆகவே ஒரு தொடரியின் முதல் சில உறுப்புகளைத் தந்து அதன் அடுத்த உறுப்பை (அல்லது சில உறுப்புகளை) க் கேட்டல் கணிதரீதியில் சரியானதன்று.

மேலே தரப்பட்டுள்ள ஆறு தொடரிகளில் இரண்டாம் தொடரியினதும் மூன்றாம் தொடரியினதும் சிறப்பியல்பை (அல்லது இயல்பை) விவரிக்கலாம்.

இரண்டாம் தொடரியில் முதல் உறுப்புக்குப் பின்னால் வரும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் மாறாப் பெறுமானம் 2 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இதனைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் காட்டலாம்.

$$2 \underbrace{\qquad}_{+2} 4 \underbrace{\qquad}_{+2} 6 \underbrace{\qquad}_{+2} 8 \underbrace{\qquad}_{+2} 10$$

மூன்றாம் தொடரியில் முதல் உறுப்புக்குப் பின்னால் வரும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்புடன் மாறாப் பெறுமானம் 3 ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இதனைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் காட்டலாம்.

$$5 \underbrace{\qquad}_{+3} 8 \underbrace{\qquad}_{+3} 11 \underbrace{\qquad}_{+3} 14 \underbrace{\qquad}_{+3} 17$$

இவ்விரு தொடரிகளினதும் உறுப்புகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் மாறாப் பெறுமானமாக இருப்பது சிறப்பியல்பாகும்.

யாதாயினும் ஓர் உறுப்பிலிருந்து (முதல் உறுப்பைத் தவிர) அதற்கு முந்திய உறுப்பைக் கழிக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானம் ''மாறிலி'' ஆகும். அதாவது மாறிலி என்பது மாறாப் பெறுமானம் ஆகும்.

தொடரி 2, 4, 6, 8, 10, ... இல் இம்மாறிலியின் பெறுமானம் 2 ஆகும்.

($4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 2$ ஆகையால்).

5, 8, 11, 14, 17, ... இல் இம்மாறிலியின் பெறுமானம் 3 ஆகும்.

($8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14 = 3$ ஆகையால்).

இத்தகைய இரு உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாப் பெறுமானமாக உள்ள தொடரிகள் பற்றி மேலும் கூறுவோம்.

இம்மாறாப் பெறுமானம் **பொது வித்தியாசம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப,

பொது வித்தியாசம் = முதல் உறுப்பல்லாத யாதாயினுமோர் உறுப்பு – அதற்கு முன்னைய உறுப்பு

மேலே தொடக்கத்தில் உள்ள தொடரி 3, 3, 3, 3, 3, ... ஆகும். இதற்கும் இவ்வியல்பு இருப்பதை அவதானிக்கலாம்.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 \\ & +0 & & +0 & & +0 & & +0 & \end{array}$$

இங்கு கூட்டப்படும் மாறாப் பெறுமானம் (அதாவது பொது வித்தியாசம்) 0 எனக் கருதலாம்.

அவ்வியல்பு உள்ள வேறொரு தொடரி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{array}{ccccccccc} 17 & & 12 & & 7 & & 2 & & -3\ldots \\ & -5 & & -5 & & -5 & & -5 & \end{array}$$

அதன் முதல் உறுப்பு 17 ஆகும். அதன் பின்னால் வரும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்திய உறுப்பிலிருந்து 5 ஐக் கழிப்பதன் மூலம், அதாவது முந்திய உறுப்புடன் (-5) ஐக் கூட்டுவதன் மூலம் பெறப்படுகின்றது. இதற்கேற்ப இத்தொடரியின் பொது வித்தியாசம் (-5) ஆகும். அதாவது

பொது வித்தியாசம் $= 12 - 17 = 7 - 12 = 2 - 7 = -3 - 2 = -5$.

இத்தகைய ஒரு பொது வித்தியாசம் உள்ள ஒரு தொடரியின் பொது வித்தியாசத்தின் பெறுமானமும் முதல் உறுப்பும் அறியப்பட்டிருப்பின், அதன் சில உறுப்புகளை எளிதாக எழுதலாம். அதற்குச் சில உதாரணங்களைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

உதாரணம் 1

முதல் உறுப்பு 4 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் 3 ஆகவும் உள்ள தொடரியின் முதல் 3 உறுப்புகள் முறையே 4, 7, 10 ஆகும்.

உதாரணம் 2

முதல் உறுப்பு 7 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் -4 ஆகவும் உள்ள தொடரியின் முதல் 5 உறுப்புகள் முறையே $7, 3, -1, -5, -9$ ஆகும்.

இவ்வாறு பொது வித்தியாசமும் முதல் உறுப்பும் தெரிந்த தொடரியின் சில உறுப்புகளை எளிதாக எழுதலாம். ஆனால் அதன் 50 ஆம் உறுப்பை அல்லது 834 ஆம் உறுப்பைக் காணல் எளிதானதன்று. அதற்குக் காரணம் 50, 834 போன்ற எண்கள் பெரிதாக இருப்பதாகும். ஆகவே இவ்வாறான பெரிய உறுப்பைக் காண்பதற்கு ஒரு முறையைக் காணவேண்டும். அதற்காகப் பொது உறுப்பைக் காண வேண்டும். அதை எவ்வாறு காணலாம் எனப் பார்ப்போம்.

ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு

முதலில் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் காட்டுவதற்கு ஒரு குறிப்பீட்டைப் பயன் படுத்துவோம். அதற்காக ஒரு தரப்பட்டுள்ள தொடரியின்

முதல் உறுப்பை T_1 இனாலும்
இரண்டாம் உறுப்பை T_2 இனாலும்
மூன்றாம் உறுப்பை T_3 இனாலும் காட்டுவோம்.

உதாரணமாகத் தொடரி

5, 11, 17, 23, ... இல்

முதலாம் உறுப்பு $= T_1 = 5$

இரண்டாம் உறுப்பு $= T_2 = 11$

மூன்றாம் உறுப்பு $= T_3 = 17$

நான்காம் உறுப்பு $= T_4 = 23$
என எழுதலாம்.

கணிதத்தில் நாம் பெரும்பாலும் ஒரு குறித்த தொடரியின் n ஆம் உறுப்பைக் கருதுவோம். இங்கு n இன் மூலம் யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் பெறுமானம் காட்டப்படுகின்றது. அதற்குக் காரணம் n எடுக்கத்தக்க பெறுமானங்கள் 1, 2, 3, ... ஆகிய நேர் நிறைவெண்களாக இருப்பதாகும். இங்கு $\frac{1}{2}$ ஆம் உறுப்பு, -4 ஆம் உறுப்பு, 3.5 ஆம் உறுப்பு ஆகியவற்றுக்குக் கருத்தில்லை. இவ்வாறு ஓர் n பெறுமானத்தைக் கருதும்போது அதனை ஒத்த n ஆம் உறுப்பு T_n இனால் காட்டப்படும். இந்த T_n ஆனது **பொது உறுப்பு** எனப்படும்.

1.1 பொது உறுப்பு தரப்படும்போது அதிலிருந்து தொடரியைக் காணல்

இதற்கு முன்னர் ஒரு தொடரியின் உறுப்புகளின் குறிப்பீடுகளையும் பொது உறுப்பின் குறியீட்டையும் பார்த்தோம். இப்போது சில உதாரணங்களினூடாகத் தொடரியின் பொது உறுப்பு தரப்படும்போது அத்தொடரியைக் காண்பதற்கும் கேட்கப்படும் உறுப்புகளைக் காண்பதற்கும் கற்போம். இதனைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

பொது உறுப்பு $2n + 3$ ஆகவுள்ள எண் தொடரியின்
(i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
(ii) இருபதாம் உறுப்பைக் காண்க.
(iii) 123 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?
(iv) $(n + 1)$ ஆம் உறுப்பை n இன் சார்பில் தருக.

(i) பொது உறுப்பு $2n + 3$ ஆகையால்

$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது, முதலாம் உறுப்பு $(2 \times 1) + 3 = 2 + 3 = 5$
$n = 2$ ஆக இருக்கும்போது, இரண்டாம் உறுப்பு $(2 \times 2) + 3 = 4 + 3 = 7$
$n = 3$ ஆக இருக்கும்போது, மூன்றாம் உறுப்பு $(2 \times 3) + 3 = 6 + 3 = 9$
$\therefore$ கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 5, 7, 9 ஆகும்.

(ii) $n = 20$ ஐ $2n + 3$ இல் பிரதியிடும்போது 20 ஆம் உறுப்புக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ இருபதாம் உறுப்பு $= (2 \times 20) + 3 = 40 + 3$

$= 43$

(iii) 123 ஆனது n ஆம் உறுப்பு எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $2n + 3 = 123$

$$2n + 3 - 3 = 123 - 3$$

$$2n = 120$$

$$n = \frac{120}{2}$$

$$= 60$$

$\therefore$ 123 ஆனது இக்கோலத்தின் 60 ஆம் உறுப்பாகும்.

(iv) $n + 1$ ஆம் உறுப்பைப் பெறுவதற்கு n இற்குப் பதிலாக $(n + 1)$ ஐப் பிரதியிடுவோம்.

$$\text{T} = 2n + 3$$

$$\text{T}_{n+1} = 2\,(n + 1) + 3$$

$$= 2n + 2 + 3$$

$$= 2n + 5$$

$\therefore$ $(n + 1)$ ஆம் உறுப்பு $2n + 5$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$56 - 4n$ ஆனது பொது உறுப்பாக உள்ள எண் தொடரியில்

(i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
(ii) 12 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
(iii) 0 இந்த எண் தொடரியின் ஓர் உறுப்பெனக் காட்டுக.
(iv) 18 இந்த எண் தொடரியின் ஓர் உறுப்பன்று எனக் காட்டுக.

(i) பொது உறுப்பு $56 - 4n$ ஆகையால்

$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது, முதலாம் உறுப்பு $= 56 - (4 \times 1) = 56 - 4 = 52$

$n = 2$ ஆக இருக்கும்போது, இரண்டாம் உறுப்பு $= 56 - (4 \times 2) = 56 - 8 = 48$

$n = 3$ ஆக இருக்கும்போது, மூன்றாம் உறுப்பு $= 56 - (4 \times 3) = 56 - 12 = 44$

$\therefore$ கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 52, 48, 44 ஆகும்.

(ii) இத்தொடரியின் 12 ஆம் உறுப்பு $= 56 - 4 \times 12$
$= 56 - 48$
$= 8$

(iii) இந்த எண் தொடரியில் 0 ஓர் உறுப்பெனின்,

$56 - 4n = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$56 - 4n + 4n = 4n$ (இரு பக்கங்களுடனும் $4n$ ஐக் கூட்டல்)

$$\frac{56}{4} = \frac{4n}{4}$$

$$14 = n$$

$$n = 14$$

$\therefore$ 0 ஆனது இத்தொடரியின் 14 ஆம் உறுப்பாகும்.

(iv) இத்தொடரியில் 18 ஓர் உறுப்பெனின்,

$56 - 4n = 18$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

அப்போது $56 - 4n + 4n = 18 + 4n$

$$56 - 18 = 18 - 18 + 4n$$

$$38 = 4n$$

$$n = 9\frac{1}{2}$$

18 ஆனது தொடரியின் ஓர் உறுப்பெனின், n இன் பெறுமானம் ஒரு நிறைவெண்ணாக இருத்தல் வேண்டும். $n = 9\frac{1}{2}$ ஆகையால் 18 ஆனது இந்த எண் தொடரியின் ஓர் உறுப்பன்று.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு	$n = 1$ ஆக இருக்கும்போது முதல் உறுப்பு	$n = 2$ ஆக இருக்கும்போது இரண்டாம் உறுப்பு	$n = 3$ ஆக இருக்கும்போது மூன்றாம் உறுப்பு	எண் கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள்
$3n + 2$	$(3 \times 1) + 2 = 5$	$(3 \times 2) + 2 = 8$	$(3 \times 3) + 2 = 11$	..., ..., ...
$5n - 1$	$(5 \times 1) - 1 = 4$	....	....	..., ..., ...
$2n + 5$	....	....	....	..., ..., ...
$20 - 2n$	....	....	....	..., ..., ...
$50 - 4n$	....	....	....	..., ..., ...
$35 - n$	....	....	....	..., ..., ...

2. ஓர் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பு $4n - 3$ ஆகும். அக்கோலத்தின்
   (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
   (ii) 12 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
   (iii) 97 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?
   (iv) 75 இத்தொடரின் ஓர் உறுப்பன்று எனக் காட்டுக.

3. ஓர் எண் கோலத்தின் n ஆம் உறுப்பு $7n + 1$ ஆகும். அக்கோலத்தின்
   (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
   (ii) 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
   (iii) 36 எத்தனையாம் உறுப்பாகும்?
   (iv) $n + 1$ ஆம் உறுப்பை n இன் சார்பில் காட்டுக.

4. பொது உறுப்பு $50 - 7n$ ஆன எண் கோலத்தின்
   (i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
   (ii) 10 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
   (iii) $n + 1$ ஆம் உறுப்பை n இன் சார்பில் காட்டுக.
   (iv) 7 ஆம் உறுப்புக்குப் பின்னால் கிடைக்கும் உறுப்புகள் மறை எண்கள் எனக் காட்டுக.

1.2 ஒரு எண் தொடரியின் பொது உறுப்பைக் (T_n) காணல்

T_n இற்கு n சார்பில் ஒரு கோவையைப் பெறுதல் எமது நோக்கமாகும். அப்போது ஒரு தொடரியின் எந்தவோர் உறுப்பையும் அக்கோவையைப் பயன்படுத்தி எளிதாகக் காணலாம். இவ்வாறு ஒரு கோவையைப் பெறத்தக்க விதத்தை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

பொது வித்தியாசம் உள்ள ஒரு தொடரி 5, 11, 17, 23, ... இன் 80 ஆம் உறுப்பைக் காணவேண்டும் எனக் கொள்வோம். அதாவது, T_{80} ஐக் காண வேண்டும். அதற்காகப் பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள கோலத்தை அவதானிப்போம்.

n	T_n	பொது வித்தியாசம் 6, n ஆகியவற்றின் சார்பில் T_n ஐ எழுதத்தக்க விதம்
1	5	$6 \times 1 - 1$ அல்லது $5 + 0 \times 6$
2	11	$6 \times 2 - 1$ அல்லது $5 + 1 \times 6$
3	17	$6 \times 3 - 1$ அல்லது $5 + 2 \times 6$
4	23	$6 \times 4 - 1$ அல்லது $5 + 3 \times 6$
5	29	$6 \times 5 - 1$ அல்லது $5 + 4 \times 6$

மேற்குறித்த அட்டவணையில் நிரல் 3 இல் உள்ள $6 \times 1 -1, 6 \times 2 -1, 6 \times 3 -1, \ldots$ கோவைகள் ஏன் அவ்வாறு எழுதப்பட்டுள்ளன என்பது உங்களுக்குப் பிரச்சினையாக இருக்கலாம். விசேடமாக 1 ஐக் கழிப்பதற்கான காரணம் விளக்கமற்று இருக்கலாம். அதனைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

தரப்பட்டுள்ள தொடரி 5, 11, 17, 23, ... இல் பொது வித்தியாசம் 6 ஆகையால் முதலில் தரப்பட்டுள்ள தொடரியையும் அதற்குக் கீழே 6 இன் சில மடங்குகளையும் எழுதுவோம்.

5, 11, 17, 23, 29, ...

6, 12, 18, 24, 30, ...

6 இன் மடங்குகளிலிருந்து 1 வீதம் கழித்து தொடரி பெறப்படுவதை நீங்கள் அவதானிக்கலாம்.

தொடரியின் 1 ஆம் உறுப்பு = 6 இன் முதலாம் மடங்கு −1
தொடரியின் 2 ஆம் உறுப்பு = 6 இன் இரண்டாம் மடங்கு −1
தொடரியின் 3 ஆம் உறுப்பு = 6 இன் மூன்றாம் மடங்கு −1

என்றவாறு எழுதலாம்.

இதற்கேற்ப

தொடரியின் n ஆம் உறுப்பு = 6 இன் n ஆம் மடங்கு −1

$$\therefore \; T_n = 6n - 1$$

அட்டவணைக்கேற்ப T_{80} ஆனது $6 \times 80 - 1 = 479$ ஆகும். அதாவது

$T_{80} = 6 \times 80 - 1 = 479$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப 80 ஆம் உறுப்பு 479 ஆகும். மேலும் இத்தொடரியின் பொது உறுப்பு T_n இற்கான கோவையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$T_n = 6n - 1$$

இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இத்தொடரியின் எந்தவோர் உறுப்பையும் காணலாம். உதாரணமாகத் தரப்பட்டுள்ள தொடரியின் 24 ஆம் உறுப்பைக் காண்பதற்குச் சூத்திரத்தில் $n = 24$ எனப் பிரதியிட வேண்டும். அப்போது

$T_{24} = 6 \times 24 - 1 = 143$ ஆகும்.

$\therefore$ தொடரியின் 24 ஆம் உறுப்பு 143 ஆகும்.

இதனை மேலும் சில உதாரணங்களூடாகப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

முதல் நான்கு உறுப்புகள் 15, 19, 23, 27 ஆன பொது வித்தியாசம் உள்ள தொடரியின் n ஆம் உறுப்பு T_n இற்கு ஒரு கோவையைக் காண்போம்.

இங்கு பொது வித்தியாசம் = 19 − 15 = 4 ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தொடரியின் முதற் சில உறுப்புகளையும் அதற்குக் கீழே 4 இன் சில மடங்குகளையும் (நேர் நிறைவெண் மடங்குகள்) எழுதுவோம்.

15, 19, 23, 27, ...
4, 8, 12, 16, ...

ஒவ்வொரு நான்கின் மடங்குடனும் 11 வீதம் கூட்டும்போது தரப்பட்டுள்ள தொடரி கிடைக்கும் என்பது தெளிவாகும்.

அதற்கேற்ப பொது உறுப்பு T_n இற்கான சூத்திரம்

$T_n = 4n + 11$

எனக் கிடைக்கும். இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, இத்தொடரியின் 100 ஆம் உறுப்பைக் காண்போம்.

$T_{100} = 4 \times 100 + 11 = 411$

இப்போது பொது வித்தியாசம் ஒரு மறைப் பெறுமானமாகக் குறையும் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தொடரியைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 2

10, 7, 4, ... இன் பொது வித்தியாசம் $= 7 - 10 = -3$ ஆகும்.

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள தொடரியின் உறுப்புகளையும் -3 இன் மடங்குகளையும் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாக எழுதுவோம்.

10, 7, 4, ...
$-3, -6, -9, ...$

ஒவ்வொரு -3 இன் மடங்குடனும் 13 வீதம் கூட்டும்போது தொடரியின் உறுப்புகள் கிடைப்பதை அவதானிக்கலாம்.

ஆகவே $T_n = -3n + 13$ எனப் பொது உறுப்பை எழுதலாம்.

அவ்வாறு இல்லாவிட்டால், முதலில் ஒரு நேர் உறுப்பு கிடைக்குமாறு $T_n = 13 - 3n$ எனவும் பொது உறுப்பை எழுதலாம்.

ஓர் உதாரணமாக இத்தொடரியின் 30 ஆம் உறுப்பைக் காண $T_n = 13 - 3n$ இல் $n = 30$ எனப் பிரதியிட வேண்டும். அப்போது
$T_{30} = -3 \times 30 + 13 = -77$ எனக் கிடைக்கும்.
எனவே 30 ஆம் உறுப்பு -77 ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அட்டவணையைப் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

கோலம்	இரு அடுத்துவரும் உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம்	கோலத்தை உருவாக்குவதுடன் தொடர்புபட்ட மடங்கு
(i) 5, 8, 11, 14,...	$8 - 5 = 3$	3
(ii) 10, 17, 24, 31, ...		
(iii) $2\frac{1}{2}$, 4, $5\frac{1}{2}$, 7, ...		
(iv) 20, 17, 14, 11, ...		
(v) 50, 45, 40, 35, ...		
(vi) 0.5, 0.8, 1.1, 1.4, ...		

2. 10, 17, 24, 31, ... என்னும் எண் கோலத்தைக் கொண்டு அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

உறுப்பு ஒழுங்குமுறை	உறுப்பு	பொது உறுப்பைப் பெறல்
1 ஆம் உறுப்பு	10	$7 \times 1 + ...$
2 ஆம் உறுப்பு	17	$7 \times 2 + ...$
3 ஆம் உறுப்பு	24	$... + ...$
4 ஆம் உறுப்பு	31	$... + ...$
n ஆம் உறுப்பு	....	$... + ... = ...$

3. பின்வரும் தொடரிகளின் பொது உறுப்பைக் காண்க.
   a. 1, 4, 7, 10, ...
   b. 1, 7, 13, 19, ...
   c. 9, 17, 25, 33, ...
   d. 4, 10, 16, 22, ...
   e. 22, 19, 16, 13, ...
   f. 22, 20, 18, 16, ...

1.3 எண் கோலங்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும் எண் கோலங்களைப் பயன்படுத்திப் பல்வேறு கணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம்.

உதாரணம் 1

தூரம் ஓடுதலில் பயிற்சி பெறும் ஒரு விளையாட்டு வீரர் தினமும் பயிற்சியில் ஈடுபடுகின்றார். அவர் முதல் நாள் 500 m தூரம் ஓடும் அதே வேளை அதன் பின்னர் ஒவ்வொரு நாளும் முந்திய நாளிலும் பார்க்க 100 m வீதம் கூடுதலாக ஓடுகின்றார்.

(i) அவர் முதல் மூன்று நாட்களிலும் ஓடும் தூரங்களை வேறுவேறாக எழுதுக.
(ii) நாட்களின் எண்ணிக்கைக்கேற்ப ஓடும் தூரங்களுக்குப் பொது உறுப்பைக் காண்க.
(iii) 20 ஆம் நாளில் அவர் ஓடும் தூரத்தைக் காண்க.
(iv) அவர் எத்தனையாம் நாளில் 3 km தூரம் ஓடுகின்றார்?

(i) முதல் நாளில் ஓடும் தூரம் = 500 m
இரண்டாம் நாளில் ஓடும் தூரம் = 500 m + 100 m = 600 m
மூன்றாம் நாளில் ஓடும் தூரம் = 500 m + 100 m + 100 m = 700 m
எண் கோலத்தின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 500, 600, 700

(ii) நாட்களின் எண்ணிக்கை n எனக் கொள்வோம்.
ஓடும் தூரங்களைக் காட்டும் எண் கோலத்திற்கேற்ப அது 100 இன் மடங்குகளில் உருவாகுகின்றது.
$\therefore$ பொது உறுப்பு $T_n = 100n + 400$

(iii) 20 ஆம் நாளில் ஓடும் தூரம் 20 ஆம் உறுப்பினால் காட்டப்படும் என்பது தெளிவாகும்.

∴ எண் கோலத்தின் 20 ஆம் உறுப்பு $T_{20} = (100 \times 20) + 400$

$= 2000 + 400$

$= 2400$ m

$= 2.4$ km

∴ 20 ஆம் நாளில் ஓடும் தூரம் 2.4 km ஆகும்.

(iv) 3 km = 3000 m.

n ஆம் நாளில் 3000 m ஓடுகிறார் எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $100n + 400 = 3000$

$$100n + 400 - 400 = 3000 - 400$$

$$100\,n = 2600$$

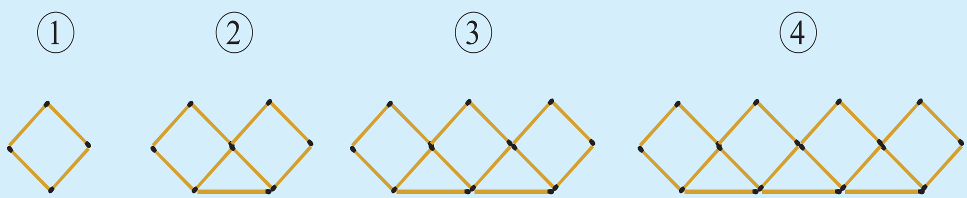
$$\therefore n = \frac{2600}{100}$$

$$= 26$$

∴ அதாவது 3 km தூரத்தை அவர் தனது பயிற்சியின் 26 ஆம் நாள் ஓடுவார்.

பயிற்சி 1.3

1. தீக்குச்சிகளினால் அமைக்கப்படும் ஒரு கோலம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



அதனைக் கொண்டு பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

கோலத்தின் எண்	1	2	3	4
தீக்குச்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை	....	9	....	....

(i) இக்கோலத்தின் 20 ஆம் உருவை உருவாக்கத் தேவையான தீக்குச்சிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) இக்கோலத்தின் எத்தனையாம் உருவை முழுமையாக உருவாக்குவதற்கு 219 தீக்குச்சிகள் தேவை ?

(iii) உயர்ந்தபட்சம் 75 தீக்குச்சிகளைப் பயன்படுத்தி இக்கோலத்தில் ஓர் உருவை உருவாக்கும்போது 1 தீக்குச்சி எஞ்சியிருக்குமெனக் காட்டுக.

2. தொழினுட்பர் ஒருவர் இரும்புக் கோல் துண்டுகளை உருகிணைத்துச் செய்யும் ஒரு படலைக்காக $5\,\mathrm{m}$ நீளமுள்ள இரும்புத் துண்டு ஒன்றிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் வேறுபட்ட நீளமுள்ள துண்டுகளை வெட்டுகிறார். மிகச் சிறிய துண்டு $15\ \mathrm{cm}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை, மற்றைய துண்டுகள் ஒவ்வொன்றும் இரு அடுத்திருக்கும் துண்டுகளிடையே உள்ள வித்தியாசம் $10\ \mathrm{cm}$ ஆக இருக்குமாறு வெட்டப்படுகின்றன.
   (i) வெட்டப்படும் நீளத்தில் சிறிய மூன்று துண்டுகளின் நீளங்களை முறையே எழுதுக.
   (ii) மிகச்சிறிய துண்டிலிருந்து நீளத்திற்கேற்ப ஏறுவரிசையில் எடுக்கும்போது 20 ஆம் துண்டின் நீளத்தைக் காண்க.
   (iii) நீளத்திற்கேற்ப ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும்போது 50 ஆம் துண்டை வெட்டுவதற்கு $5\,\mathrm{m}$ நீளமுள்ள இரும்பு கோல் போதியதன்றெனக் காட்டுக.

3. பாடசாலையில் நடைபெற்ற ஆண்டுச் சேமிப்புத் தினத்தில் கீதாவும் அன்வரும் முதலில் ரூ. 100 வீதம் தமது உண்டியலில் இட்டு பணத்தைச் சேமிக்கத் தொடங்கினர். அதன் பின்னர் அவர்கள் ஒரு வாரத்திற்கு ஒரு தடவை உண்டியலில் பணத்தை இடுகின்றனர். கீதா ரூ. 10 வீதமும் அன்வர் ரூ. 5 வீதமும் தவறாமல் குறித்த நாளில் உண்டியலில் இடுகின்றனர்.
   (i) 5 வாரங்களின் இறுதியில் கீதாவின் உண்டியலில் உள்ள பணம் யாது?
   (ii) 10 வாரங்களின் இறுதியில் அன்வரின் உண்டியலில் உள்ள பணம் யாது?
   (iii) 50 வாரங்களுக்குப் பின்னர் அவர்கள் தமது உண்டியல்களைத் திறந்து, அவற்றில் உள்ள பணத்தினைச் சோதித்தனர். கீதா சேமித்த பணம் அன்வர் சேமித்த பணத்திலும் பார்க்க எவ்வளவினால் கூடியது?

4. ஒரு நடன நிகழ்ச்சிக்காகத் திறந்தவெளி அரங்கில் ஆசனங்கள் ஒரு கோலத்தில் காணப்படுமாறு ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டிருந்தன. அதில் முதல் நிரையில் 9 ஆசனங்களும் இரண்டாம் நிரையில் 12 ஆசனங்களும் மூன்றாம் நிரையில் 15 ஆசனங்களும் இருக்குமாறு 15 நிரைகள் அமைக்கப்பட்டிருந்தன.
   (i) முதல் 5 நிரைகளிலும் உள்ள ஆசனங்களின் எண்ணிக்கை யாது?
   (ii) 15 ஆவது வரிசையில் எத்தனை ஆசனங்கள் உள்ளன
   (iii) 1 ஆவது நிரையில் உள்ள ஆசனங்களின் எண்ணிக்கையைப் போன்று 4 மடங்கு ஆசனங்கள் 10 ஆம் நிரையில் காணப்படுகின்றன எனக் காட்டுக.
   (iv) எத்தனையாவது நிரையில் 51 ஆசனங்கள் காணப்படும்?

பலவினப் பயிற்சி

1. சில எண் கோலங்களின் பொது உறுப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(a) $3n - 5$ (b) $6n + 5$ (c) $6n - 5$

அந்த எண் கோலங்கள் ஒவ்வொன்றினதும்

(i) முதல் மூன்று உறுப்புகளையும் எழுதுக.
(ii) 20 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.
(iii) $n - 1$ ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

2. பின்வரும் எண் கோலங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பொது உறுப்பைக் காண்க.

(i) $-3, 1, 5, 9, \ldots$ (ii) $0, 4, 8, 12, \ldots$

(iii) $1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ (iv) $-6, -3, 0, 3, \ldots$

3. எண் கோலம் 42, 36, 30, 24, ... இன் பொது உறுப்பு $6(8 - n)$ எனக் காட்டுக.

4. மோகன் ஒரு தனியார் நிறுவனத்தில் தொழில் செய்கிறார். அவருடைய தொடக்க மாதச் சம்பளம் ரூ. 25000 ஆகும். இரண்டாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்திலிருந்து ஆண்டுதோறும் அவருக்கு ரூ. 2400 சம்பள ஏற்றம் உரித்தாகும்.

(i) இரண்டாம் ஆண்டுத் தொடக்கத்தில் அவருடைய மாதச் சம்பளம் எவ்வளவு?
(ii) முதல் மூன்று ஆண்டுகளிலும் மோகனின் மாதச் சம்பளங்களின் பெறுமானங்களை வேறுவேறாக எழுதுக.
(iii) n ஆம் ஆண்டின் சம்பளத்தைக் காட்டும் கோவையை n இன் சார்பில் தருக.
(iv) 5 ஆண்டுகளின் இறுதியில் அவருடைய மாதச் சம்பளத்தை மேலே (iii) இல் பெற்ற பொது உறுப்பைக் கொண்டு காண்க.

பொழிப்பு

- எண் கோலத்தில் உறுப்புகளுக்கிடையே காணப்படும் தொடர்பைக் காண்பதன் மூலம் அக்கோலத்தின் ஏனைய உறுப்புகளைப் பெற முடியும்.
- ஓர் எண் தொடரியின் n ஆம் உறுப்பான T_n ஆனது அதன் பொது உறுப்பு எனப்படும்.
- எண் தொடரியின் பொது உறுப்பிலிருந்து அத்தொடரியைக் காணமுடியும்.

2 துவித எண்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- துவித எண்களை இனங்காண்பதற்கும்
- தசம எண் ஒன்றைத் துவித எண்ணாக மாற்றுவதற்கும்
- துவித எண் ஒன்றைத் தசம எண்ணாக மாற்றுவதற்கும்
- துவித எண்களைக் கூட்டுவதற்கும் கழிப்பதற்கும்
- துவித எண்களைப் பயன்படுத்தும் சந்தர்ப்பங்களை இனங்காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

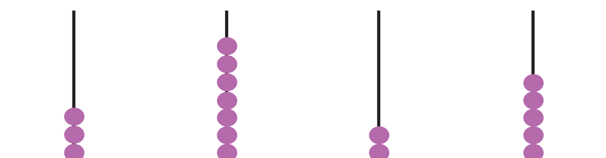
அறிமுகம்

நாம் பொதுவாகப் பயன்படுத்தும் இந்து அராபிய எண் குறியீட்டு முறையில் எண்களை எழுதும் முறையைப் பற்றி முன்னர் கற்றவற்றைப் பின்வருமாறு நினைவுகூர்வோம்.

உதாரணமாக 3725 என்ற எண்ணைக் கருதுக. 3725 இல்

5 ஆல் 1 களின் (10^0 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.
2 ஆல் 10 களின் (10^1 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.
7 ஆல் 100 களின் (10^2 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.
3 ஆல் 1000 களின் (10^3 கள்) எண்ணிக்கை காட்டப்படுகின்றது.

இந்த எண்ணைப் பின்வருமாறு எண் சட்டம் ஒன்றைப் பயன்படுத்தியும் காட்டலாம்.



1000	100	10	1
10^3	10^2	10^1	10^0

3 725 என்ற எண்ணைப் பின்வருமாறும் எழுத முடியும் எனவும் கற்றுள்ளீர்கள்.

3 725 = 3, 1 000 கள் + 7, 1 00 கள் + 2, 1 0 கள் + 5, 1 கள்

$3\ 725 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

மற்றுமொரு உதாரணமாக 603 ஐப் பார்ப்போம். இதனை

$603 = 6 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ என எழுத முடியும்.

நாம் பொதுவாகப் பயன்படுத்தும் இந்து அராபிய எண் முறையில் ஒவ்வொரு இடப்பெறுமானமும் 1, 10, 100, 1000, ... என்றவாறு 10 இன் வலுக்களாக அமைகின்றன. அத்தோடு இம்முறையில் எண்களை எழுதுவதற்கு 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற பத்து எண் குறியீடுகள் (இலக்கங்கள்) பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வாறு மேலே குறிப்பிட்ட பத்து எண் குறியீடுகளையும் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு இடப்பெறுமானத்தையும் பத்தின் வலுக்களைக் கொண்டு எழுதும்போது அது அடி 10 இலான எண்கள் எனப்படும். இவ்வெண்கள் ''**தசம எண்கள்**'' என அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு

- ''தசம எண்கள்'' என்பதைத் ''தசமப் புள்ளியுடனான'' எண் எனச் சிக்கலாக்க வேண்டாம்.
- $10^0 = 1$ என்பதைப் போல பூச்சியம் தவிர்ந்த எந்தவொரு எண்ணினதும் பூச்சியச் சுட்டி 1 ஆகும். ஆகவே $2^0 = 1$ ஆகும்.

2.1 தசம எண்களைத் துவித எண்களாக எழுதுதல்

எண்களை எழுதுவதற்கு அடி 10 ஐத் தவிர வேறு எண் அடிகளையும் பயன்படுத்த முடியும். உதாரணமாக 0, 1 ஆகிய இரண்டு இலக்கங்களையும் 2 இன் வலுக்களை இடப்பெறுமானங்களாகக் கொண்டு அடி இரண்டில் எண்களை எழுத முடியும். இது **துவித எண்கள்** என அழைக்கப்படும். இதற்காக முதலில் 2 இன் வலுக்களாக உள்ள இடப்பெறுமானங்களை இனங்காண்போம்.

$2^0 = 1$	$2^5 = 32$
$2^1 = 2$	$2^6 = 64$
$2^2 = 4$	$2^7 = 128$
$2^3 = 8$	$2^8 = 256$
$2^4 = 16$	$2^9 = 512$

இவ்வாறு 2 இன் வலுக்களாக இடப் பெறுமானங்களைக் கணித்து எழுதலாம்.

அடி இரண்டில் எண்களை எழுதும் முறையை விளங்குவதற்காக அடி பத்தில் எழுதப்பட்ட 13 என்ற எண்ணை உதாரணமாகக் கொள்வோம். 13 ஐ 2 இன் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதும் முறையைப் பார்ப்போம்.

குறிப்பு

அடி 10 இல் இலக்கங்களை எழுதுவதற்கு 0, 1, ..., 9 வரையுள்ள 10 இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தியது போன்று அடி 2 இல் இலக்கங்களை எழுதுவதற்கு 0, 1 ஆகிய இரண்டு இலக்கங்களையே பயன்படுத்துவோம்.

1, 2, 4, 8, 16 என்பன இரண்டின் தொடக்க வலுக்கள் சிலவற்றின் பெறுமானங்களாகும்.

இவ்வலுக்களின் கூட்டலாக 13 ஐ எழுதுவோம்.

$13 = 8 + 4 + 1$

இதனைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$

$13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

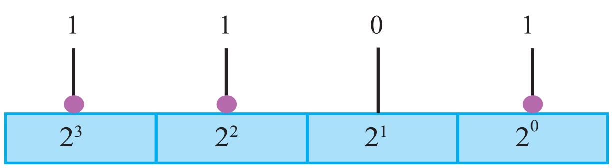
இங்கு இடப் பெறுமானங்கள் 2^3 இலிருந்து ஆரம்பித்து 2^2, 2^1, 2^0 என ஒழுங்காக எழுதப்பட்டுள்ளன. இங்கு 2^1 என்ற இடப் பெறுமானம் இன்மையால் அது 0×2^1 என எழுதப்பட்டுள்ளது.

13 ஐ எழுதுவதற்குப் பயன்படுத்திய இலக்கங்கள் 1101 ஆகும்.

இங்கு காணப்படும் 0, 1 ஆகிய இலக்கங்கள் வகைகுறிக்கும் இடப் பெறுமானங்களைப் பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

இதனைப் பின்வருமாறு எண் சட்டத்தின் மூலம் காட்டலாம்.



இங்கு 1101 என்பது அடி இரண்டில் எழுதப்பட்டுள்ளது என்பதைக் காட்டுவதற்கு $1101_{\text{இரண்டு}}$ என எண்ணினது வலது பக்கத்தில் சற்றுக் கீழே சிறிதாக இரண்டு என எழுத்தில் எழுதப்படும். இவ்வாறே அடி பத்தில் எழுதப்பட்டுள்ள எண்களைத்

தனித்தனியாக இனங்காண்பதற்கு இலகுவாக 10 ஐ அடியாகக் கொண்ட எண்களின் வலது பக்கத்திலும் சிறியதாகப் பத்து என இப்பாடத்தின் தேவையான இடங்களில் எழுதப்பட்டுள்ளது. உதாரணமாக $603_{\text{பத்து}}$ என்பது நாம் சாதாரணமாக அடி பத்தில் எழுதும் 603 ஆகும்.

மற்றுமொரு உதாரணத்தைப் பார்ப்போம். தசம எண்ணாக எழுதப்பட்டுள்ள $20_{\text{பத்து}}$ என்பதைத் துவித எண்ணாக எழுதுவோம்.

2 இன் வலுக்களை நினைவுகூர்வதன் மூலம்

$$\begin{aligned} 20 &= 16 + 4 \\ &= 2^4 + 2^2 \\ &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \end{aligned}$$

என்றவாறு எழுதலாம்.

எனவே, $20_{\text{பத்து}} = 10100_{\text{இரண்டு}}$ என எழுதலாம்.

இங்கு முக்கிய விடயம் யாதெனில், இரண்டினது வலுக்களின் கூட்டலாக ஒரேயொரு விதமாக மட்டுமே எழுத முடியும். உதாரணமாக 20 ஐ 16 + 4 என்ற விதத்தில் மட்டுமே இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுத முடியும். எந்தவொரு எண்ணையும் இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுத முடியும். பல எண்களை இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதுவதன் மூலம் இதனை நீங்கள் அறிய முடியும்.

அடி பத்தில் உள்ள எண்களை அடி இரண்டில் உள்ள எண்களாக மாற்றுவதற்கு மேலே கூறப்பட்ட முறை தவிர்ந்த வேறு முறைகளையும் பயன்படுத்தலாம். ஏனெனில், பெரிய எண்களை இரண்டின் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதும் விதத்தைச் சிந்திப்பது சிரமமாக இருக்கலாம். உதாரணமாக 3 905 என்பது இரண்டின் எந்தெந்த வலுக்களின் கூட்டலாக அமையும் என்பதைச் சிந்திப்பது சிரமமாகலாம். எனவே எல்லாச் சந்தர்ப்பத்திற்கும் பொருத்தமான வேறொரு முறையையும் இங்கு கருத்திற் கொள்வோம்.

$22_{\text{பத்து}}$ என்பதை அடி இரண்டில் எழுதுவதற்கு முதலில் 22 ஐ 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும். அப்போது மீதியாகும் எண்ணையும் குறித்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 22 \\ \hline & 11 \text{ மீதி } 0 \end{array}$$

இப்போது பெறப்பட்டுள்ள 11 ஐ மீண்டும் 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 22 \\ \hline 2 & 11 \text{ மீதி } 0 \\ \hline & \ \ 5 \text{ மீதி } 1 \end{array}$$

இவ்வாறு ஈவுகளைத் தொடர்ந்து வகுத்து மீதியையும் குறிக்க வேண்டும். இறுதியில் ஈவு 0 ஆகவும் மீதி 1 ஆகவும் வரும் வரை தொடர்ந்து வகுக்க வேண்டும். முழு வகுத்தலும் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$
\begin{array}{r|ll}
2 & 22 & \\ \hline
2 & 11 & \text{மீதி } 0 \\ \hline
2 & 5 & \text{மீதி } 1 \\ \hline
2 & 2 & \text{மீதி } 1 \\ \hline
2 & 1 & \text{மீதி } 0 \\ \hline
 & 0 & \text{மீதி } 1
\end{array}
\qquad \longrightarrow \qquad 1\,0\,1\,1\,0_{\text{இரண்டு}}
$$

இங்கு நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ள மீதிப் பெறுமானங்களைக் கீழிருந்து மேலாக ஒழுங்காக எடுத்து எழுதுவதன் மூலம் துவித எண் பெறப்படும். அதாவது

$$22_{\text{பத்து}} = 10110_{\text{இரண்டு}}$$

இவ்வாறு பெறப்பட்ட துவித எண் சரியானதா என்பதை 22 ஐ 2 இன் வலுக்களின் கூட்டலாக எழுதுவதன் மூலம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

$$
\begin{aligned}
22 &= 16 + 4 + 2 \\
&= 2^4 + 2^2 + 2^1 \\
&= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0
\end{aligned}
$$

இதன் மூலம் விடை சரியென வாய்ப்புப் பார்க்கப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு தசம எண்ணையும் துவித எண்ணாக எழுதுக.

(i) $32_{\text{பத்து}}$

$$
\begin{array}{r|r|c}
2 & 32 & \\ \hline
2 & 16 & 0 \\ \hline
2 & 8 & 0 \\ \hline
2 & 4 & 0 \\ \hline
2 & 2 & 0 \\ \hline
2 & 1 & 0 \\ \hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$32_{\text{பத்து}} = 100000_{\text{இரண்டு}}$$

(ii) $154_{\text{பத்து}}$

$$
\begin{array}{r|r|c}
2 & 154 & \\ \hline
2 & 77 & 0 \\ \hline
2 & 38 & 1 \\ \hline
2 & 19 & 0 \\ \hline
2 & 9 & 1 \\ \hline
2 & 4 & 1 \\ \hline
2 & 2 & 0 \\ \hline
2 & 1 & 0 \\ \hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$154_{\text{பத்து}} = 10011010_{\text{இரண்டு}}$$

பயிற்சி 2.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தசம எண்களைத் துவித எண்களாகத் தருக.

(i) 4	(ii) 9	(iii) 16	(iv) 20	(v) 29
(vi) 35	(vii) 43	(viii) 52	(ix) 97	(x) 168

2.2 துவித எண்களைத் தசம எண்களாக எழுதுதல்

மேலே பகுதி 2.1 இல் தசம எண்களைத் துவித எண்களாக எழுதும் முறையைப் பார்த்தோம். இப்போது துவித எண்களைத் தசம எண்களாக மாற்றும் முறையைப் பார்ப்போம். பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் அதனை இலகுவாகச் செய்யும் முறையைப் பார்ப்போம்.

மேலே பகுதி 2.1 இல் 13 என்னும் தசம எண்ணை அடி இரண்டில் எழுதியபோது $1101_{\text{இரண்டு}}$ எனப் பெறப்பட்டது. இங்கு 1, 1, 0, 1 ஆகிய இலக்கங்களால் வகைகுறிக்கப்படும் பெறுமானங்கள் யாவை என நினைவுகூர்வோம்.

1 1 0 1

2^3 களின் எண்ணிக்கை	2^2 களின் எண்ணிக்கை	2^1 களின் எண்ணிக்கை	2^0 களின் எண்ணிக்கை

$1101_{\text{இரண்டு}}$ என்பதில் காணப்படும் இரண்டின் வலுக்களைக் கூட்டும்போது தசம எண் பெறப்படும். அப்போது,

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 4 + 1 = 13$$

ஆகவே விடையாகத் தசம எண் 13 பெறப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

$101100_{\text{இரண்டு}}$ என்பதைத் தசம எண்ணாக எழுதுக.

இங்கு முதலாவது இலக்கத்தின் இடப்பெறுமானம் 2^5 ஆகும் என்பதை அவதானிக்க. அடுத்துவரும் இடப்பெறுமானங்களுக்கான சுட்டிகள் தொடர்ந்து 5 இலிருந்து 1 இனால் குறைந்து செல்வதால், பெறப்படும் 2 இன் வலுக்களைக் கூட்டுவதால் தேவையான எண் பெறப்படும்.

$101100_{\text{இரண்டு}} = 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0$

$= 2^5 + 2^3 + 2^2 = 32 + 8 + 4$

$= 44_{\text{பத்து}}$

$\therefore\ 101100_{\text{இரண்டு}} = 44_{\text{பத்து}}$

குறிப்பு

$44_{\text{பத்து}}$ ஐத் துவித எண்ணாக மாற்றுவதன் மூலம் இவ்விடையை வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 2.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள துவித எண்களைத் தசம எண்களாகத் தருக.

(i) $101_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $1101_{\text{இரண்டு}}$ (iii) $1011_{\text{இரண்டு}}$ (iv) $1100_{\text{இரண்டு}}$

(v) $11111_{\text{இரண்டு}}$ (vi) $100111_{\text{இரண்டு}}$ (vii) $1101101_{\text{இரண்டு}}$ (viii) $111000_{\text{இரண்டு}}$

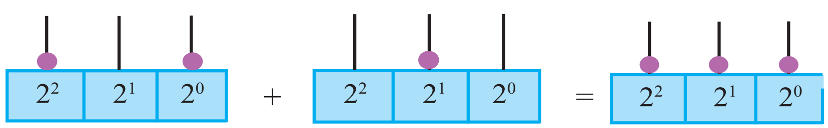
(ix) $111110_{\text{இரண்டு}}$ (x) $110001_{\text{இரண்டு}}$

2.3 துவித எண்களைக் கூட்டுதல்

துவித எண்களை எண் சட்டம் ஒன்றில் வகைகுறிக்கும்போது ஒரு கோலில் இருக்கக் கூடிய எண்களின் உயர் எண்ணிக்கை 1 ஆகும். கூட்டலின்போது ஒரு கோலில் இரண்டு எண்ணிகள் வரும் சந்தர்ப்பத்தில் அதற்குப் பதிலாக அதன் இடது பக்கத்தில் உள்ள கோலில் ஒரு எண்ணியை இடுதல் வேண்டும்.

இரு துவித எண்களைக் கூட்டுவதை எண் சட்டங்களின் மூலம் நோக்குவோம்.

$101_{\text{இரண்டு}} + 10_{\text{இரண்டு}}$ என்பதைக் கூட்டுவோம்.



$101_{\text{இரண்டு}}$ $10_{\text{இரண்டு}}$ $111_{\text{இரண்டு}}$

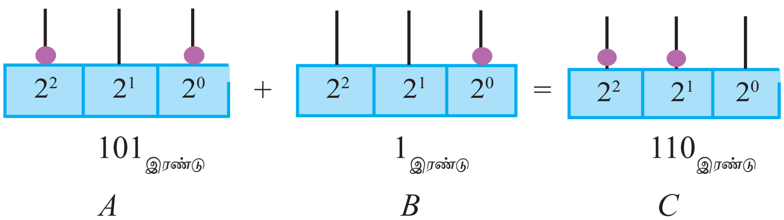
A *B* *C*

A இலும் B இலும் உள்ள எண்ணிகளை ஒத்த கோல்களில் ஒன்றாகச் சேர்க்கும்போது அது எண் சட்டம் C இனால் காட்டப்படுகின்றது.

இடப்பெறுமானம் 2^0 ஐக் குறிக்கும் கோல்களில் உள்ள எண்ணிகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.
இடப்பெறுமானம் 2^1 ஐக் குறிக்கும் கோல்களில் உள்ள எண்ணிகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.
இடப்பெறுமானம் 2^2 ஐக் குறிக்கும் கோல்களில் உள்ள எண்ணிகளின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும்.

எனவே $101_{\text{இரண்டு}} + 10_{\text{இரண்டு}} = 111_{\text{இரண்டு}}$.

- இப்போது $101_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}}$ என்பதன் பெறுமானத்தை எண் சட்டத்தின் மூலம் பெறுவோம்.



A இன் 2^0 கோலில் உள்ள எண்ணியை B இன் 2^0 கோலில் இடும்போது அக்கோலில் இரு எண்ணிகள் வரப்போகின்றன. ஆனால் ஒரே கோலில் இரு எண்ணிகள் இருக்க முடியாது. ஆகவே 2^0 ஐக் குறிக்கும் கோலில் வரவேண்டிய இரு எண்ணிகளுக்குப் பதிலாக 2^1 ஐக் குறிக்கும் கோலில் 1 எண்ணியை இடுதல் வேண்டும். இது எண் சட்டம் C இல் 2^1 ஐக் குறிக்கும் கோலில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எனவே $101_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 110_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும்.

எண்களைக் கீழ்நோக்கி எழுதிக் கூட்டும்போது இதனை மேலும் விளங்கலாம்.

$$\begin{array}{r} 101_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ \underline{\ \ \ 1_{\text{இரண்டு}}} \\ \underline{110_{\text{இரண்டு}}} \end{array}$$

வழக்கம் போல் எண்களைக் கூட்டும்போது வலது பக்கத்திலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும்.
முதலில் 2^0 கள் 1 + 2^0 கள் 1 = 2^1 கள் 1 + 2^0 கள் 0
2^1 கள் 1 + 2^1 கள் 0 = 2^1 கள் 1

உதாரணம் 1

பெறுமானம் காண்க.

(i) $11101_{\text{இரண்டு}} + 1101_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $1110_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}}$

(i)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ \ 1\ \ } \\ 11101_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ 1101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 101010_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11\ \ \ \ \ \ \ } \\ 1110_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ 111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 10101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

குறிப்பு

துவித எண்களைக் கூட்டும்போது

$1_{\text{இரண்டு}} + 0_{\text{இரண்டு}} = 1_{\text{இரண்டு}}$

$1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 10_{\text{இரண்டு}}$

$1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 11_{\text{இரண்டு}}$

எனப் பெறப்படும்.

பயிற்சி 2.3

1. பெறுமானம் காண்க.

a.
$$\begin{array}{r} 111_{\text{இரண்டு}} \\ +101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 10111_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ 1011_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 1011_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 11101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

d. $11101_{\text{இரண்டு}} + 1110_{\text{இரண்டு}}$

e. $11011_{\text{இரண்டு}} + 11_{\text{இரண்டு}}$

f. $100111_{\text{இரண்டு}} + 11_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}}$

g. $11_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}} + 1111_{\text{இரண்டு}}$

h. $11110_{\text{இரண்டு}} + 1110_{\text{இரண்டு}} + 110_{\text{இரண்டு}}$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள வெற்றுக்கூடுகளினுள் பொருத்தமான இலக்கங்களை இடுக.

a.
$$\begin{array}{r} 11_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 1\,10\,\square_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \square 1\ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square 10\,0_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 10\,0\,1_{\text{இரண்டு}} \\ +\ \ \square 1\,\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \square 00\square\,0_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{r} 1110_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1\square\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 10\square01_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

e.

$$\begin{array}{r} 1\square1\square_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1\square1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square000_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

f.

$$\begin{array}{r} 11\square1_{\text{இரண்டு}} \\ +1110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 1\square\square1\square_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

2.4 துவித எண்களைக் கழித்தல்

துவித எண்களைக் கூட்டும்போது குறிப்பிட்ட இடப்பெறுமான நிரலில் 2 வரும்போது அதற்கு இடது பக்கத்தில் உள்ள இடப்பெறுமான நிரலில் 1 சேர்க்கப்படல் வேண்டும் எனப் பார்த்தோம்.

$$\begin{array}{r} 101_{\text{இரண்டு}} \\ +\quad 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

(2^0 நிரலில் $1_{\text{இரண்டு}} + 1_{\text{இரண்டு}} = 10_{\text{இரண்டு}}$)

இப்போது $110_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மேலே உள்ள கூட்டலை அவதானிக்கும்போது இதன் பெறுமானம் $101_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும். இவ்விடை பெறப்படும் விதத்தை விளங்குவோம்.

$$\begin{array}{r} 1\overset{2}{1}0_{\text{இரண்டு}} \\ -\quad 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

2^0 என்ற நிரலில் 0 இலிருந்து 1 ஐக் கழிக்க முடியாததால் அடுத்துள்ள 2^1 நிரலிலிருந்து 1 ஐ எடுப்போம். அது 2^0 கள் 2 என்பதால் அதிலிருந்து 1 ஐக் கழிக்கும்போது மீதி 1 கிடைக்கும். 2^1 நிரலில் இப்போது காணப்படுவது 0 ஆகும்.

எனவே $110_{\text{இரண்டு}} - 1_{\text{இரண்டு}} = 101_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

$$\begin{array}{r} 1101_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

$110_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}}$ என்பதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதன் மூலம் விடையை வாய்ப்புப் பார்ப்போம்.

$$110_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}} = 1101_{\text{இரண்டு}}$$

குறிப்பு

கழிக்கும்போது பெறப்படும் விடையைக் கழிக்கப்படும் எண்ணுடன் கூட்டுவதனால் விடையைச் சரியா என வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 2.4

1. பெறுமானம் காண்க.

a. $\begin{array}{r} 11_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

b. $\begin{array}{r} 10_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

c. $\begin{array}{r} 101_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 1_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

d. $\begin{array}{r} 101_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 11_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

e. $111_{\text{இரண்டு}} - 11_{\text{இரண்டு}}$

f. $110_{\text{இரண்டு}} - 11_{\text{இரண்டு}}$

g. $1100_{\text{இரண்டு}} - 111_{\text{இரண்டு}}$

h. $\begin{array}{r} 10001_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

i. $\begin{array}{r} 100000_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 11011_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

j. $\begin{array}{r} 100011_{\text{இரண்டு}} \\ -\ 10001_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$

k. $11000_{\text{இரண்டு}} - 1111_{\text{இரண்டு}}$

l. $101010_{\text{இரண்டு}} - 10101_{\text{இரண்டு}}$

2.5 துவித எண்களின் பிரயோகம்

துவித எண் தொகுதியில் பயன்படுத்தப்படும் இலக்கங்கள் 0 உம் 1 உம் ஆகும். 0, 1 என்பவற்றை வகைகுறிப்பதற்கு மின் சுற்றில் இணைக்கப்பட்டுள்ள மின் குமிழொன்று ஒளிர்வது 1 ஐயும் ஒளிராதிருப்பது 0 ஐயும் குறிப்பதாகக் கருதப்பட்டு இலக்கமுறை (Digital) உபகரணங்கள் தயாரிக்கப்படுகின்றன.

இதற்கேற்ப மின்குமிழ் ஒளிர்வதை ⊛ என்பதனாலும் ஒளிராதிருப்பதை ○ இனாலும் குறிக்கும்போது ⊛ ○ ○ ⊛ என்பது $1001_{\text{இரண்டு}}$ என்ற துவித எண்ணை வகைகுறிக்கின்றது. இத்தொழினுட்பத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிகருவி, கணினி என்பன உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு அடி இரண்டிலான எண்கள் உருவாக்கப்பட்டது போல வேறு அடிகளிலும் உருவாக்கப்பட்ட எண் தொகுதிகளின் மூலம் வெவ்வேறு விளையாட்டுகளும் விளையாட்டு உபகரணங்களும் உருவாக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு

அடி 2, 10 எண்களைப் போன்று வேறு அடிகளைப் பயன்படுத்தல்

அடி நான்கில் உருவாக்கப்படும் எண் தொகுதியில் பயன்படுத்தப்படும் இலக்கங்கள் 0, 1, 2, 3 மட்டுமே ஆகும்.

$10_{\text{நான்கு}}$ என்பது குறிக்கும் எண் 4 ஆகும்.

அடி ஐந்திற்கு 0, 1, 2, 3, 4 ஆகிய இலக்கங்கள் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படும். $10_{\text{ஐந்து}}$ என்பது குறிக்கும் எண் 5 ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

1. பெறுமானம் காண்க.

   a. $1101_{\text{இரண்டு}} + 111_{\text{இரண்டு}} - 1011_{\text{இரண்டு}}$ **b.** $11111_{\text{இரண்டு}} - (101_{\text{இரண்டு}} + 11_{\text{இரண்டு}})$

   c. $110011_{\text{இரண்டு}} - 1100_{\text{இரண்டு}} - 110_{\text{இரண்டு}}$

2. $1_{\text{இரண்டு}}$, $11_{\text{இரண்டு}}$, $111_{\text{இரண்டு}}$, $1111_{\text{இரண்டு}}$, $11111_{\text{இரண்டு}}$, $111111_{\text{இரண்டு}}$ என்ற ஒவ்வோர் எண்ணிலும் 1 கூடுதலான எண்ணைத் துவித எண்களாகத் தருக.

3. அடி பத்தில் 16 என்ற தசம எண்ணைத் துவித எண்ணாக எழுதுக.

4. (i) $49_{\text{பத்து}} - 32_{\text{பத்து}}$ ஐச் சுருக்கி துவித எண்களாகத் தருக.

   (ii) $49_{\text{பத்து}}$, $32_{\text{பத்து}}$ ஆகிய எண்களைத் துவித எண்களாக மாற்றிக் கழிக்க. மேலே (i) இல் பெற்ற விடையுடன் உமது விடையை ஒப்பிடுக.

பொழிப்பு

- அடி இரண்டிலான எண் தொகுதியில் பயன்படுத்தும் இலக்கங்கள் 0, 1 ஆகும்.
- அடி இரண்டிலான எண் தொகுதியில் 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6...... என்பன இடப்பெறுமானங்களாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
- தசம எண் ஒன்றைத் துவித எண் ஒன்றாக மாற்றுவதற்கு அவ்வெண்ணை மீண்டும் மீண்டும் தொடர்ந்து ஈவு 0 வரும் வரை 2 ஆல் வகுக்க வேண்டும். அப்போது மீதியாக வரும் இலக்கங்களைக் கொண்டு அவ்வெண் வகைகுறிக்கப்படும்.
- துவித எண் ஒன்றைத் தசம எண் ஒன்றாக மாற்றுவதற்கு அவ்வெண்ணை இடப்பெறுமானத்துக்குரிய இரண்டின் வலுக்களினால் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும்.

3 பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

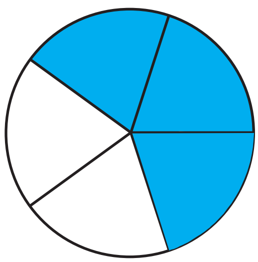
- ''இன்'' இடம்பெறும் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- அடைப்புக்குறிகள் இடம்பெறும் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- BODMAS ஒழுங்கு முறையை இனங்காண்பதற்கும் அதனைப் பயன்படுத்திப் பின்னங்கள் உள்ள பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பின்னங்கள்

இதற்கு முந்திய தரங்களில் பின்னங்கள் தொடர்பாக நாம் கற்றுள்ள விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

கீழே உள்ள வட்டத்தை 5 சம பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றின் மூன்று பகுதிகள் நிழற்றப்பட்டுள்ளன.



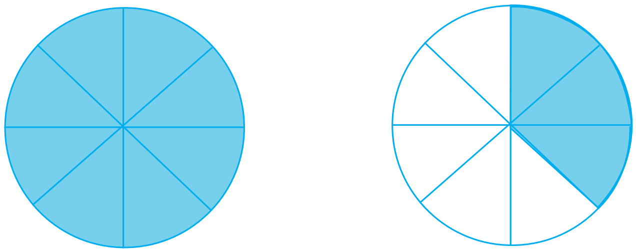
இந்நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம் முழுப் பிரதேசத்தின் $\frac{3}{5}$ எனக் கூறலாம்.

வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கொண்டும் இதனை எடுத்துரைக்கலாம். அதாவது நிழற்றப்பட்டுள்ள பரப்பளவு உருவின் மொத்தப் பரப்பளவின் $\frac{3}{5}$ ஆகும். மொத்தப் பரப்பளவை ஓர் அலகாக எடுத்தால், நிழற்றப்பட்டுள்ள பரப்பளவு $\frac{3}{5}$ அலகுகளெனக் காட்டலாம்.

ஓர் அலகைச் சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்போது அதன் ஒரு பகுதியை அல்லது சில பகுதிகளை ஒரு பின்னமாகக் காட்டலாம். ஒரு கூட்டத்தில் உள்ள ஒரு பகுதியையும் பின்னமாகக் காட்டலாம். ஓர் உதாரணமாக மூன்று ஆண் பிள்ளைகளும் இரண்டு

பெண் பிள்ளைகளும் உள்ள ஐவரைக் கொண்ட குழு ஒன்றைக் கருதும்போது ஆண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை அக்குழுவின் $\frac{3}{5}$ எனக் காட்டலாம். இங்கு முழுக் குழுவையும் ஓர் அலகாகக் கருதும்போது ஆண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை $\frac{3}{5}$ எனக் காட்டலாம். இவ்வாறு காட்டப்படும் பூச்சியத்திற்கும் ஒன்றுக்குமிடையே உள்ள $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ போன்ற பின்னங்கள் முறைமைப் பின்னங்கள் எனப்படுமென நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள்.

கலப்பு எண்களையும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களையும் நினைவுகூர்வோம். பின்வரும் உருவில் உள்ள இரு சம வட்டங்களில் ஒரு வட்டம் முழுமையாகவும் மற்றைய வட்டத்தில் (8 சம பகுதிகளாகப் பிரித்து) மூன்று பகுதிகளும் நிழற்றப் பட்டுள்ளன.



எனினும் ஒரு வட்டத்தை ஓர் அலகாகக் கருதினால், நிழற்றப்பட்டுள்ள பின்னம் $1+\frac{3}{8}$ ஆகும். இதனைச் சுருக்கமாக $1\frac{3}{8}$ என எழுதலாம். இப்பின்னத்தை $\frac{11}{8}$ எனவும் காட்டலாம். இது ''முறைமையில்லாப் பின்னம்'' ஆகும். இங்கு ஒரு வட்டத்தை ஓர் அலகாகக் கருதுவதன் மூலம் கலப்பு எண், முறைமையில்லாப் பின்னங்கள் ஆகிய இரண்டும் காட்டப்பட்டுள்ளன என்பதை நினைவிற் கொள்ளல் முக்கியமானதாகும். அதற்கேற்ப உதாரணங்களாக

$1\frac{1}{2}, 3\frac{2}{5}, 2\frac{3}{7}$ ஆகியன கலப்பெண்களாகும்.

$\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{4}$ ஆகியன முறைமையில்லாப் பின்னங்களாகும். $\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{1}{1}$ போன்ற ஒன்றுக்குச் சமமான பின்னங்களும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களாகக் கருதப்படும்.

கலப்பெண்களை முறைமையில்லாப் பின்னங்களாக வகைகுறித்தல் பற்றியும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களைக் கலப்பெண்களாக வகைகுறித்தல் பற்றியும் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். இதற்கு உதாரணமாக

(i) $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ என்பவற்றைக் காட்டலாம்.

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் ஒரே எண்ணால் (பூச்சியமல்லாத) பெருக்குவதன் மூலம் அல்லது வகுப்பதன் மூலம் முதற் பின்னத்திற்குச் சமவலுவான ஒரு பின்னத்தைப் பெறலாம்.
உதாரணங்களாக

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} \qquad \frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

பின்னங்களைக் கூட்டும்போதும் கழிக்கும்போதும் பகுதிகள் சமமாக இருக்கும்போது அவற்றை எளிதாகச் சுருக்கலாம். உதாரணமாக

(i) $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5}$

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1 + 4 - 2}{5}$$
$$= \frac{3}{5}$$

பகுதிகள் சமமற்று இருக்கும்போது ஒரு பொதுப் பகுதி கிடைக்குமாறு சமவலுப் பின்னங்கள் எழுதப்படும். உதாரணமாக

(ii) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} - \frac{5 \times 2}{6 \times 2}$$
$$= \frac{3}{12} + \frac{8}{12} - \frac{10}{12}$$
$$= \frac{3 + 8 - 10}{12}$$
$$= \frac{1}{12}$$

- இரு பின்னங்களைப் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் பின்னத்தின் தொகுதி இரு பின்னங்களினதும் தொகுதிகளின் பெருக்கமாகும். பகுதி இரு பின்னங்களினதும் பகுதிகளின் பெருக்கமாகும்.

(i) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{5 \times 3}$$
$$= \frac{2}{15}$$

(ii) $1\frac{1}{3} \times 1\frac{3}{4}$

$$1\frac{1}{3} \times 1\frac{3}{4} = \frac{\cancel{4}}{3} \times \frac{7}{\cancel{4}}$$
$$= \frac{7}{3}$$
$$= 2\frac{1}{3}$$

(கலப்பெண்களை முறைமையில்லாப் பின்னங்களாக மாற்றல்)

- இரு எண்களின் பெருக்கம் 1 எனின், அவற்றில் ஓர் எண் மற்றைய எண்ணின் நிகர்மாற்று எனப்படும்.

  அதற்கேற்ப

  $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ஆகையால்

  2 இன் நிகர்மாற்று $\frac{1}{2}$ உம் $\frac{1}{2}$ இன் நிகர்மாற்று 2 உம் ஆகும்.

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் முறையே பகுதியாகவும் தொகுதியாகவும் மாற்றி எழுதும்போது அவ்வெண்ணின் நிகர்மாற்றைப் பெறலாமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

அதாவது $\frac{a}{b}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{b}{a}$ ஆகும். (அவ்வாறே $\frac{b}{a}$ இன் நிகர்மாற்று $\frac{a}{b}$ ஆகும்.)

- ஓர் எண்ணை வேறோர் எண்ணால் வகுத்தல் என்பது முதல் எண்ணை இரண்டாம் எண்ணின் நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல் என நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளீர்கள். அதனைச் சில உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

(i) $\frac{4}{3} \div 2$

$$\frac{4}{3} \div 2 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \times \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(ii) $1\frac{2}{7} \div 1\frac{1}{2}$

$$1\frac{2}{7} \div 1\frac{1}{2} = \frac{9}{7} \div \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{7} \times \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{6}{7}$$

பின்னங்கள் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை மேலும் நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் இரு சமவலுப் பின்னங்கள் வீதம் எழுதுக.

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{4}{8}$ (iv) $\frac{16}{24}$

2. பின்வரும் கலப்பெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் முறைமையில்லாப் பின்னமாகக் காட்டுக.

(i) $1\frac{1}{2}$ (ii) $2\frac{3}{4}$ (iii) $3\frac{2}{5}$ (iv) $5\frac{7}{10}$

3. பின்வரும் முறைமையில்லாப் பின்னங்களைக் கலப்பெண்களாகக் காட்டுக.

(i) $\frac{7}{3}$ (ii) $\frac{19}{4}$ (iii) $\frac{43}{4}$ (iv) $\frac{36}{7}$

4. பெறுமானம் காண்க.

(i) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{7}{12}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

(iv) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}$ (v) $3\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}$ (vi) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}-1\frac{2}{3}$

5. சுருக்குக.

(i) $\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}$ (ii) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}$ (iii) $1\frac{3}{5}\times 2\frac{1}{2}$ (iv) $3\frac{3}{10}\times 2\frac{1}{3}\times 4\frac{2}{7}$

6. பின்வரும் எண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிகர்மாற்றை எழுதுக.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) 5 (v) $2\frac{3}{5}$

7. சுருக்குக.

(i) $\frac{6}{7}\div 3$ (ii) $8\div\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{9}{28}\div\frac{3}{7}$ (iv) $5\frac{1}{5}\div\frac{6}{7}$ (v) $1\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{4}$

3.1 ‘‘ இன் ’’ இடம்பெறும் கோவைகளுக்குரிய பின்னங்களைச் சுருக்குதல்

ரூ. 100 இன் $\frac{1}{2}$ ஆனது ரூ. 50 என்பதை நாம் அறிவோம்.

இது ரூ. 100 இன் அரைவாசி எனவும் 100 ஐ 2 இனால் வகுப்பதன் மூலம் இதனைப் பெறலாம் என்பதையும் நாம் அறிவோம்.

அதனை ரூ. $100\div 2$ என எழுதலாம்.

அதாவது ரூ. $100\times\frac{1}{2}$ ஆகும் (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்).

அதற்கேற்ப 100 இன் $\frac{1}{2} = \overset{50}{\cancel{100}}\times\frac{1}{\cancel{2}} = 50$

மேற்குறித்த விடயங்களுக்கேற்ப 100 இன் $\frac{1}{2} = 100\times\frac{1}{2}$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறு 20 இன் $\frac{1}{5}$ எவ்வளவெனப் பார்ப்போம்.

இந்த அளவு, அதாவது 20 ஐ 5 சம பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றில் ஒரு பகுதியாகும்.

$20 \div 5$ என எழுதலாம்.

அதாவது $20 \times \frac{1}{5}$ ஆகும் (நிகர்மாற்றினால் பெருக்கல்).

அதற்கேற்ப $\overset{4}{\cancel{20}} \times \frac{1}{\cancel{5}} = 4$.

மேற்குறித்த விடயங்களுக்கு ஏற்ப 20 இன் $\frac{1}{5} = 20 \times \frac{1}{5}$ என எழுதலாம்.

மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்கேற்ப "இன்" இற்குப் பதிலாகப் பெருக்கல் என்னும் கணிதச் செய்கையைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

ரூ. 100 இன் $\frac{1}{2} =$ ரூ. $100 \times \frac{1}{2}$

20 இன் $\frac{1}{5} = 20 \times \frac{1}{5}$

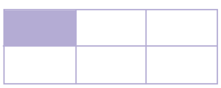
இப்போது $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ எவ்வளவெனப் பார்ப்போம்.
இதனைப் பின்வருமாறு உருக்களின் மூலம் காட்டுவோம்.
ஓர் அலகை மூன்று சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்போது அவற்றில் ஒரு பகுதி $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

இந்த அளவை ஓர் அலகாக எடுக்கும்போது அதன் $\frac{1}{3}$ அளவு கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

$\frac{1}{3}$

இந்நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் $\frac{1}{2}$ ஐ வேறுபடுத்திக் காட்டுவோம்.

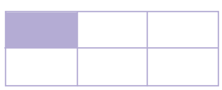
$\frac{1}{2}$



இதற்கேற்ப

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ அதாவது $\frac{1}{6}$ ஆகும்.



உருவிற்கேற்ப $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ ஆனது $\frac{1}{6}$ ஆகும் என்பது தெளிவாகும்.

அதாவது ஒரு குறித்த அலகில் $\frac{1}{3}$ ஐ எடுத்து அந்த $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ ஐ எடுத்தால் கிடைக்கும் பகுதி தொடக்க அலகின் $\frac{1}{6}$ இற்குச் சமமாகும்.

எனினும், பின்னங்களைப் பெருக்கல் பற்றி நாம் கற்றுள்ளவாறு $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ என நாம் எடுத்துரைக்கலாம்.

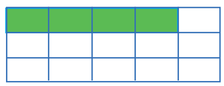
மேலும் ஓர் உதாரணத்தை எடுத்து இதனை உறுதிப்படுத்துவோம். அதற்காக $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$ ஐக் காண்போம்.

இதற்காக ஓர் அலகாகப் பின்வரும் செவ்வகப் பிரதேசத்தைக் கருதுவோம்.

$\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$

$\frac{4}{15}$



உருவிற்கேற்ப $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$ ஆனது $\frac{4}{15}$ என்பது தெளிவாகும்.

மேலும் $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$.

இதற்கேற்ப $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$ என எழுதலாம்.

$\frac{1}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{1}{3}$ ஆகியவற்றில் 'இன்' மூலம் காட்டப்படும் விடயங்களுக்குப் பதிலாகப் பெருக்கற் கணிதச் செய்கையைப் பிரயோகித்துப் பெறுமானத்தைப் பெறலாம் என்பது தெளிவாகும்.

உதாரணம் 1

$\frac{2}{3}$ இன் $\frac{1}{2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\frac{2}{3}$ இன் $\frac{1}{2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}_1}$ ("இன்" இற்கு × ஐப் பிரயோகித்தல்)

$= \frac{1}{3}$

உதாரணம் 2

$1\frac{4}{5}$ இன் $\frac{2}{3}$ எவ்வளவு?

$1\frac{4}{5}$ இன் $\frac{2}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{5} \times \frac{2}{\cancel{3}_1}$

$= \frac{6}{5}$

$= 1\frac{1}{5}$

உதாரணம் 3

500 m இன் $\frac{3}{5}$ எத்தனை மீற்றர்களாகும்?

$$500 \text{ இன் } \frac{3}{5} = \overset{100}{\cancel{500}} \times \frac{3}{\cancel{5}_1}$$

$$= 300 \text{ m}$$

பயிற்சி 3.1

1. சுருக்குக.

(i) $\frac{4}{5}$ இன் $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{3}$ இன் $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{5}{8}$ இன் $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{11}$ இன் $\frac{5}{6}$

(v) $1\frac{3}{4}$ இன் $\frac{2}{7}$ (vi) $2\frac{5}{8}$ இன் $1\frac{1}{3}$ (vii) $5\frac{1}{2}$ இன் $1\frac{3}{11}$ (viii) $1\frac{4}{5}$ இன் $\frac{5}{9}$

2. பெறுமானம் காண்க.

(i) ரூ. 64 இன் $\frac{3}{4}$ எத்தனை ரூபாய்? (ii) 400 g இன் $\frac{2}{5}$ எத்தனை கிராம்?

(iii) 6 ha இன் $\frac{1}{3}$ எத்தனை ஹெக்ரெயர்? (iv) 1km இன் $\frac{1}{8}$ எத்தனை மீற்றர்?

3. ஒரு காணியின் $\frac{3}{5}$ இற்கு உரித்தான ஒருவர் அதில் $\frac{1}{3}$ ஐத் தனது மகளுக்குக் கொடுக்கும்போது கிடைக்கும் காணிப் பகுதி மொத்தக் காணியில் என்ன பின்னம்?

4. நிமலனின் மாத வருமானம் ரூ. 40 000 ஆகும். அவர் அப்பணத்தின் $\frac{1}{8}$ ஐப் பயணச் செலவுகளுக்காகப் பயன்படுத்துகின்றார். அப்பணம் எவ்வளவு?

3.2 அடைப்புக்குறிகளுடனான கோவைகளை BODMAS ஒழுங்குக்கு அமையச் சுருக்குதல்

அடைப்புகள் உள்ள ஒரு கோவையில் (அல்லது அட்சரகணிதக் கோவையில்) கூட்டல், கழித்தல், வகுத்தல், பெருக்கல், வலுவுக்கு உயர்த்தல் போன்ற பல கணிதச் செய்கைகள் இடம்பெறலாம். அத்தகைய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் கணிதச் செய்கைகள் செய்யப்படும் ஒழுங்குமுறை பற்றிய ஒரு பொது வழக்கும் அவ்வழக்கை எடுத்துகாட்டும் விதிகளும் இருத்தல் வேண்டும். இவ்வாறான சில விதிகள் பற்றி நீங்கள் தரம் 7 இல் கற்றுள்ளீர்கள். தற்போது இதற்கு மேலதிகமாக BODMAS என அழைக்கப்படும் செய்கைகளின் ஒழுங்குமுறை பற்றி விரிவாகப் பார்ப்போம்.

BODMAS இல் உள்ள ஆங்கில எழுத்துகளினால் முறையே அடைப்பு (bracket), இன்/வலு (of / order), வகுத்தல் (division), பெருக்கல் (multiplication), கூட்டல் (addition), கழித்தல் (subtraction) ஆகியன காட்டப்படுகின்றன. கோவைகளைச் சுருக்கும்போது இந்த எழுத்துகளினால் காட்டப்படும் ஒழுங்குமுறையில் முன்னுரிமை அளித்து கணிதச் செய்கைகளைச் செய்து சுருக்க வேண்டிய போதிலும் சில கணிதச் செய்கைகளின் முன்னுரிமைகள் சமமாகும். பெருக்கலும் வகுத்தலும் சம முன்னுரிமைகள் இருக்கும் அதே வேளை கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் சம முன்னுரிமைகள் உள்ளன. இதற்கேற்பக் கோவைகளைப் பின்வரும் ஒழுங்கு முறையில் சுருக்குதல் வேண்டும்.

1. முதலில் அடைப்புகளுடனான கோவைகள் இருப்பின் அவற்றைச் சுருக்குதல் வேண்டும்.

2. இரண்டாவதாக ''இன்'' என்னும் கணிதச் செய்கையை அல்லது வலுவைச் (அதாவது கோவையில் இடம்பெறும் வலுவை) சுருக்குதல் வேண்டும்.

* வலு இடம்பெறும் கோவைகளைச் சுருக்குதல் பாடவிதானத்தில் உள்ளடக்கப் படவில்லை.

3. மூன்றாவதாக வகுத்தலையும் பெருக்கலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு வகுத்தலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் சம முன்னுரிமை இருக்கும் அதே வேளை அவ்விரு கணிதச் செய்கைகளும் இருப்பின் இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கலைச் செய்யும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

4. நான்காவதாகக் கூட்டலையும் கழித்தலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு இரு கணிதச் செய்கைகளுக்கும் சம முன்னுரிமைகள் அளிக்கப்படும் அதே வேளை மேலே 3 இல் உள்ளவாறு இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

இங்கு BODMAS விதிகளைப் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும் பயன்படுத்தலாம். எனினும் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகளில் ''இன்'' பயன்படுத்தப்படும் சந்தர்ப்பங்களும் உள்ளன. உதாரணமாக

$\frac{6}{25}$ இன் $\frac{5}{12}$ ஐக் காட்டலாம்.

இக்கோவையின் கருத்து

$\frac{6}{25} \times \frac{5}{12}$ என்பதாகும்.

ஓரளவு சிக்கலான கோவையாகிய $\frac{2}{3} \div \frac{6}{25}$ இன் $\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}$ ஐச் சுருக்கத்தக்க விதம் பற்றிய ஒரு பொது இணக்கம் தேவை. அதில் "இன்" என்பதற்கு $\div$, $\times$ ஆகியவற்றிலும் பார்க்கக் கூடுதலான முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

குறிப்பு

"$\frac{6}{25}$ இன் $\frac{5}{12}$" என்பது ஆங்கில மொழியில் "$\frac{5}{12}$ of $\frac{6}{25}$" என எழுதப்படும். ''வலுவுக்கு உயர்த்தல்'', ''இன்'' என்னும் கணிதச் செய்கைகளுக்குச் சம முன்னுரிமை இருக்கின்றமையால், சில சந்தர்ப்பங்களில் BODMAS இல் உள்ள எழுத்து O இன் மூலம் "Of ", "Order " என்னும் இரு கணிதச் செய்கைகளும் காட்டப்படுவதாகக் கருதப்படும். ஆனால் இப்பாடத்தில் ''Of'' மட்டும் இடம்பெறும் கோவைகள் மட்டும் காணப்படும்.

$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div \frac{3}{2}$ இன் $\frac{4}{3}$ என்னும் பின்னங்கள் இடம்பெறும் கோவையை BODMAS ஒழுங்குமுறைக்கு ஏற்பச் சுருக்கும் முறையைப் பார்ப்போம்.

$\frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div \frac{3}{2}$ இன் $\frac{4}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right)$ (முதலில் செய்யவேண்டிய ''இன்'' இற்காக $\times$ ஐப் பிரயோகித்து அது முதலில் செய்யப்பட வேண்டும் என்பதற்காக அடைப்புகளை இடுவோம்.)

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \div 2$

$= \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}\right) \div 2$ (அடுத்ததாகச் செய்ய வேண்டிய கணிதச் செய்கைக்காக அடைப்புகளை இடுவதன் மூலம்)

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{2}$ (இரண்டினால் வகுப்பதற்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}$ இனால் பெருக்குவதன் மூலம்)

$= \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{12} \times \frac{1}{2}\right)$ (முதலில் செய்ய வேண்டிய கணிதச் செய்கையைக் காட்டுவதற்கு அடைப்புகளை இடுவதன் மூலம்)

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$

$= \frac{6}{24} + \frac{5}{24}$ (இரு பின்னங்களையும் ஒரு பொதுப் பகுதியுடன் எழுதுவதன் மூலம்)

$= \frac{11}{24}$

குறிப்பு

உண்மையில் ஒரு கோவையில் அடைப்புகளை இட்டுக் கணிதச் செய்கைகள் நடைபெறும் விதத்தை எளிதாகக் காட்டலாம்.

$\frac{5}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{5}$ இன் $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} \div \frac{8}{9}$ ஐ BODMAS விதிகளுக்கேற்பச் செய்ய வேண்டிய விதத்தைப் பின்வருமாறு அடைப்புகளுடன் காட்டலாம்.

$$\left(\frac{5}{4} \times \frac{3}{4}\right) - \left(\left(\left(\frac{1}{5} \text{ இன் } \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{3}\right) \div \frac{8}{9}\right)$$

அடைப்புகளை இடுவதால் பிரதிகூலங்களும் உள்ளன. அடைப்புகளை இடும்போது கிடைக்கும் கோவை நீண்டதாக இருக்கும் அதே வேளை அது சிக்கலானதாகவும் காணப்படும். கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி இத்தகைய ஒரு கோவையைச் சுருக்கும்போது இவ்வடைப்புகளைக் கவனமாக இடுதல் வேண்டும். இதற்குத் தாமதமும் ஏற்படலாம். இத்தகைய பல காரணங்களுக்காக, அடைப்புகள் இல்லாத கோவைகள் எழுதப்படும்போது அவை சுருக்கப்படும் விதம் பற்றிய வழக்கிற்கு வருதல் முக்கியமானது. விசேடமாகக் கணினிகள், கணிகருவிகள் ஆகியவற்றை உற்பத்தி செய்கையில் இத்தகைய வழக்கு முக்கியமானதாகும். ஆயினும் விடயங்கள் அவ்வாறு இருப்பினும் முழு உலகமும் ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்க ஒரு பொது வழக்கு இதுவரையும் ஏற்படுத்தப்படவில்லை. உலகில் பல்வேறு நாடுகள் வெவ்வேறு வழக்குகளைப் பயன்படுத்துகின்றன. ஓர் உதாரணமாக வெவ்வேறு வகைக் கணிகருவிகளை உற்பத்திசெய்யும் கம்பனிகள் பல்வேறு வழக்குகளைத் தமது கணிகருவி நிகழ்ச்சி நிரலில் பயன்படுத்துகின்றன.

BODMAS வழக்கைப் பயன்படுத்திப் பின்னங்கள் உள்ள கோவைகள் சுருக்கப்படும் விதம் பற்றி மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$ இன் $\frac{4}{10}$ ஐச் சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) \text{ இன் } \frac{4}{10} = \left(\frac{2}{12} + \frac{3}{12}\right) \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{1}{6}$$

உதாரணம் 2

$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ இன் $\left(1\frac{2}{5}\div 2\frac{1}{3}\right)$ ஐச் சுருக்குக.

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) \text{ இன் } \left(1\frac{2}{5}\div 2\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\right) \text{ இன் } \left(\frac{7}{5}\div\frac{7}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{\cancel{7}^{1}}{5}\times\frac{3}{\cancel{7}_{1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{6}_{2}}\times\frac{\cancel{3}^{1}}{5}$$

$$=\frac{1}{10}$$

பயிற்சி 3.2

1. சுருக்கி, விடையை மிக எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}$ (ii) $3\frac{1}{3}\div 2\frac{1}{6}$ இன் $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$

(iv) $\left(3\frac{1}{3}\div 2\frac{1}{6}\right)$ இன் $\frac{1}{4}$ (v) $3\frac{3}{4}\div\left(2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}\right)$ (vi) $\left(1\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

(vii) $2\frac{2}{3}\times\left(1\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)\div 2\frac{1}{3}$ (viii) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ இன் $\frac{5}{6}\div\frac{7}{18}$

2. ஒருவர் தனது வருமானத்தில் $\frac{1}{4}$ ஐ உணவுக்கும் $\frac{1}{2}$ ஐ வியாபாரத்திற்கும் எஞ்சிய பகுதியைச் சேமிப்புக்கும் ஒதுக்கியுள்ளார். சேமிக்கும் பகுதி மொத்த வருமானத்தில் என்ன பின்னமாகும்?

3. குமுதினி ஒரு பயணத்தின் மொத்தத் தூரத்தில் $\frac{1}{8}$ ஐ நடந்தும் $\frac{2}{3}$ ஐப் புகையிரதத்திலும் எஞ்சிய தூரத்தைப் பேருந்திலும் சென்றார்.

(i) நடந்தும் புகையிரதத்திலும் சென்ற தூரங்களை மொத்தத் தூரத்தின் பின்னமாகக் காட்டுக.

(ii) பேருந்தில் சென்ற தூரத்தை மொத்தத் தூரத்தின் பின்னமாகக் காட்டுக.

4. தந்தையொருவர் தன்னிடம் உள்ள காணியில் $\frac{1}{2}$ ஐத் தனது மகனுக்கும் $\frac{1}{3}$ ஐத் தனது மகளிற்கும் கொடுத்தார். மகன் தனது பங்கில் $\frac{1}{5}$ ஐயும் மகள் தனது பங்கில் $\frac{2}{5}$ ஐயும் தொண்டர் நிறுவனம் ஒன்றிற்கு நன்கொடையாகக் கொடுத்தனர். அத்தொண்டர் நிறுவனம் அதற்குக் கிடைத்த காணியில் $\frac{1}{2}$ இல் கட்டடம் ஒன்றைக் கட்டத் தீர்மானித்தது. முழுக் காணியில் (ஆரம்பத்தில் இருந்த) என்ன பங்கில் கட்டடம் அமைந்துள்ளது.

மேலதிக அறிவிற்கு

$8 - 3 \times (4 + 1) + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4$ என்னும் எண் கோவையை BODMAS ஒழுங்கு முறையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு சுருக்கலாம் எனப் பார்ப்போம்.

$$8 - 3 \times (4 + 1) + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4$$

1. முதலில் அடைப்புகளினுள்ளே இருக்கும் கோவை $4 + 1$ ஐச் சுருக்கல் வேண்டும். அது 5 ஆகும். அப்போது

$$8 - 3 \times 5 + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4$$

2. அதன் பின்னர் 3^2 என்னும் வலுவைச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 9 ஆகும்.
அப்போது $8 - 3 \times 5 + 12 \div 3 \times 9 \div 4$

3. • அதன் பின்னர் பெருக்கலையும் வகுத்தலையும் இடமிருந்து வலமாக ஒவ்வொன்றாகச் செய்தல் வேண்டும். 3×5 உள்ளது. அது 15 ஆகும்.

$$8 - 15 + 12 \div 3 \times 9 \div 4$$

- அதன் பின்னர் $12 \div 3$ ஐச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 4 ஆகும். அப்போது

$$8 - 15 + 4 \times 9 \div 4$$

- அதன் பின்னர் 4×9 ஐச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 36 ஆகும். அப்போது

$$8 - 15 + 36 \div 4$$

- அதன் பின்னர் $36 \div 4$ ஐச் சுருக்குதல் வேண்டும். அது 9 ஆகும். அப்போது

$$8 - 15 + 9$$

4. • இப்போது கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் சம முன்னுரிமை இருப்பதனால் இடமிருந்து வலமாகக் கணிதச் செய்கை நடைபெறும்.

$$-7 + 9$$

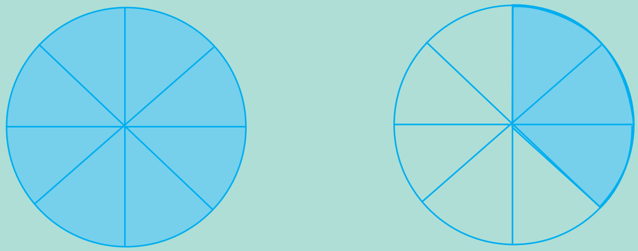
- இறுதியாக $-7 + 9 = 2$ கிடைக்கும்.

இதற்கேற்ப BODMAS விதிகளுக்கமையச் சுருக்கும்போது

$$8 - 3 \times (4 + 1) + 12 \div 3 \times 3^2 \div 4 = 2.$$

மேலதிக அறிவிற்கு

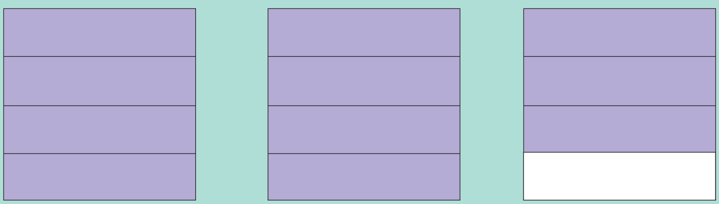
இந்தப் பாடத்தில் பக்க எண் 29 இல் உள்ள இவ்வுருவை மீண்டும் கருதுவோம்.



இதில் உள்ள ஒரு வட்டத்தை ஓர் அலகாகக் கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் $1\frac{3}{8}$ அதாவது $\frac{11}{8}$ எனப் பார்த்தோம்.

இப்போது இதில் உள்ள இரு வட்டங்களையும் ஓர் அலகாகக் கருதினால் நிழற்றப்பட்ட பின்னம் $\frac{11}{16}$ ஆகும்.

தற்போது இதனைக் கொண்டு கீழே உள்ள உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.



இங்கு சதுரத்தை ஓர் அலகாகக் கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் $2\frac{3}{4}$ ஆகும். அதாவது $\frac{11}{4}$ ஆகும்.

a. 3 சதுரங்களையும் ஓர் அலகாகக் கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் யாது?

b. இரண்டு செவ்வகக் கீலங்களை ஓர் அலகாகக் ($\frac{1}{2}$சதுரத்தை) கொண்டால் கிடைக்கும் பின்னம் யாது?

விடைகள்

a. $\frac{11}{12}$ **b.** $5\frac{1}{2}$

மேலதிக அறிவிற்கு எனத் தரப்பட்டுள்ள விடயங்கள் பாடத்திட்டத்தில் உள்ளடக்கப்படவில்லை. ஆகவே இவை தொடர்பாக மதிப்பிடப்படமாட்டாது.

பொழிப்பு

- பின்னங்களைச் சுருக்குவதற்கு BODMAS ஒழுங்குமுறைக்கமையப் பின்வரும் ஒழுங்கில் எண் கோவைகள் சுருக்கப்படும்.

1. முதலில் அடைப்புகளுடனான கோவைகள் இருப்பின் அவற்றைச் சுருக்குதல் வேண்டும்.

2. இரண்டாவதாக ''இன்'' என்னும் கணிதச் செய்கையை அல்லது வலுவைச் (அதாவது கோவையில் இடம்பெறும் வலுவை) சுருக்குதல் வேண்டும்.

➤ வலு இடம்பெறும் கோவைகளைச் சுருக்குதல் பாடவிதானத்தில் உள்ளடக்கப் படவில்லை.

3. மூன்றாவதாக வகுத்தலையும் பெருக்கலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு வகுத்தலுக்கும் பெருக்கலும் சம முன்னுரிமை இருக்கும் அதே வேளை அவ்விரு கணிதச் செய்கைகளும் இருப்பின் இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கலைச் செய்யும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

4. நான்காவதாகக் கூட்டலையும் கழித்தலையும் செய்தல் வேண்டும். இங்கு இரு கணிதச் செய்கைகளுக்கும் சம முன்னுரிமைகள் அளிக்கப்படும் அதே வேளை மேலே 3 இல் உள்ளவாறு இடமிருந்து வலமாகச் சுருக்கும்போது இவற்றுள் முதலில் எதிர்ப்படும் கணிதச் செய்கைக்கு முன்னுரிமை அளிக்கப்படும்.

4 சதவீதம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- வணிகத்தில் கிடைக்கும் இலாபத்தை அல்லது நட்டத்தை அளவுரீதியாகக் காண்பதற்கும்
- இலாபத்தின் அல்லது நட்டத்தின் சதவீதத்தைக் கணிப்பதற்கும்
- கழிவு, தரகு என்பவை யாவை என அறிந்து கொள்வதற்கும்
- குறித்த விலை, கழிவு, தரகு என்பன தொடர்பான கணித்தல்களைச் செய்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

4.1 இலாபமும் நட்டமும்

நாம் அன்றாடம் பயன்படுத்தும் அனேகமானவை வியாபார நிலையங்களில் வாங்கிய பொருள்களேயாகும். அப்பொருள்களை விற்பனை செய்வோர் வியாபாரிகள் எனவும் அப்பொருள்களை வாங்குவோர் வாடிக்கையாளர்கள் (நுகர்வோர்) எனவும் அழைக்கப்படுவர்.

வியாபாரிகள் அவர்கள் உற்பத்திசெய்த பொருள்களை அல்லது வேறொரு நபரிடம் வாங்கிய பொருள்களையே விற்கின்றனர். அவ்வாறு உற்பத்திசெய்யும்போது அல்லது வாங்கும்போது யாதாயினுமொரு செலவைச் செய்ய வேண்டியேற்படும். இவ்வாறு செலவொன்றைச் செய்து பெற்றுக்கொண்ட ஒரு பொருள் செலவு செய்த தொகையிலும் கூடிய விலையில் விற்கப்படும். இவ்வாறு விற்கும்போது வியாபாரிக்கு அவ்வியாபாரத்தினால் ஓர் **இலாபம்** கிடைக்கின்றது எனக் கூறப்படும்.
எப்போதும் ஒரு வியாபாரி தனது பொருள்களை இலாபமுடையதாக விற்க

முடியாது. உதாரணமாகப் பொருள்கள் பழுதடைதல் அல்லது காலாவதியாவதற்கு அண்மித்தல் காரணமாக அப்பொருள்களைச் செலவு செய்யப்பட்ட தொகையிலும் குறைந்த விலையில் விற்கவேண்டி ஏற்படும். இவ்வாறு விற்கும்போது வியாபாரிக்கு அவ்வியாபாரத்தினால் ஒரு **நட்டம்** ஏற்படுகிறது எனக் கூறப்படும். வியாபாரி யாதாயினுமொரு பொருளைப் பெற்றுக்கொள்ள முதலீடு செய்த தொகைக்கே அப்பொருளை விற்றால் அங்கு இலாபமோ நட்டமோ ஏற்படாது.

இதற்கேற்ப

விற்பனை விலை (வருமானம்) $>$ செலவினம் ஆயின்,

அப்போது ஓர் இலாபம் கிடைப்பதுடன்

இலாபம் = விற்பனை விலை − செலவினம்

என வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும். அவ்வாறே

செலவினம் $>$ விற்பனை விலை ஆயின் அப்போது நட்டம் ஏற்படுவதுடன்

நட்டம் = செலவினம் − விற்பனை விலை

என வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும்.

குறிப்பு

செலவினம் எனப்படுவது ஒரு பொருளை விற்பனை நிலைக்குக் கொண்டு வரும்வரை ஏற்படும் செலவுகள் ஆகும் (உதாரணம்: உற்பத்திச் செலவு, கொள்விலை போன்றவை).

உதாரணம் 1

பாதணிகளை உற்பத்திசெய்யும் ஒரு நிறுவனம் ஒரு சோடி பாதணிகளை உற்பத்திசெய்வதற்கு ரூ. 1 000 ஐச் செலவு செய்கின்றது. அந்நிறுவனம் ஒரு சோடி பாதணிகளை ரூ. 2 600 இற்கு விற்பனை செய்கின்றது. ஒரு சோடிப் பாதணிகளை விற்பதன் மூலம் நிறுவனம் பெறும் இலாபத்தைக் காண்க.

ஒரு சோடி பாதணிகளின் உற்பத்திச் செலவு = ரூ. 1 000

விற்பனை விலை = ரூ. 2 600

$\therefore$ பெற்ற இலாபம் = ரூ. 2 600 − 1 000

= ரூ. 1 600

உதாரணம் 2

ஒரு வியாபாரி ஒன்று ரூ. 45 வீதம் வாங்கிய 50 தேங்காய்களை ஒன்று ரூ. 60 வீதம் விற்றால் அவ்வியாபாரத்தினால் அவன் பெற்ற இலாபத்தைக் கணிக்க.

முறை I

தேங்காய்களை வாங்கிய விலை $=$ ரூ. 45×50
$=$ ரூ. 2 250
தேங்காய்களை விற்றுப் பெற்ற பணம் $=$ ரூ. 60×50
$=$ ரூ. 3 000
தேங்காய்களை விற்பதால்
பெற்ற இலாபம் $=$ ரூ. 3 000 – 2 250
$=$ ரூ. 750

முறை II

ஒரு தேங்காயை வாங்கிய விலை $=$ ரூ. 45
ஒரு தேங்காயை விற்ற விலை $=$ ரூ. 60
ஒரு தேங்காயை விற்பதால் பெற்ற இலாபம் $=$ ரூ. 60 – 45
$=$ ரூ. 15
தேங்காய்களை விற்பதால் பெற்ற இலாபம் $=$ ரூ. 15×50
$=$ ரூ. 750

உதாரணம் 3

ஒரு வியாபாரி ஒன்று ரூ. 20 வீதம் வாங்கிய 100 மாம்பழங்களைப் போக்குவரத்தின் போது ஏற்பட்ட சேதத்தின் காரணமாக ஒன்று ரூ. 18 வீதம் விற்பதற்குத் தீர்மானித்தான். வியாபாரி அடைந்த நட்டத்தைக் கணிக்க.

முறை I

மாம்பழங்களை வாங்கிய விலை $=$ ரூ. 20×100
$=$ ரூ. 2 000
மாம்பழங்களை விற்பதால்
பெற்ற பணம் $=$ ரூ. 18×100
$=$ ரூ. 1 800
மாம்பழங்களை விற்பதால்
அடைந்த நட்டம் $=$ ரூ. 2 000 – 1 800
$=$ ரூ. 200

முறை II

ஒரு மாம்பழத்தை வாங்கிய விலை $=$ ரூ. 20

ஒரு மாம்பழத்தை விற்ற விலை $=$ ரூ. 18

ஒரு மாம்பழத்தை விற்பதால் அடையும் நட்டம் $=$ ரூ. $20 - 18$

$=$ ரூ. 2

மாம்பழங்களை விற்பதால் அடைந்த நட்டம் $=$ ரூ. 2×100

$=$ ரூ. 200

உதாரணம் 4

ஒரு வியாபாரி 60 kg மரவள்ளிக் கிழங்கை கிலோ ஒன்று ரூ. 50 வீதம் விவசாயிகளிடமிருந்து வாங்கினான். வியாபாரி முதல் நாளில் 20 kg ஐ 1 kg ரூ. 70 வீதம் விற்றான். எஞ்சியதை அடுத்த நாள் முதலில் 15 kg ஐ 1 kg ரூ. 60 வீதமும் மேலும் 5 kg ஐ 1 kg ரூ. 50 வீதமும் அடுத்த 10 kg ஐ 1 kg ரூ. 40 வீதமும் விற்பனை செய்வதுடன் எஞ்சிய 10 kg ஐ விற்பனை செய்ய முடியாது ஒதுக்கி விட்டான். வியாபாரி மரவள்ளிக் கிழங்கு வியாபாரத்தில் அடைந்தது இலபமா அல்லது நட்டமா என்பதைத் தீர்மானித்து அந்த இலாபம் அல்லது நட்டம் எவ்வளவு எனக் காண்க.

மரவள்ளிக் கிழங்கை வாங்குவதற்கு செலவாகிய பணம் $=$ ரூ. 50×60

$=$ ரூ. 3000

முதல் நாளில் விற்பனையால் பெற்ற பணம் $=$ ரூ. 70×20

$=$ ரூ. 1400

இரண்டாம் நாளில் முதல் 15 kg விற்பனையால் பெற்ற பணம் $=$ ரூ. 60×15

$=$ ரூ. 900

அடுத்த 5 kg விற்பனையால் பெற்ற பணம் $=$ ரூ. 50×5

$=$ ரூ. 250

அடுத்த 10 kg விற்பனையால் பெற்ற பணம் $=$ ரூ. 40×10

$=$ ரூ. 400

மரவள்ளிக் கிழங்கு விற்பனையால் பெற்ற மொத்தப் பணம் $=$ ரூ. $1\,400 + 900 + 250 + 400$

$=$ ரூ. 2950

$3000 > 2950$ என்பதால் வியாபாரி நட்டம் அடைந்துள்ளான்.

வியாபாரி அடைந்த நட்டம் $=$ ரூ. $3000 - 2950$

$=$ ரூ. 50

பயிற்சி 4.1

1. தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

பொருள்	கொள்விலை/ உற்பத்திச் செலவு (ரூ.)	விற்பனை விலை (ரூ.)	இலாபம் /நட்டம்	இலாபம் /நட்டப் பெறுமானம் (ரூ.)
கைக்கடிகாரம்	500	750	....	....
பாடசாலைப் புத்தகப் பை	1 200	1 050	....	....
கணிகருவி	....	1 800	இலாபம்	300
பானப் போத்தல்	....	750	நட்டம்	175
தண்ணீர்ப் போத்தல்	350	....	நட்டம்	50
கணித உபகரணப்பெட்டி	275	....	இலாபம்	75
குடை	....	450	நட்டம்	100
பாதணி	....	700	இலாபம்	150

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சோடி சந்தர்ப்பங்களிலும் கூடிய இலாபமுடைய வியாபாரம் எதுவெனத் தெரிக.

(i) ரூ. 50 வீதம் வாங்கிய மாங்காய்களை ரூ. 60 வீதம் விற்றல்
ரூ. 50 வீதம் வாங்கிய தோடம்பழங்களை ரூ. 55 வீதம் விற்றல்

(ii) ரூ. 40 வீதம் வாங்கிய தேங்காய்களை ரூ. 60 வீதம் விற்றல்
ரூ. 50 வீதம் வாங்கிய ஈரப்பலாக்காய்களை ரூ. 60 வீதம் விற்றல்

(iii) ரூ. 10 வீதம் வாங்கிய ஒரு பேனாவை ரூ. 15 வீதம் விற்றல்
ரூ. 25 வீதம் வாங்கிய ஒரு புத்தகத்தை ரூ. 28 வீதம் விற்றல்

3. ஒரு வியாபாரி ரூ. 3 வீதம் 100 றம்புட்டான் பழங்களை வாங்கி அவற்றில் 10 பழங்கள் சேதமானதால் வைத்துக்கொண்டு எஞ்சியவற்றை ரூ. 5 வீதம் விற்றான். இவ்வியாபாரத்தின் மூலம் அவன் அடைவது இலாபமா, நட்டமா என்பதைத் தீர்மானித்து அவ்விலாபம் அல்லது நட்டம் யாது எனக் காண்க.

4. ஒரு வியாபாரி 1 கிலோகிராம் ரூ. 60 வீதம் 50 kg போஞ்சியை வாங்கினான். முதல் தினத்தில் 1 கிலோகிராம் ரூ. 75 வீதம் 22 kg போஞ்சியையும் இரண்டாம் தினத்தில் 1 கிலோகிராம் ரூ. 70 வீதம் எஞ்சிய போஞ்சியையும் விற்றான்.

(i) வியாபாரி ஒவ்வொரு தினமும் பெற்ற இலாபத்தைத் தனித்தனியே கணித்து எத்தினத்தில் கூடிய இலாபம் பெறப்பட்டது என்பதைத் தீர்மானிக்க.

(ii) வியாபாரி இரண்டு தினங்களிலும் பெற்ற மொத்த இலாபத்தைக் காண்க.

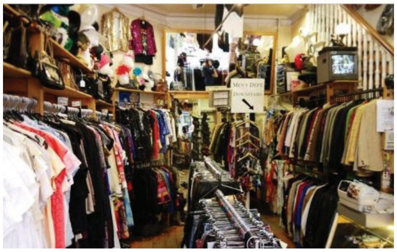
5. ஒரு பிரம்புக் கதிரையின் உற்பத்திச் செலவு ரூ. 650 ஆகும். ஓர் உற்பத்தியாளர் அவ்வாறான 20 கதிரைகளை உற்பத்திசெய்தான். இக்கதிரைகள் அனைத்தையும் விற்று ரூ. 7 000 ஐ இலாபமாகப் பெற அவன் எண்ணினான். இதற்காக அவன் ஒரு கதிரையை விற்க வேண்டிய விலை யாது?

6. ஒரு மொத்த விற்பனையாளரிடம் அப்பிள்களை வாங்கி அவற்றை விற்பனை செய்யும் ஒரு சில்லறை வியாபாரி குறித்த ஒரு தினத்தில் 200 அப்பிள்களை ஒன்று ரூ. 25 வீதம் வாங்கினான். அன்றைய தினம் அவை அனைத்தையும் விற்பதன் மூலம் ரூ. 1000 ஐ இலாபமாகப் பெற அவன் எதிர்பார்த்தான். இதற்காக அவன் ஓர் அப்பிளை விற்க வேண்டிய விலையைக் காண்க.

7. ஒரு வியாபாரி 50 kg உப்பை 1 kg ரூ. 60 வீதம் வாங்கியதுடன் அவற்றில் 30 kg ஐ ஒரு கிலோகிராம் ரூ. 80 வீதம் விற்றான். எஞ்சிய உப்பு பழுதடையும் நிலையில் இருந்ததால் அதனைக் குறைந்த விலைக்கு விற்றதுடன் இறுதியில் உப்பு வியாபாரத்தினால் வியாபாரிக்கு இலாபமோ, நட்டமோ ஏற்படவில்லை. வியாபாரி எஞ்சிய உப்பை ஒரு கிலோகிராம் என்ன விலை வீதம் விற்றான் எனக் காண்க.

4.2 இலாப, நட்டச் சதவீதம்

ரமேசும் சுரேசும் இரண்டு வியாபாரிகள் ஆவர். ரமேஸ் ஒரு புடைவைக் கடை நடத்துவதுடன் அவன் ரூ. 800 வீதம் வாங்கிய ஒரு காற்சட்டையை ரூ. 900 வீதம் விற்கிறான். சுரேஸ் மின் உபகரணக் கடையை நடத்துவதுடன் அவன் ரூ. 2500 இற்கு வாங்கிய மின் கேத்தலை ரூ. 2600 வீதம் விற்கின்றான்.



இங்கு ரமேசும் சுரேசும் விற்கும் பொருள்கள் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடுவதுடன் அவற்றின் கொள்விலை, விற்பனை விலை என்பவையும் சமனானவை அல்ல என்பது தெரிகின்றது. ஆயினும் இவ்விரு வியாபாரிகளும் மேற்குறித்த பொருள்களில் ஒன்று வீதம் விற்கும்போது பெறும் இலாபம் சமனானதாகும். அதாவது

ரமேஸ் ஒரு காற்சட்டையை விற்பதால் பெறும் இலாபம் = ரூ. 900 – 800
= ரூ. 100

சுரேஸ் ஒரு மின்கேத்தலை விற்பதால் பெறும் இலாபம் = ரூ. 2600 – 2500
= ரூ. 100

இதற்கேற்ப, இரண்டு வியாபாரிகளிடமும் 5000 ரூபாய் இருக்குமெனின், ''இலாபகரமான'' வியாபாரத்தில் ஈடுபடும் நபர் யார் என்பதை உங்களால் கூற முடியுமா?

ரமேசும் சுரேசும் மேற்குறித்த வியாபாரத்தின் மூலம் பெறும் இலாபப் பணம் சமனானது எனினும் குறித்த இலாபப் பணத்தைப் பெறுவதற்காக ஒவ்வொருவரும் செலவிடும் அளவுகள் சமனானவையல்ல என்பது தெளிவாகின்றது.
''இலாபகரமான '' வியாபாரத்தைத் தீர்மானிப்பதற்காக ஒவ்வொரு நபரும் செலவிட்ட பணத்தையும் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். அதனைத் தீர்மானிப்பதற்காகப் பின்வருமாறான ஒரு கணித்தலைச் செய்யலாம்.

ரமேஸ் ரூ. 800 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் = ரூ. 100

ரமேஸ் பெறும் இலாபமானது அவனது செலவின் பின்னமாக $= \dfrac{100}{800}$

சுரேஸ் ரூ. 2 500 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் = ரூ. 100

சுரேஸ் பெறும் இலாபமானது அவனது செலவின் பின்னமாக $= \dfrac{100}{2500}$

செலவிட்ட பணத்தின் பின்னங்களாக எழுதிய இலாபங்களுக்காக $\dfrac{100}{800}$, $\dfrac{100}{2500}$ ஆகிய இரண்டு பின்னங்களையும் ஒப்பிடுவது இலகுவானது. இதற்குக் காரணம் இவற்றின் தொகுதி எண்கள் சமனாக இருப்பதாகும். தொகுதியெண்கள் சமனற்ற போதும் இலாபகரமான வியாபாரத்தை இம்முறையிலேயே காண்போம். அப்போது பின்னங்களை ஒப்பிடும்போது சிரமமாகலாம் என்பதால் இப்பிரசினங்களைச் சதவீதங்களாகக் காட்டுவதே பெரும்பாலும் இடம்பெறும். அச்சதவீதங்களை இவ்வாறு கணிப்போம்.

ரமேஸ் பெறும் இலாபமானது செலவின் பின்னமாக $= \dfrac{100}{800}$ என்பதால்

ரமேஸ் பெறும் இலாபச் சதவீதம் $= \dfrac{100}{800} \times 100\%$
$= 12.5\%$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப ரமேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் ரூ. 12.50 எனத் தெளிவாகின்றது.

சுரேஸ் பெறும் இலாபமானது செலவின் பின்னமாக $= \dfrac{100}{2500}$ என்பதால்

சுரேஸ் பெறும் இலாபச் சதவீதம் $= \dfrac{100}{2500} \times 100\%$
$= 4\%$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப சுரேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்வதன் மூலம் பெறும் இலாபம் ரூ. 4 ஆகும்.

$12.5\% > 4\%$ என்பதால் இச்சந்தர்ப்பத்தில் ரமேசின் வியாபாரம் இலாபகரமானது எனத் தீர்மானிக்கப்படும்.

இச்சதவீதங்களின் கருத்தை இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.

$\frac{100}{800} \times 100$ என்பது ரமேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்தால் கிடைக்கும் இலாபமாகும்.

$\frac{100}{2500} \times 100$ என்பது சுரேஸ் ரூ. 100 ஐச் செலவு செய்தால் கிடைக்கும் இலாபமாகும்.

இதற்கேற்க, ஒரு பொருளிற்கான செலவினம் ரூ. 100 ஆகும்போது அப்பொருளை விற்பதால் கிடைக்கும் இலாபம் (அல்லது நட்டம்) இலாபச் (அல்லது நட்டச்) சதவீதம் எனப்படும். எனவே யாதாயினுமொரு வியாபாரத்தில் கிடைக்கும் இலாபத்தை அல்லது நட்டத்தை செலவினத்தின் (கொள்விலையின்) பின்னமாகக் காட்டுவதுடன் அப்பின்னத்தை 100 % இனால் பெருக்குவதன் மூலம் இலாபத்தின் அல்லது நட்டத்தின் சதவீதத்தைக் கணிக்கலாம்.

$$\text{இலாபச் சதவீதம்} = \frac{\text{இலாபம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100\%$$

$$\text{நட்டச் சதவீதம்} = \frac{\text{நட்டம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100\%$$

உதாரணம் 1

ஒரு வியாபாரி ரூ. 25 வீதம் வாங்கிய பயிற்சிப் புத்தகங்களை ரூ. 30 வீதம் விற்றால், ஒரு பயிற்சிப் புத்தகத்தை விற்பதால் பெறப்படும் இலாபச் சதவீதத்தைக் காண்க.

$$\text{இலாபம்} = \text{ரூ. } 30 - 25$$
$$= \text{ரூ. } 5$$

$$\text{இலாபச் சதவீதம்} = \frac{5}{25} \times 100\%$$
$$= 20\%$$

உதாரணம் 2

ஆடை வியாபாரி ஒருவர் ரூ. 500 இற்கு வாங்கிய காற்சட்டையை அதிலிருந்த ஒரு குறைபாடு காரணமாக ரூ. 450 இற்கு விற்றார் எனின், அவரடைந்த நட்டச் சதவீதத்தைக் காண்க.

$$\text{நட்டம்} = \text{ரூ. } 500 - 450$$
$$= \text{ரூ. } 50$$

$$\text{நட்டச் சதவீதம்} = \frac{50}{500} \times 100\%$$
$$= 10\%$$

உதாரணம் 3

ஒரு தச்சுத் தொழிலாளி ரூ. 4 000 ஐச் செலவு செய்து தயாரித்த ஒரு மேசையை ரூ. 5 600 இற்கு விற்றதுடன், ஒரு கொல்லன் ரூ. 250 ஐச் செலவு செய்து தயாரித்த ஒரு கத்தியை ரூ. 360 இற்கு விற்றான். இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களிலும் மிக இலாபகரமான வியாபாரத்தில் ஈடுபட்டவர் யார் என்பதைத் தீர்மானிக்க.

தச்சுத் தொழிலாளி பெற்ற இலாபம் முதலீட்டின் சதவீமாக $= \dfrac{1600}{4000} \times 100\% = 40\%$

கொல்லன் பெற்ற இலாபம் முதலீட்டின் சதவீதமாக $= \dfrac{110}{250} \times 100\% = 44\%$

எனவே இச்சந்தர்ப்பத்தில் மிக இலாபகரமான வியாபாரத்தில் ஈடுபட்டவர் கொல்லன் ஆவார்.

உதாரணம் 4

ஒரு வியாபாரி ரூ. 30 000 இற்கு வாங்கிய ஒரு மர அலுமாரியை 15% இலாபச் சதவீதம் பெறப்படும் வகையில் விற்றால், அலுமாரியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

முறை I

இங்கு இலாபச் சதவீதம் 15% என்பதால் கருதப்படுவது ரூ. 100 இற்கு வாங்கிய பொருளிற்கு ரூ. 15 இலாபம் பெறப்படும் என்பதாகும். இன்னொரு விதமாகக் கூறுவதாயின், ரூ. 100 இற்கு வாங்கிய பொருள் 115 இற்கு விற்கப்படும் என்பதாகும். எனவே, ரூ. 30 000 இற்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது

விற்கும் விலை $= \dfrac{115}{100} \times 30\,000$

= ரூ. 34 500

முறை II

மேலே, முறை I இல் அவதானித்தது போல ரூ. 100 இற்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது பெறப்படும் இலாபம் ரூ. 15 என்பதால்

ரூ. 30 000 இற்குக் கொள்வனவு செய்யும்போது

பெறப்படும் இலாபம் $= \dfrac{15}{100} \times$ ரூ. 30 000

= ரூ. 4 500

எனவே, பொருளின் விற்பனை விலை = செலவினம் + இலாபம்

= ரூ. 30 000 + 4 500

= ரூ. 34 500

உதாரணம் 5

ஒரு வியாபாரி ரூ. 1500 இற்கு வாங்கிய ஒரு சோடி பாதணியை 2% நட்டத்துடன் விற்றால், பாதணிச் சோடியின் விற்பனை விலை யாது?

முறை I

2% நட்டம் என்பதால்
ரூ. 100 இங்கு வாங்கிய ஒரு பொருளின்
விற்பனை விலை = ரூ. 98

$\therefore$ ரூ. 1 500 இற்கு வாங்கிய ஒரு பொருளின்

விற்பனை விலை = ரூ. $\frac{98}{100} \times 1\,500$

= ரூ. 1 470

முறை II

ஏற்பட்ட நட்டம் = ரூ. $1\,500 \times \frac{2}{100}$

= ரூ. 30

விற்பனை விலை = ரூ. 1 500 – 30

= ரூ. 1 470

உதாரணம் 6

ஒரு வியாபாரி ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை ரூ. 22 000 இற்கு விற்பதன் மூலம் 10% இலாபம் அடைந்தால் வியாபாரி தொலைக்காட்சிப் பெட்டியைக் கொள்வனவு செய்த விலையைக் காண்க.

முறை I

வாங்கிய விலை ரூ. 100 ஆகும்போது 10% இலாபம் பெற விற்கவேண்டிய விலை ரூ. 110 ஆகும்.

$\therefore$ ரூ. 110 இற்கு விற்ற பொருளின் கொள்விலை = ரூ. 100

ரூ. 22 000 இற்கு விற்ற பொருளின் கொள்விலை = ரூ. $\frac{100}{110} \times 22\,000$

= ரூ. 20 000

முறை II

பொருளின் கொள்விலை ரூ. x எனின்,

கிடைக்கும் இலாபம் = ரூ. $x \times \frac{10}{100}$

= ரூ. $\frac{x}{10}$

பொருளின் விற்பனை விலை = ரூ. $x + \frac{x}{10}$

$$\therefore\ x + \frac{x}{10} = 22\ 000$$
$$\frac{10x + x}{10} = 22\ 000$$
$$\frac{11x}{10} = 22\ 000$$
$$x = 22\ 000 \times \frac{10}{11}$$
$$x = 20\ 000$$

எனவே தொலைக்காட்சிப்பெட்டியின் கொள்விலை ரூ. 20 000 ஆகும்.

முறை III

பொருளின் கொள்விலை ரூ. x எனின்,

$$\text{விற்பனை விலை} = \text{ரூ. } x \times \frac{110}{100}$$
$$x \times \frac{110}{100} = 22\,000$$
$$x = \frac{22\,000 \times 100}{110}$$
$$= 20000$$

எனவே தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின்

கொள்விலை = ரூ. 20 000

உதாரணம் 7

ஒரு விளையாட்டு உபகரணத்தை விற்கும்போது அதிலிருந்த ஓர் உற்பத்திக் கோளாறு காரணமாக ஒரு வியாபாரி அதனை ரூ. 6 800 இற்கு விற்க நேர்ந்ததால் 15% நட்டம் அடைந்தான். விளையாட்டு உபகரணத்தின் கொள்விலையைக் காண்க.

முறை I

கொள்விலை ரூ. 100 ஆகவுள்ள உபகரணத்தை 15% நட்டத்துடன் விற்கும் விலை ரூ. 85 ஆகும்.

ரூ. 85 இற்கு விற்கும் உபகரணத்தின் கொள்விலை = ரூ. 100

ரூ. 6 800 இற்கு விற்கும் உபகரணத்தின் கொள்விலை = ரூ. $\frac{100}{85} \times 6\ 800$

= ரூ. 8 000

முறை II

உபகரணத்தின் கொள்விலை ரூ. x ஆயின்

$$\text{ஏற்பட்ட நட்டம்} = \text{ரூ. } x \times \frac{15}{100}$$

$$= \text{ரூ. } \frac{3x}{20}$$

உபகரணத்தின் விற்பனை விலை = ரூ. $x - \frac{3x}{20}$

$$\text{அப்போது } x - \frac{3x}{20} = 6\,800$$

$$\frac{20x - 3x}{20} = 6\,800$$

$$\frac{17x}{20} = 6\,800$$

$$x = 6\,800 \times \frac{20}{17}$$

$$x = 8\,000$$

பயிற்சி 4.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

கொள் விலை (ரூ)	விற்பனை விலை (ரூ)	இலாபமா/ நட்டமா	இலாபம்/ நட்டம் (ரூ)	இலாப/ நட்ட சதவீதம்
400	440	இலாபம்	40	10%
600	720	....	....	....
1500	1200	....	....	....
60	....	இலாபம்	....	60%
180	....	இலாபம்	....	30%
150	75	நட்டம்	....	....
200	....	நட்டம்	....	10%

2. ஓர் ஆடை வியாபாரி ரூ. 500 இற்கு வாங்கிய ஒரு காற்சட்டையை ரூ. 650 இற்கு விற்றால் வியாபாரி பெறும்

(i) இலாபத்தைக் காண்க.

(ii) இலாபச் சதவீதத்தைக் காண்க.

3. ரூ. 2 500 பெறுமதியுடைய ஒரு மின் அழுத்தியை ரூ. 2 300 இற்கு விற்பதால் அடையும்

(i) நட்டத்தைக் காண்க.

(ii) நட்டச் சதவீதத்தைக் காண்க.

4. ஒரு வியாபாரி ஒரு பழம் ரூ. 18 வீதம் 100 மாம்பழங்களை வாங்குகின்றார். அவற்றில் சில பழுதடைந்ததால் 20 பழங்களை அகற்றிவிட்டு எஞ்சிய பழங்களை ஒன்று ரூ. 30 வீதம் விற்கிறான். இவ்வியாபாரத்தினால் அவன் அடைந்தது இலாபமா? நட்டமா? என்பதைத் தீர்மானித்து, அவனடைந்த

(i) இலாபம்/ நட்டம்

(ii) இலாப/ நட்டச் சதவீதம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ஆடை உற்பத்தியாளர் ஒருவர் சிலவகை ஆடைகளைத் தைத்து முடிப்பதற்குச் செலவு செய்யும் பணமும் அவற்றின் விற்பனை விலையும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

ஆடை வகை	**உற்பத்திச் செலவு (ரூ)**	**விற்பனை விலை (ரூ)**
பிள்ளைகளின் மேற்சட்டை	300	350
பிள்ளைகளின் காற்சட்டை	400	450
பெண்களுக்கான சட்டை	500	575
மழை அங்கி	1000	1150

(i) மேலே குறித்த ஒவ்வொரு வகைகளையும் விற்பதால் பெறப்படும் இலாபத்தையும் இலாபச் சதவீதத்தையும் வெவ்வேறாகக் காண்க.

(ii) எவ்வகையான ஆடையை உற்பத்திசெய்வது அதிக இலாபகரமானது என்பதைக் காரணத்துடன் விளக்குக.

6. ஒரு புத்தக வியாபாரி ரூ. 300 பெறுமதியுடைய ஒரு நாவலை 25% இலாபம் கிடைக்கும் வகையில் விற்பாராயின் நாவலின் விற்பனை விலை யாது?

7. ரூ. 12 000 பெறுமதியுடைய ஒரு துவிச்சக்கரவண்டியை 10% நட்டத்துடன் விற்க வேண்டியிருந்ததாயின் துவிச்சக்கரவண்டியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

8. வீட்டுத் தளவாடங்களைத் தயாரிக்கும் ஒருவர் ஒரு கதிரையைத் தயாரிப்பதற்கான உற்பத்திச் செலவு ரூ. 1800 ஆகும். உற்பத்தியாளர் 20% இலாபச் சதவீதத்துடன் அக்கதிரையை ஒரு தளவாட வியாபாரிக்கு விற்பதுடன் வியாபாரி அதனை 20% இலாபத்துடன் ஒரு வாடிக்கையாளருக்கு விற்கிறார்.

(i) வியாபாரி ஒரு கதிரையை வாங்குவதற்குச் செலவு செய்யும் பணம் யாது?

(ii) ஒரு கதிரையை வாடிக்கையாளருக்கு விற்கும்போது கிடைக்கும் பணம் யாது?

(iii) கூடிய இலாபம் பெறுபவர் உற்பத்தியாளரா, வியாபாரியா? என்பதைக் காரணத்துடன் விளக்குக.

9. ஒரு குளிர்ச்சாதனப் பெட்டியை ரூ. 33 000 இற்கு விற்பதால் ஒரு வியாபாரி 10% இலாபம் பெறுவானாயின் குளிர்ச்சாதனப்பெட்டியின் கொள்விலையைக் காண்க.

10. ஒரு மின் அடுப்பை ரூ. 28 500 இற்கு விற்பதால் ஒரு வியாபாரி 5% நட்டம் அடைவானாயின் மின் அடுப்பின் கொள்விலையைக் காண்க.

11. சில பொருள்களை விற்பதால் ஒரு வியாபாரி அடைந்த இலாப அல்லது நட்டச் சதவீதமும் விற்பனை விலையும் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அப்பொருள்களின் கொள்விலைகளை வெவ்வேறாகக் காண்க.

பொருள்	விற்பனை விலை (ரூ)	இலாபச் சதவீதம்	நட்டச் சதவீதம்
சுவர்க்கடிகாரம்	3 240	8%	-
மின் அடுப்பு	7 500	25%	-
நிழற்படக் கருவி (camera)	12 048	-	4%

4.3 கழிவும் தரகும்

கழிவு

புத்தகங்களைக் கொள்வனவு செய்யும்போது 20% கழிவு வழங்கப்படும்.

பொருள் ஒன்றை விற்பனை செய்யும்போது அப்பொருளை விற்பனை செய்வதற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் விலை அப்பொருளின் **குறித்த விலை** (marked price) எனப்படும். நுகர்வோர் பாதுகாப்புச் சட்டத்தின்படி விற்பனை செய்யப்படும் பொருளில் அவற்றின் குறித்த விலை குறிக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

உருவில் ஒரு புத்தக விற்பனை நிலையத்தில் காட்சிப்படுத்தப்பட்டிருந்த ஒரு விளம்பரம் தரப்பட்டுள்ளது. இதில் குறிப்பிடப்பட்டிருப்பது ஒரு புத்தகத்தை வாங்கும்போது 20% கழிவு உரித்தாகும் என்பதாகும். இதனால் கருதப்படுவது, விற்பதற்காகப் புத்தகத்தில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விலையில் 20% கழிக்கப்பட்டு புத்தகம் விற்கப்படும் என்பதாகும். இவ்வாறு கழிக்கப்படும் பணம் **கழிவு** (Discount) எனப்படும். இக்கழிவானது பொருளில் குறிக்கப்பட்டுள்ள விலையின் சதவீதமாகக் குறிக்கப்படுவதே பெரும்பாலும் இடம்பெறுகின்றது.

வாடிக்கையாளர்கள் பெரும்பாலும் கூடிய கழிவு வழங்கும் வியாபார நிலையங்களில் பொருள்களைவாங்கத்தூண்டப்படுவதால்அவ்வாறானநிலையங்களில்பொருள்களின் விற்பனையும் அதிகரிக்கிறது. இதனால் வியாபாரியின் இலாபமும் அதிகரிக்கிறது. பொருள்களை விற்கும்போது கழிவை வழங்குவதன் மூலம் வியாபாரிக்கும் நீண்ட கால அனுகூலங்கள் பல கிடைக்கின்றன.

உதாரணம் 1

கவிதா 20% கழிவை வழங்கும் ஒரு புத்தகக் கடையில் ரூ. 1500 பெறுமதியுள்ள புத்தகங்களை வாங்கினாள். கவிதா பெறும் கழிவைக் காண்க.

கிடைக்கும் கழிவு $= \text{ரூ. } 1\,500 \times \dfrac{20}{100}$
$= \text{ரூ. } 300$

உதாரணம் 2

ரூ. 9 000 இற்கு உற்பத்திசெய்யப்படும் கையடக்கத் தொலைபேசி ஒன்றுக்கு இலாபம் ரூ. 3 000 பெறப்படும் வகையில் விலை குறிக்கப்படுகின்றது. அதனை விற்கும்போது குறித்த விலையில் 10% கழிவு வழங்கப்படுகின்றது எனின், இதனை விற்கும் விலையைக் காண்க.

முறை I

உற்பத்திச் செலவு $= \text{ரூ. } 9\,000$
குறித்த விலை $= \text{ரூ. } 9000 + \text{ரூ. } 3\,000$
$= \text{ரூ. } 12\,000$

உரித்தாகும் கழிவு $= \text{ரூ. } 12\,000 \times \dfrac{10}{100}$
$= \text{ரூ. } 1\,200$
விற்பனை விலை $= \text{ரூ. } 12\,000 - 1200$
$= \text{ரூ. } 10\,800$

முறை II

ரூ. 100 விலையுள்ள ஒரு பொருளைக் கழிவுடன் விற்பனை செய்யும் விலை ரூ. 90 என்பதால்

ரூ. 100 விலையுள்ள பொருளின் விற்பனை விலை = ரூ. 90

எனவே, ரூ. 12 000 விலையுள்ள பொருளின் விற்பனை விலை $= \text{ரூ. } \dfrac{90}{100} \times 12\,000$
$= \text{ரூ. } 10\,800$

குறிப்பு

இங்கு முறை II இல் பிரசினம் தீர்ப்பது மிகச் சுருக்கமானது. எனவே இச்சுருக்கமான முறையில் பிரசினங்களைத் தீர்க்கப் பழகுதல் சிறந்தது.

உதாரணம் 3

ரூ. 2000 உடைய ஒரு கைக்கடிகாரத்தை உடன் பணத்திற்கு விற்கும்போது ரூ. 250 கழிக்கப்பட்டு விற்கப்பட்டதாயின் கிடைக்கும் கழிவுச் சதவீதத்தைக் காண்க.

கழிவுச் சதவீதம் $= \frac{250}{2000} \times 100\%$

$= 12.5\%$

உதாரணம் 4

8% கழிவுடன் ஒரு கதைப் புத்தகம் ரூ. 460 இற்கு விற்கப்படுமாயின் புத்தகத்தை விற்பதற்குக் குறித்த விலை யாது?

குறித்த விலை = ரூ. $460 \times \frac{100}{92}$

= ரூ. 500

தரகு

உருவில் காணிகள், வாகனங்கள், வீடுகள் ஆகியவற்றை விற்றுக் கொள்வதற்கான அல்லது வாங்குவதற்கான வசதிகளை வழங்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் விளம்பரம் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறான நிறுவனங்கள் மேற்குறித்தவாறான விற்பனைகளுக்காகக் கொள்வனவு செய்பவர்களைத் தேடித்தருவதுடன் விற்பனை நடைபெற்ற பின்னர் கொடுக்கல் வாங்கலின் பெறுமதியின் யாதாயினுமொரு சதவீதத்தை அவர்கள் அறவிட்டுக் கொள்வார்கள். இவ்வாறான நிறுவனங்கள் அல்லது தனி நபர்கள், ***''தரகர்கள்''*** (Brokers) என அழைக்கப்படுவர். தரகர்கள் மூலம் யாதாயினுமொரு விற்பனைக்காக வசதிகளை வழங்கும்போது விற்பனைப் பணத்தின் குறித்தவொரு சதவீதமாக அறவிடப்படும் பணம் ***தரகுப் பணம்*** (Commission) எனப்படும்.

உதாரணம் 5

5% தரகுச் சதவீதத்தை அறவிடும் ஒரு நிறுவனம் ரூ. 3000000 இற்கு மோட்டர் வாகனத்தை விற்பனை செய்து கொடுப்பதற்காக அறவிடப்படும் தரகுப் பணம் யாது?

அறவிடப்படும் தரகுப் பணம் $= \text{ரூ. } 3\,000\,000 \times \frac{5}{100}$
$= \text{ரூ. } 150\,000$

உதாரணம் 6

சொத்துகளை விற்பனைசெய்யும் ஒரு கம்பனி காணி ஒன்றை ரூ. 1200000 இற்கு விற்றுக் கொடுப்பதற்காக ரூ. 36000 ஐ அறவிடுகின்றது. அறவிடும் தரகுச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

தரகுச் சதவீதம் $= \frac{36\,000}{1\,200\,000} \times 100\%$
$= 3\%$

பயிற்சி 4.3

1. ரூ. 25000 என விலை குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை விற்கும்போது 5% கழிவு வழங்கப்படுகின்றது.
   (i) வழங்கப்பட்ட கழிவு யாது?
   (ii) தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

2. 5% கழிவு வழங்கப்படும் ஒரு புடைவை விற்பனை நிலையத்தில் ரூ. 1500 பெறுமதியுடைய ஒரு காற்சட்டையும் ரூ. 1200 பெறுமதியுடைய ஒரு மேற்சட்டையும் வாங்கிய ரவி அவற்றுக்காக செலுத்தவேண்டிய பணம் யாது?

3. பண்டிகைக் காலத்தில் ஒரே வகையான பாதணிகளை விற்கும் இரண்டு விற்பனை நிலையங்களில் காட்சிபடுத்தப்பட்டிருந்த இரண்டு விளம்பரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

   விற்பனை நிலையம் A
   ஒவ்வொரு கொள்வனவின் போதும் 8% கழிவு வழங்கப்படும்

   விற்பனை நிலையம் B
   ரூ. 1000 ஐ விட அதிக தொகைக்குப் பொருள்களை வாங்கும்போது ரூ. 100 கழிவு வழங்கப்படும்.

   (i) ரூ. 1500 பெறுமதியுடைய ஒரு சோடி பாதணிகளை விற்பனை நிலையம் A இல் வாங்கும்போது செலுத்தவேண்டிய பணம் யாது?
   (ii) ரூ. 1500 பெறுமதியுடைய ஒரு சோடி பாதணிகளை விற்பனை நிலையம் B இல் வாங்கும்போது செலுத்தவேண்டிய பணம் யாது?

(iii) விற்பனை நிலையம் B இல் ஒரு சோடி பாதணிகளை வாங்கும்போது கிடைக்கும் கழிவுச் சதவீதம் யாது?

(iv) பாதணிச் சோடியை எவ்விற்பனை நிலையத்தில் வாங்குவது மிக அனுகூலமானது?

4. துவிச்சக்கர வண்டிகளை விற்பனை செய்யும் ஒருவர் ரூ. 8000 இற்கு வாங்கிய ஒரு துவிச்சக்கர வண்டியைக் கொள்விலையில் 25% இலாபம் கிடைக்கும் வகையில் விற்பனைக்காக விலை குறித்துள்ளார். முழுத் தொகையையும் பணமாகவே செலுத்துவதாயின் (அதாவது வங்கி அட்டைகள் மூலம் செலுத்தாது காசு மூலம் செலுத்துவதாயின்) 10% கழிவு வழங்கப்படும்.

(i) துவிச்சக்கர வண்டியை விற்பதற்குக் குறிக்கப்பட்டுள்ள விலையைக் காண்க.

(ii) கழிவு வழங்கப்பட்ட பின்னர் துவிச்சக்கர வண்டியின் விலையைக் காண்க.

(iii) துவிச்சக்கர வண்டி விற்பனையாளர் 20% இலாபச் சதவீதம் பெறப்படும் வகையில் விலை குறித்தால் அப்போது துவிச்சக்கர வண்டியின் விற்பனை விலையைக் காண்க.

5. ஒரு வியாபாரி குறித்தவொரு பொருளை 10% இலாபம் பெறப்படும் வகையில் விலை குறித்தான். குறித்த விலையின் 10% கழிவை வழங்க எண்ணினான் இவ்வியாபாரத்தினால் அவனடைவது இலாபமா, நட்டமா என்பதை விவரிக்க.

6. குறித்தவொரு தரகர் கம்பனி ஒரு காணியை விற்றுக் கொடுப்பதற்காக 3 % தரகுப் பணத்தை அறவிடுகின்றது. ரூ. 5000000 பெறுமதியுடைய ஒரு காணியை விற்கும்போது

(i) செலுத்த வேண்டி ஏற்படும் தரகுப் பணம் யாது?

(ii) இக்கொடுக்கல் வாங்கல்களில் காணி உரிமையாளருக்குக் கிடைக்கும் பணம் யாது?

7. ஒரு தரகர் ரூ. 300000 பெறுமதியுடைய மின் உற்பத்தி இயந்திரம் ஒன்றை விற்றுக் கொடுப்பதற்காகத் தரகுப் பணமாக ரூ. 25000 ஐ அறவிட்டால், அதற்கென அறவிட்டுள்ள தரகுச் சதவீதத்தைக் கணிக்க.

8. ஒரு வாகனத்தை விற்கும்போது தரகருக்கு ரூ. 30000 பணத்தைச் செலுத்திய பின்னர் வாகன உரிமையாளருக்குக் கிடைத்த பணம் ரூ. 570000 ஆயின்,

(i) வாகனத்தின் விற்பனை விலை யாது?

(ii) அறவிடப்பட்டுள்ள தரகுச் சதவீதம் யாது?

9. வீடு ஒன்றை வாங்குவதற்கு ஒருவர் 3% தரகாக 270 000 ஐச் செலுத்துவாராயின் வீட்டின் விற்பனை விலை யாது?

பலவினப் பயிற்சி

1. கமலினியிடம் 10 பேர்ச் காணி உள்ளது. அவள் அதை பேர்ச் 300 000 ரூபாய் வீதம் விற்பதற்குத் தீர்மானித்தாள். அவள் அதை விற்பதற்கு உதவிய தரகருக்கு 3% தரகுப் பணமும் விற்பனையின்போது முழுத் தொகையையும் ஒரே தரத்தில் செலுத்துவதால் 1% கழிவும் வழங்குகின்றாள். காணியை விற்பதன் மூலம் கமலினிக்குக் கிடைத்த பணம் எவ்வளவு?

2. ரவி வாகனங்களை வாங்கி விற்கும் நிறுவனத்தை நடத்துகின்றான். அவன் 5 மில்லியன் ரூபாவைச் செலுத்தி வாகனம் ஒன்றை விற்கும் நோக்கில் வாங்குகின்றான். அதனை 6 மில்லியனுக்கு விற்பதற்கு விலை குறிக்கின்றான். ஆனால் விற்பனையின்போது குறித்த விலையில் 3% கழிவு வழங்குவதுடன் விற்பதற்கு உதவிய தரகருக்கு 2% தரகுப் பணம் செலுத்துகின்றான். இவ்வாகன விற்பனையால் அவனடைந்த இலாபம் எவ்வளவு?

பொழிப்பு

- இலாபம் = விற்ற விலை − செலவினம்

  நட்டம் = செலவினம் − விற்ற விலை

- இலாபச் சதவீதம் = $\dfrac{\text{இலாபம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100\%$

  நட்டச் சதவீதம் = $\dfrac{\text{நட்டம்}}{\text{செலவினம்}} \times 100$

- பொருள் ஒன்றுக்கு அதனை விற்க எதிர்பார்க்கப்படும் விலை குறித்த விலை எனவும் அதன் எதிர்பார்த்த விலையிலும் குறைந்த விலைக்கு விற்றால் கழிவு எனவும் கொள்ளப்படும்.

- விற்பனை ஒன்றின்போது ஒரு பொருளை விற்றுக் கொடுக்க உதவும் நபருக்கு அல்லது நிறுவனத்திற்கு வழங்கப்படும் பணம் தரகு எனப்படும்.

5 அட்சரகணிதக் கோவைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்

- திசைகொண்ட எண்களைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் எளிய அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கும்
- $(x \pm a)\,(x \pm b)$ வடிவிலான இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தை விரித்து எழுதுவதற்கும்
- பரப்பளவின் மூலம் இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தின் விரிவை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

5.1 அட்சரகணிதக் கோவைகள்

தரம் 8 இல் அட்சரகணிதக் கோவைகளைப் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை நினைவு கூர்வதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. அடைப்பு நீக்கிச் சுருக்குக.

a. $5\,(x+2)$ **b.** $3\,(y+1)$ **c.** $4\,(2m+3)$
d. $3\,(x-1)$ **e.** $4\,(3-y)$ **f.** $2\,(3x-2y)$
g. $(-2)\,(y+3)$ **h.** $(-3)\,(2+x)$ **i.** $(-5)\,(2a-3b)$
j. $(-4)\,(m-2)$ **k.** $(-1)\,(5-y)$ **l.** $(-10)\,(-3b-2c)$

2. அடைப்பு நீக்கிச் சுருக்குக.

a. $x\,(a+2)$ **b.** $y\,(2b-3)$ **c.** $a\,(2x+3y)$
d. $2a\,(x+5)$ **e.** $2b(y-2)$ **f.** $3p\,(2x-y)$
g. $(-3q)\,(p+8)$ **h.** $(-2x)\,(3-2y)$ **i.** $(-5m)\,(x-2y)$

3. $x=3, y=-2$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

a. $x+y$ **b.** $x-y$ **c.** $3x-2y$
d. $-2x+y$ **e.** $2(x+y)$ **f.** $3\,(2x-y)$

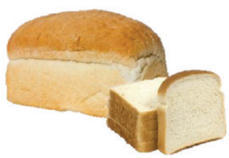
4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையையும் அடைப்பு நீக்கிச் சுருக்குக.

a. $3\,(x + y) + 2\,(x - y)$	**b.** $5(a + b) + 4\,(a + c)$
c. $4\,(2a + b) + 3\,(2a - b)$	**d.** $2(a - b) + (2a - b)$
e. $5\,(m + n) + 2\,(m - n)$	**f.** $3(m + n) - (m - n)$
g. $5\,(x - y) - 3\,(x + y)$	**h.** $2(3 - q) - 3\,(p - q)$
i. $-4\,(m + n) + 2\,(m + 2)$	**j.** $-4\,(a - b) - 2\,(a - b)$

5.2 பிரதியிடல்

ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையிலுள்ள தெரியாக் கணியங்களுக்கு நிறைவெண்களைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் அந்த அட்சரகணிதக் கோவைக்கு எண் பெறுமானமொன்றைப் பெறுவதற்கு நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளீர்கள். **திசைகொண்ட** எண்களைப் பிரதியிட்டு ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையின் பெறுமானத்தைக் காணும் முறையை இப்பகுதியில் பார்ப்போம்.

♦ ஒரு கணிதப் பாசறையில் 20 ஆண் பிள்ளைகளும் 16 பெண் பிள்ளைகளும் கலந்து கொண்டனர். அங்கு காலை உணவுக்காக ஓர் ஆண் பிள்ளைக்கு வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு x உம் ஒரு பெண் பிள்ளைக்கு வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு y உம் ஆகும். அவர்களுக்குத் தேவைப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவை ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையாக எழுதுவோம்.



20 ஆண்பிள்ளைகளுக்கும் வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு $= 20\,x$

16 பெண் பிள்ளைகளுக்கும் வழங்கப்பட்ட பாணின் அளவு $= 16\,y$

வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவு $= 20\,x + 16\,y$

ஓர் ஆண் பிள்ளைக்கு அரைவாசிப் பாணும் ஒரு பெண்பிள்ளைக்குக் கால்வாசிப் பாணும் வழங்கப்பட்டதாயின், வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவைக் காண்போம்.

அப்போது $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ ஆகும். பிள்ளைகளுக்கு வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவைக் காண்பதற்கு $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$ ஆகிய பெறுமானங்களை $20x + 16y$ என்னும் கோவையில் பிரதியிட வேண்டும்.

இதற்கேற்ப வழங்கப்பட்ட பாணின் மொத்த அளவு $= 20 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{4}$

$= 10 + 4$

$= 14$

$\therefore$ பிள்ளைகளுக்கு மொத்தமாக 14 பாண்கள் வழங்கப்பட்டன.

உதாரணம் 1

$a = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $2a + 3$

$$2a + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3$$
$$= 1 + 3$$
$$= 4$$

(ii) $6 - 4a$

$$6 - 4a = 6 - 4 \times \frac{1}{2}$$
$$= 6 - 2$$
$$= 4$$

(iii) $3a - 1$

$$3a - 1 = 3 \times \frac{1}{2} - 1$$
$$= \frac{3}{2} - 1$$
$$= \frac{3-2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

உதாரணம் 2

$b = \frac{-2}{3}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $3b + 5$

$$3b + 5$$
$$= 3 \times \frac{-2}{3} + 5$$
$$= (-2) + 5$$
$$= 3$$

(ii) $5 - 6b$

$$5 - 6b$$
$$= 5 - 6 \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$
$$= 5 + (-6) \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$
$$= 5 + 4$$
$$= 9$$

(iii) $2b + \frac{1}{3}$

$$2b + \frac{1}{3}$$
$$= 2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-4}{3} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-3}{3}$$
$$= -1$$

உதாரணம் 3

$x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $2x + 4y$

$$2x + 4y = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

(ii) $2x - 2y$

$$2x - 2y = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}$$
$$= 1\frac{1}{2}$$

(iii) $4xy$

$$4xy = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= \frac{-1}{2}$$

(iv) $-2xy$

$$-2xy = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}$$

பயிற்சி 5.1

1. $x = \frac{1}{4}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $4x$ (ii) $2x$ (iii) $3x$ (iv) $-8x$

2. $y = \frac{-1}{3}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $3y$ (ii) $2y$ (iii) $-6y$ (iv) $4y$

3. $a = -2,\ b = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $a + 2b$ (ii) $4b - a$ (iii) $3a + b$

4. $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{3}{4}$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $3x + 4y$ (ii) $3x - 2y$ (iii) $8y - 6x$

5. $p = -\frac{1}{2},\ q = -3$ ஆக இருக்கும்போது கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (i) $2p + q$ (ii) $4p - q$ (iii) $6pq - 2$

5.3 இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கம்

முதலில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள், அட்சரகணித உறுப்புகள், அட்சரகணிதக் கோவைகள் என்பவற்றால் கருதப்படுவன யாவை என்பது பற்றி நினைவுகூர்வோம். x, y, z, a, b, c போன்ற ஆங்கில அட்சரங்களினால் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் தரப்படும்.

$2x,\ 5y,\ -2a,\ \frac{1}{3}x$ போன்று ஓர் அட்சரகணிதக் குறியீடு இன்னுமோர் எண்ணினால் பெருக்கப்படும்போது அல்லது வகுக்கப்படும்போது அவை அட்சரகணித உறுப்புகள் எனப்படும். இவ்வாறே $xy,\ ay,\ bz,\ 2xy,\ -3zab$ போன்று ஓர் அட்சரகணிதக் குறியீடு இன்னுமோர் அட்சரகணிதக் குறியீட்டினால் (அல்லது எண்ணினால்) பெருக்கப்பட்டுள்ளபோதும் அவை

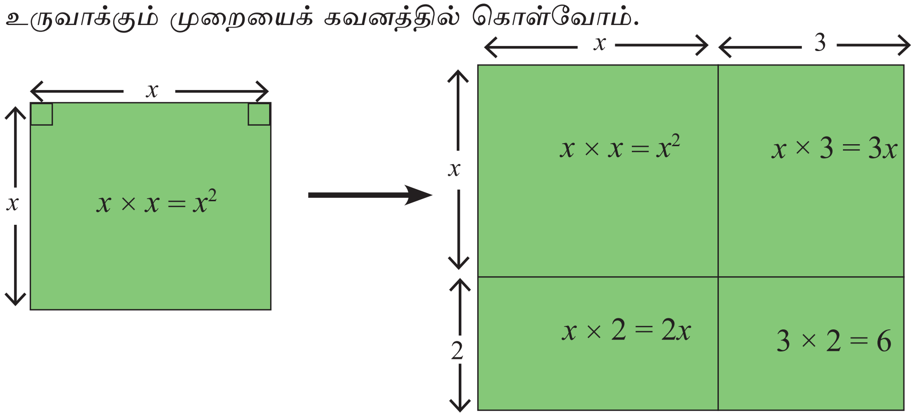
அட்சரகணித உறுப்புகள் எனப்படும். மேலும் x, y, x, a போன்ற அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் உட்பட இவை அனைத்தும் அட்சரகணிதக் கோவைகள் எனவும் வழங்கப்படும். (இவை ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகள் ஆகும்.)
இவற்றுக்கு மேலதிகமாக அட்சரகணிதக் குறியீடுகளின் அல்லது உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை அல்லது வித்தியாசம் என்பனவும் அட்சரகணிதக் கோவை எனப்படும். உதாரணமாக $x + y$, $2a + xyz$, $4xy - yz$, $-2x + 3xy$ ஆகியன அட்சரகணிதக் கோவை களாகும்.

இவ்வாறே, ஓர் அட்சரகணிதக் குறியீட்டுடன் அல்லது ஓர் உறுப்புடன் ஓர் எண் கூட்டப்பட்டுள்ளபோது அதுவும் அட்சரகணிதக் கோவை எனப்படும். உதாரணமாக $4 + x$, $1 - 3ab$ என்பனவும் அட்சரகணிதக் கோவைகளாகும்.

ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையில் உறுப்புகள் எவ்வெண்ணிக்கையிலும் இருக்கலாம்.

உதாரணமாக $3 + ax - 2xyz + xy$ என்பது 4 உறுப்புகளையுடைய ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையாகும். இங்கு மூன்று அட்சரகணித உறுப்புகளும் ஓர் எண்ணும் உள்ளன. இரண்டு உறுப்புகளை மாத்திரம் கொண்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவைகள் **ஈருறுப்பு அட்சரகணிதக் கோவைகள்** (அல்லது எளிமையாக **ஈருறுப்புக் கோவைகள்**) எனப்படும்.
இப்போது இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைக் கருதுவோம்.

உருவில் தரப்பட்டுள்ள சதுர வடிவிலான பூப்பாத்தியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகுகள் எனக் கொள்வோம். இப்பூப்பாத்தியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தை 3 அலகுகளினாலும் மற்றைய பக்கத்தின் நீளத்தை 2 அலகுகளினாலும் அதிகரிக்கச்செய்து பெரிய செவ்வக வடிவப் பூப்பாத்தி ஒன்று அமைக்கப்படுகின்றது. இப்பெரிய பூப்பாத்தியின் பரப்பளவுக்கான அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்றை x இன் சார்பில் உருவாக்கும் முறையைக் கவனத்தில் கொள்வோம்.



பெரிய பூப்பாத்தியின் நீளம் $= x + 3$
பெரிய பூப்பாத்தியின் அகலம் $= x + 2$

உருவின்படி
பெரிய செவ்வகப் பூப்பாத்தியின்

$$\text{பரப்பளவு} = \text{நீளம்} \times \text{அகலம்} = (x + 3)\,(x + 2) \text{ ———— (1)}$$

என்றவாறு எழுதலாம்.
இந்த $(x + 3)\,(x + 2)$ என்பது இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கம் என்பதை அவதானிக்க.
இப்பெரிய பூப்பாத்தியின் பரப்பளவை வேறொரு முறையிலும் காணலாம். அது செவ்வகம் உருவாகியுள்ள நான்கு சிறிய செவ்வகப் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் ஆகும். அந்நான்கு பகுதிகள், முன்னர் இருந்த சதுரவடிவப் பகுதியும் உருவில் தரப்பட்டுள்ள மூன்று சிறிய செவ்வக வடிவப் பகுதிகளும் ஆகும்.
அதற்கேற்ப,
பெரிய பூப்பாத்தியின் பரப்பளவு = நான்கு சிறிய பகுதிகளினதும் மொத்தப் பரப்பளவு

$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6 \text{ ———— (2)}$$

யாதாயினுமொரு பிரதேசத்தின் பரப்பளவு எவ்விதமாகக் கணிக்கப்படினும் அவை சமமாக இருக்க வேண்டும் என்பதால்,

(1), (2) என்பவற்றுக்கேற்ப

$$(x + 3)\,(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

இனி, இத்தொடர்பை மேற்குறித்தவாறான உருவத்தைப் பயன்படுத்தாமல் எவ்வாறு பெறலாம் என ஆராய்வோம். இதற்காக,

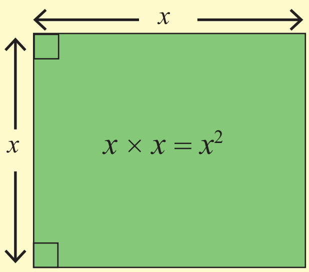
முதலில் முதலாவதாக உள்ள அடைப்பினுள்ளே இருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பினாலும் இரண்டாவது அடைப்பினுள்ளே இருக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்குவோம்.

$$(x + 3)\,(x + 2) = (x + 3)\,(x + 2)$$
$$= x\,(x + 2) + 3\,(x + 2)$$
$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

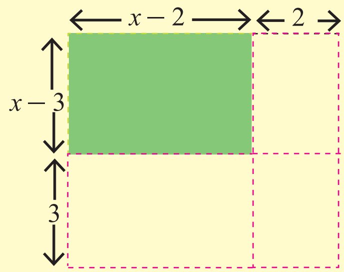
இவ்வாறான இன்னொரு செயற்பாட்டின் மீது நமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

செயற்பாடு 1

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x அலகுகள் உடைய சதுரவடிவிலான ஒரு தகடு உரு I இல் தரப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து ஒரு பக்கத்தில் 2 அலகுகள் நீளமும் மற்றைய பக்கத்தில் 3 அலகுகள் நீளமும் உள்ள இரண்டு செவ்வகக் கீலங்கள் வெட்டி அகற்றப்பட்டுள்ள விதம் உரு II இல் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வுருக்களை அவதானித்து அவற்றுக்குக் கீழே உள்ள கீறிட்ட இடங்களைப் பூரணப்படுத்துக.



உரு I



உரு II

எஞ்சியுள்ள செவ்வக வடிவிலான தகட்டின் பரப்பளவு $= (x-2)\,(x-3)$ ———— (1)

உரு II இற்கேற்ப,

எஞ்சியுள்ள செவ்வக வடிவிலான தகட்டின் பரப்பளவு = சதுரவடிவிலான தகட்டின் பரப்பளவு − மூன்று செவ்வக வடிவப் பகுதிகளினதும் பரப்பளவு

$= x^2 - 2(......) - ...(x-2) - 2 \times 3$ ———— (2)

(1), (2) என்பவற்றிலிருந்து இரண்டு பரப்பளவுகளும் சமம் என்பதை அறியலாம்.

$\therefore (x-2)\,(x-3) = x^2 - 2(......) - ...(x-2) - 2 \times 3$

$= ....$

$= ....$

இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைப் பெற்றுக் கொள்ளும் முறையை மேலும் நன்கு விளங்கிக் கொள்வதற்காகச் சில உதாரணங்களைக் கவனத்திற் கொள்வோம்.

உதாரணம் 1

$(x+5)\,(x+3)$

$(x+5)\,(x+3) = x\,(x+3) + 5\,(x+3)$

$= x^2 + 3x + 5x + 15$

$= x^2 + 8x + 15$

உதாரணம் 2

$(x+5)\,(x-3)$

$(x+5)\,(x-3) = x\,(x-3) + 5\,(x-3)$

$= x^2 - 3x + 5x - 15$

$= x^2 + 2x - 15$

உதாரணம் 3

$(x-5)\ (x+3)$

$(x-5)\ (x+3) = x\,(x+3) - 5\,(x+3)$

$= x^2 + 3x - 5x - 15$

$= x^2 - 2x - 15$

உதாரணம் 4

$(x-5)\ (x-3)$

$(x-5)\ (x-3) = x\,(x-3) - 5\,(x-3)$

$= x^2 - 3x - 5x + 15$

$= x^2 - 8x + 15$

உதாரணம் 5

$(x+8)\ (x-3) = x^2 + 5x - 24$ ஆகுமென $x = 5$ ஐப் பிரதியிடுவதன் மூலம் காட்டுக.

இ. கை. ப $= (x+8)\ (x-3)$

$x = 5$ ஐப் பிரதியிடும்போது

இ. கை. ப $= (5+8)\ (5-3)$

$= 13 \times 2$

$= 26$

வ. கை. ப $= x^2 + 5x - 24$

$x = 5$ ஐப் பிரதியிடும்போது

வ. கை. ப $= 25 + 25 - 24$

$= 26$

இ. கை. ப = வ. கை. ப

$\therefore\ (x+8)\ (x-3) = x^2 + 5x - 24$

பயிற்சி 5.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் ஈருறுப்புக் கோவையினதும் பெருக்கத்தை விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

a. $(x+2)\ (x+4)$ **b.** $(x+1)\ (x+3)$ **c.** $(a+3)\ (a+2)$

d. $(m+3)\ (m+5)$ **e.** $(p-4)\ (p-3)$ **f.** $(k-3)\ (k-3)$

2. மேற்குறித்த (1) இல் **a, b, e** ஆகிய பகுதிகளுக்கு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்திற்கான செவ்வகம் ஒன்றை வரைந்து அவற்றின் பரப்பளவைக் காண்பதன் மூலம் (1) இல் பெற்ற விடைகளை வாய்ப்புப் பார்க்க.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டினதும் பெருக்கத்தை விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

a. $(x+2)\ (x-5)$ **b.** $(x+3)\ (x-7)$ **c.** $(m+6)\ (m-1)$

d. $(x-2)\ (x+3)$ **e.** $(x-5)\ (x+5)$ **f.** $(m-1)\ (m+8)$

g. $(x-3)\ (x-4)$ **h.** $(y-2)\ (y-5)$ **i.** $(m-8)\ (m-2)$

j. $(x-3)\ (2-x)$ **k.** $(5-x)\ (x-4)$ **l.** $(2-x)\ (3-x)$

4. பகுதி A இலுள்ள கோவைகளைச் சுருக்கிப் பெறப்படும் கோவைகளைப் பகுதி B இல் தெரிந்தெடுத்து இணைக்க.

A	B
$(x+2)\ (x+1)$	$x^2 + 3x - 10$
$(x+3)\ (x-4)$	$x^2 - 25$
$(x+5)\ (x-2)$	$x^2 - 6x + 9$
$(x-3)\ (x-3)$	$x^2 + 3x + 2$
$(x-5)\ (x+5)$	$x^2 - x - 12$

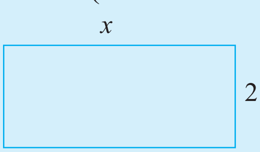
5. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் $(x + 5)(x + 6) = x^2 + 11x + 30$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
(i) $x = 3$ (ii) $x = -2$

6. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
(i) $x = 1$ (ii) $x = 4$ (iii) $x = 0$

7. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் $(2 - x)(4 - x) = x^2 - 6x + 8$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.
(i) $x = 2$ (ii) $x = 3$ (iii) $x = -2$

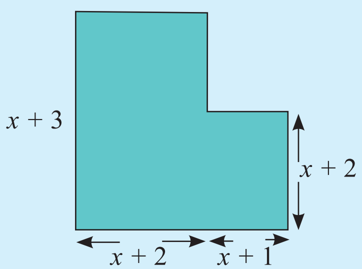
8. ஓர் அலங்காரத்துக்காக வெட்டியெடுக்கப்பட்ட செவ்வக வடிவிலான ஒரு தாளின் நீளம் 15 cm உம் அகலம் 8 cm உம் ஆகும். நீளப் பக்கத்திலிருந்தும் அகலப் பக்கத்திலிருந்தும் x சென்ரிமீற்றர் நீளமுடைய இரண்டு கீலங்கள் வெட்டி அகற்றப்படுகின்றன. எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் பரப்பளவுக்கான ஒரு கோவையை உருவின்மூலம் பெறுக. ($x < 8$ எனக் கொள்க.)

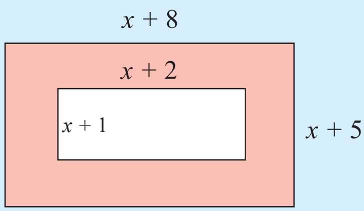
9. x மீற்றர் நீளமும் 2 மீற்றர் அகலமும் உடைய ஒரு பூப்பாத்தி உருவில் தரப்பட்டுள்ளது. இப்பூப்பாத்தியின் நீளப் பக்கத்தில் 2 மீற்றர் குறைக்கப்பட்டு அகலப் பக்கத்தில் x மீற்றர் அதிகரிக்கப்பட்டது. புதிதாக அமைக்கப்பட்ட பூப்பாத்தியான செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்கான கோவையை x இன் சார்பில் உருவைப் பயன்படுத்திக் காண்க. ($x > 2$ எனக் கொள்க.)



பலவினப் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் உள்ள நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதிகளின் பரப்பளவிற்குப் பொருத்தமான கோவைகளை எழுதிச் சுருக்குக.





2. $(x + a)(x + 4) = x^2 + bx + 12$ எனின், a, b என்பவற்றின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பொழிப்பு

- திசைகொண்ட எண்களை அட்சரகணிதக் கோவைகளில் தெரியாக் கணியங்களுக்குப் பிரதியிட்டு அவற்றின் பெறுமானங்களைக் காணலாம்.
- இரண்டு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் விரியைக் காண்பதற்கு அதன் முதற் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பினாலும் இரண்டாவது கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பெருக்கிச் சுருக்க வேண்டும்.
- ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தை உரிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளின் மூலம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

6 அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பொதுக் காரணி ஈருறுப்பாக அமையும் நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவையொன்றின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்
- $x^2 + bx + c$ வடிவில் அமைந்த மூவுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்து வதற்கும்
- இரு நிறைவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதப்பட்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

சென்ற 5 ஆம் பாடத்தில் அட்சரகணித உறுப்புகள் பலவற்றுக்குரிய விளக்கம் அளிக்கப்பட்டது. இப்பாடத்தில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் பலவற்றின் மேலதிக விளக்கத்தைப் பெறுவோம். முதலில் அட்சரகணித உறுப்பு (அல்லது கோவை ஒன்றின்) காரணி என்பதன் பொருளை அறிவோம்.

$2xy$ என்னும் அட்சரகணித உறுப்பை 2, x, y என்னும் உறுப்புகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். எனவே $2, x, y$ என்பவை அதன் காரணிகளாக அமையும். அத்துடன் $2x$, $2y$, $2xy$, xy போன்றவையும் இதன் காரணிகளாகும்.

$2x + 2y$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும். அதாவது அது இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். இங்கே $2x$ இன் காரணிகள் 2 உம் x உம் ஆகின்றன. அவ்வாறே $2, y$ என்பன $2y$ இன் காரணிகளாகின்றன. இதற்கேற்ப 2 ஆனது $2x$, $2y$ என்னும் இரு உறுப்புகளினதும் பொதுக் காரணியாகின்றது. இப்பொதுக் காரணியைக் கருதும்போது இந்த ஈறுருப்புக் கோவையை $2(x+y)$ எனவும் எழுதலாம் எனத் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளோம்.

அதாவது $2x + 2y = 2(x + y)$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறு எழுதுவதன் சிறப்பு என்னவெனில், $2x$ இனதும் $2y$ இனதும் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையானது 2 இனதும் $x + y$ இனதும் பெருக்கமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளமையாகும். அப்போது 2 உம் $x + y$ உம் $2x + 2y$ இன் காரணிகளாகின்றன.

இதை வேறு விதமாகக் கூறுவதாயின் $2x + 2y$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையை 2 இனதும் $x + y$ இனதும் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

இங்கே $2x + 2y$ என்னும் கோவையின் ஒரு காரணியாக 2 என்னும் எண் அமைந்ததுடன் $x + y$ என்பது மற்றைய காரணியாகவும் அமைந்தது. சில சந்தர்ப்பங்களில் அட்சரகணித உறுப்புகள் அல்லது அட்சரகணிதக் கோவை காரணிகளாக அமையலாம். $xy + 5xz$ என்னும் கோவையைக் கருதும்போது இதனை $x(y + 5z)$ என எழுதக்கூடியதாக இருப்பதால் x உம் $y + 5z$ உம் இக்கோவையின் காரணிகளாக அமைகின்றன.

முன்னர் கற்ற விடயங்களிற்கேற்ப $x(y + 5z)$ என மடங்காக எழுதப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையின் அடைப்புக்குறியை நீக்கிச் சுருக்கும்போது $xy + 5xz$ என்னும் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டப்படும் கோவை பெறப்படும். இப்பாடத்தின் மூலம் நாம் முன்னைய பாடத்தில் கற்ற செயற்பாட்டைப் பின்னோக்கி எவ்வாறு செய்யலாம் எனப் பார்ப்போம். அதாவது ஓர் அட்சரகணிதக் கோவை காரணிகளின் மடங்காக எவ்வாறு எழுதப்படும் என்பதாகும்.

தரம் 8 இல் கற்றவாறு பின்வரும் கூற்றுகளின் காரணிகளின் மடங்காக எழுதப்பட்டிருக்கும் முறையை நோக்குவோம்.

- $3x + 12 = 3\,(x + 4)$
- $6a + 12b - 18 = 6\,(a + 2b - 3)$
- $-2x - 6y = -2\,(x + 3y)$
- $3x - 6xy = 3x\,(1 - 2y)$

மேலே இரண்டாவது உதாரணத்தில் உள்ள $6a + 12b - 18$ இல் பொதுக் காரணி 6 ஆக உள்ளது. அது 6, 12, 18 ஆகிய எண்களின் பொதுக் காரணிகளுட் பெரியதாகும். பொதுக் காரணிகளுட் பெரிய எண்ணே (+, – குறியைக் கருதாமல்) எப்போதும் பொதுக் காரணியாக அமையும். அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்றின் காரணிகளைக் காணும்போது எண்களின் காரணிகளைக் காணவேண்டியதில்லை. உதாரணமாக $6x + 6y$ என்பதை $6(x + y)$ என்றே எழுத வேண்டும். அதனை $2 \times 3\,(x + y)$ என்று எழுத வேண்டியதில்லை. இவ்விடயங்களை மேலும் உறுதிப்படுத்திக்கொள்ளப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

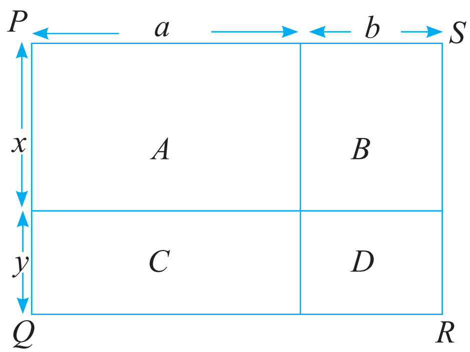
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் அட்சரகணிதக் கோவையையும் காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க.

a. $8x + 12y$	**b.** $9a + 18y$	**c.** $3m + 6$
d. $20a - 30b$	**e.** $4p - 20q$	**f.** $12 - 4k$
g. $3a + 15b - 12$	**h.** $12a - 8b + 4$	**i.** $9 - 3b - 6c$
j. $-12x + 4y$	**k.** $-8a - 4b$	**l.** $-6 + 3m$
m. $ab + ac$	**n.** $p - pq$	**o.** $ab + ac - ad$
p. $3x + 6xy$	**q.** $6ab - 9bc$	**r.** $4ap + 4bp - 4p$
s. $x^3 + 2x$	**t.** $3m - 2nm^2$	**u.** $6s \quad - 12\, s^2t$

6.1 நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

A, B, C, D என்னும் நான்கு சிறிய செவ்வகங்களை உள்ளடக்கிய $PQRS$ என்னும் செவ்வகம் உருவில் காணப்படுகின்றது.



ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவையும் x, y, a, b என்னும் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் மூலம் காண்போம்.

பகுதி A யின் பரப்பளவு $= a \times x = ax$

பகுதி B யின் பரப்பளவு $= b \times x = bx$

பகுதி C யின் பரப்பளவு $= a \times y = ay$

பகுதி D யின் பரப்பளவு $= b \times y = by$

அடுத்து நாம் பெரிய செவ்வகமாகிய $PQRS$ இன் பரப்பளவை எவ்வாறு காணலாம் எனப் பார்ப்போம்.

பெரிய செவ்வகத்தின் நீளம் $= a + b$

பெரிய செவ்வகத்தின் அகலம் $= x + y$

எனவே பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $= (a + b) (x + y)$

4 சிறிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவு = பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்பதால்

$$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y) \text{ ஆகும்.}$$

இதற்கு முன்னர் கற்ற ஈருறுப்புகளின் பெருக்கத்தை விரிவுபடுத்துவதால் $(a + b)(x + y)$ என்னும் பெருக்கத்தின் உண்மைத் தன்மையை அறியலாம். இதனை இவ்வாறு விரிவுபடுத்துவோம்.

$$(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y)$$
$$= ax + ay + bx + by$$

அதாவது இக்கூற்றின் உண்மைத் தன்மை வாய்ப்புப் பார்க்கப்படுகின்றது (அதாவது செம்மை உறுதிப்படுத்தப்படுகின்றது).

இப்பாடத்தில் நாம் எதிர்பார்ப்பது $ax + ay + bx + by$ என்னும் வடிவில் கோவை தரப்படும்போது அதனை $(a + b)(x + y)$ என்னும் வடிவில் காரணிகளின் பெருக்கமாக எவ்வாறு எழுதுவது என்பதாகும். ax, ay, bx, by ஆகிய நான்கு காரணிகளுக்கும் பொதுவான காரணி இல்லை என்பதை முதலில் உறுதிப்படுத்த வேண்டும். எனவே பொதுக் காரணியை உடனே வேறாக்க முடியாது. இருந்தபோதும் இவ்விரண்டு உறுப்புகளாக வேறாக்கி எழுதுவதன் மூலம் பின்வரும் விதத்தில் பொதுக் காரணிகளைக் காணலாம்.

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$$
$$= x(a + b) + y(a + b)$$

இப்போது இறுதியாகப் பெறப்பட்ட உறுப்புகள் $x(a + b)$ உம் $y(a + b)$ உம் இரு கோவைகளின் கூட்டுத்தொகையாக அமைகின்றன. இங்கு $x(a + b)$, $y(a + b)$ ஆகிய இரு கோவைகளுக்கும் $(a + b)$ பொதுக் காரணியாக அமைந்துள்ளது என்பதை நோக்குக. ஆகையால் இப்பொதுக் காரணியை வேறாக்கி, $(a + b)(x + y)$ என இதனை எழுதலாம் அதாவது $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$

$$= (a + b)(x + y)$$

என இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

உதாரணம் 1

$3x + 6y + kx + 2ky$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$3x + 6y + kx + 2ky = 3\,(x + 2y) + k\,(x + 2y)$$
$$= (x + 2y)\,(3 + k)$$

உதாரணம் 2

$a^2 - 3a + ab - 3b$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$a^2 - 3a + ab - 3b = a\,(a - 3) + b\,(a - 3)$$
$$= (a - 3)\,(a + b)$$

உதாரணம் 3

$x^2 + xy - x - y$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$x^2 + xy - x - y = x^2 + xy - 1\,(x + y)$$
$$= x\,(x + y) - 1\,(x + y)$$
$$= (x + y)\,(x - 1)$$

பயிற்சி 6.1

1. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க.

   a. $ax + ay + 3x + 3y$ **b.** $ax - 8a + 3x - 24$
   c. $mp - mq - np + nq$ **d.** $ak + al - bk - bl$
   e. $x^2 + 4x - 3x - 12$ **f.** $y^2 - 7y - 2y + 14$
   g. $a^2 - 8a + 2a - 16$ **h.** $b^2 + 5b - 2b - 10$
   i. $5 + 5x - y - xy$ **j.** $ax - a - x + 1$

6.2 $x^2 + bx + c$ என்னும் வடிவில் அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்

$(x + 3)$, $(x + 4)$ என்னும் ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டின் மடங்கைப் பெற்ற விதத்தை மீண்டும் நோக்குவோம்.

$$(x + 3)(x + 4) = x(x + 4) + 3(x + 4)$$

$$= x^2 + 4x + 3x + 12$$

$$= x^2 + 7x + 12$$

$(x + 3)$, $(x + 4)$ ஆகிய இரண்டு கோவைகளினதும் மடங்கு $x^2 + 7x + 12$ எனப் பெறப்பட்டுள்ளது. எனவே $(x + 3)$ உம் $(x + 4)$ உம் $x^2 + 7x + 12$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையின் இரண்டு காரணிகளாகும். $x^2 + 7x + 12$ என்னும் வடிவில் அமைந்த இருபடி உறுப்பைக் (x^2 ஐக்) கொண்ட இவ்வாறான கோவை மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்பு

இங்கு நாம் கருதும் மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக்கோவையொன்றை $x^2 + bx + c$ எனப் பொதுவாகக் குறிக்கலாம். இங்கே b, c என்பன எண்களாகின்றன. உதாரணமாக $x^2 + 7x + 12$ என்பது $b = 7$, $c = 12$ ஆக அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவை ஒன்றாகும். இங்கே bx நடு உறுப்பும் c மாறா உறுப்புமாகும். $x^2 + 7x + 12$ என்பதை $(x + 3)(x + 4)$ என இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். இருந்துபோதும் இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க முடியாத மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளும் உள்ளன. உதாரணமாக $x^2 + 3x + 4$ என்னும் மூவுறுப்புக் கோவையை இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க முடியாது.

காரணிப்படுத்தக்கூடிய மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையைக் காரணிகளாக்கும் முறையை இனிப் பார்ப்போம்.

இவ்வாறான இருபடிக் கோவை ஒன்றை ஈருறுப்புகளைக் கொண்ட இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதும் விதத்தை அறிவதற்கு ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டின் பெருக்கத்தைப் பெற்ற படிமுறைகளைப் பின்னிருந்து நோக்கி ஆராய்வோம்.

- $x^2 + 7x + 12$ என அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவையின் நடு உறுப்பான $7x$ ஐ $3x + 4x$ என இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம். $7x$ என்பதை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகப் பலமுறைகளில் காண்பிக்கலாம். அதாவது $7x$ என்பதை $7x = 5x + 2x$, $7x = 8x + (-x)$ என்பன சில உதாரணங்களாகும். இருந்தபோதும் $3x$, $4x$ என்பவற்றின் சிறப்பைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.
- $3x$, $4x$ என்னும் உறுப்புகளின் பெருக்கம் = $3x \times 4x = 12x^2$ ஆகும்.
- அத்துடன் $x^2 + 7x + 12$ என்னும் இருபடிக் கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கமும் $x^2 \times 12 = 12\,x^2$ ஆகும்.
- மேலும் மேலே பெற்ற விடயத்தை அவதானித்து மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காணலாம்.

நடு உறுப்பு இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதப்பட வேண்டும். அவ்வாறு எழுதப்பட்ட இரு உறுப்புகளின் பெருக்கம் கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கத்திற்கு ஒத்திருக்க வேண்டும்.

$x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகளைக் காணும் முறையை உதாரணமாகக் கொள்வோம். இதில் உள்ள நடு உறுப்பு $6x$ ஆகும். இதனை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதவேண்டும். அத்துடன் அவற்றின் பெருக்கம் $x^2 \times 8 = 8x^2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

இதற்கேற்ப பெருக்கம் $8x^2$ இற்கும் கூட்டுத்தொகை $6x$ இற்கும் ஒத்துள்ள காரணிச் சோடியைக் காண்போம். பெருக்கம் $8x^2$ ஆக எழுதக்கூடிய சில முறைகளைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகின்றது. $8x^2$ இன் காரணிகளைக் காண்போம்.

உறுப்புச் சோடிகள்	பெருக்கம்	கூட்டுத்தொகை
x, $8x$	$x \times 8x = 8x^2$	$x + 8x = 9x$
$2x$, $4x$	$2x \times 4x = 8x^2$	$2x + 4x = 6x$

நடு உறுப்பாகிய $6x$ ஐப் பெற உகந்த உறுப்புகளின் சோடி $2x + 4x$ ஆகும். இதனைக் கொண்டு $x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகளைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= x(x+2) + 4(x+2) \\ &= (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$\therefore\ x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகள் $x + 2$ உம் $x + 4$ உம் ஆகும்.

மேலுள்ள $x^2 + 6x + 8$ ஐ அதன் நடு உறுப்பு $2x + 4x$ இற்குப் பதிலாக $4x + 2x$ என எழுதிக் காரணிபடுத்தினால் இறுதிக் காரணி மாறுமா எனக் கவனிப்போம்.

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8$$
$$= x\,(x + 4) + 2\,(x + 4)$$
$$= (x + 4)\,(x + 2)$$

அப்போதுங்கூட அதே காரணிச் சோடிகளே பெறப்பட்டுள்ளன. எனவே நடு உறுப்புகளைத் தெரிவுசெய்து உறுப்புச் சோடியை எழுதும் முறை இறுதிக் காரணியின் மீது செல்வாக்குச் செலுத்தாது.

உதாரணம் 1

$x^2 + 5x + 6$ என்னும் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.
முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times 6 = 6x^2$
நடு உறுப்பு $= 5x$
$2x + 3x = 5x$ என்பதாலும் $(2x)\,(3x) = 6x^2$ என்பதாலும் பின்வருமாறு காரணிகளைக் காணலாம்.

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x\,(x + 2) + 3\,(x + 2)$$
$$= (x + 2)\,(x + 3)$$

உதாரணம் 2

$x^2 - 8x + 12$ என்னும் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times 12 = 12x^2$ உம் நடு உறுப்பு $(-8x)$ உம் ஆகும். இங்கே மறையுடனான உறுப்பு உள்ளது. $12x^2$ பெருக்கமாக அமையும் x ஐக் கொண்ட இரு காரணிச் சோடிகள் சிலவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

x,	$12x$
$2x$,	$6x$
$3x$,	$4x$
$-2x$,	$-6x$
$-3x$,	$-4x$
$-x$,	$-12x$

மேலே உள்ளவாறு $-8x = (-2x) + (-6x)$ எனின், $(-2x)\ (-6x) = 12x^2$ ஆகும்.

ஆகையால், $x^2 - 8x + 12 = x^2 - 2x - 6x + 12$

$$= x\,(x-2) - 6\,(x-2)$$

$$= (x-2)\,(x-6)$$

உதாரணம் 3

$y^2 + 2y - 15$ என்னும் கோவையின் காரணிகளைக் காண்க.
முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= y^2 \times -15 = -15y^2$ ஆகும்.
நடு உறுப்பு $2y$ ஆகும்.

$(-15y^2) = (5y)\,(-3y)$ என எழுதலாம். அத்துடன் $(5y) + (-3y) = 2y$ என்பதன் மூலம் நடு உறுப்பும் கிடைக்கின்றது.

ஆகையால் $y^2 + 2y - 15 = y^2 - 3y + 5y - 15$

$$= y\,(y-3) + 5\,(y-3)$$

$$= (y-3)\,(y+5)$$

உதாரணம் 4

$a^2 - a - 20$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= a^2 \times (-20) = -20a^2$ ஆகும்.

நடு உறுப்பு $(-a)$ ஆகும்.

$-20a^2 = (-5a)\,(4a)$ ஆகவும் $(-5a) + (4a) = -a$ ஆகவும் இருப்பதனால் $(-a)$ இற்குப் பின்வரும் முறையைக் கொண்டு காரணிகளைக் காணலாம்.

$a^2 - a - 20 = a^2 + 4a - 5a - 20$

$$= a\,(a+4) - 5\,(a+4)$$

$$= (a+4)\,(a-5)$$

பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு இருபடிக் கோவையினதும் காரணிகளைக் காண்க.

a. $x^2+9x+18$ **b.** $y^2+11y+30$ **c.** $a^2+10a+24$
d. $b^2-8b+15$ **e.** x^2-5x+6 **f.** $m^2-12m+20$
g. a^2+a-12 **h.** $p^2+5p-24$ **i.** $p^2+6p-16$
j. x^2-x-12 **k.** $a^2-3a-40$ **l.** $r^2-3r-10$
m. y^2+6y+9 **n.** $k^2-10k+25$ **o.** $4+4x+x^2$
p. $36+15x+x^2$ **q.** $30-11a+a^2$ **r.** $54-15y+y^2$

குறிப்பு

மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும்போது நடு உறுப்பைப் பொருத்தமான இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதுவது மிக முக்கியமானதாகும். அத்துடன் இவை இரண்டினதும் பெருக்கம் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கத்துக்குச் சமமாக இருப்பதுவும் மிக முக்கியமாகும்.
இதில் பயிற்சி பெற்றதும் மனக்கணிதத்தின் மூலமாகக் காரணிகளைக் காணலாம். மேலே 4 ஆம் உதாரணத்தில் தரப்பட்ட $-5a-20$ இன் பொதுக் காரணியாக -5 ஐ வேறுபடுத்திய பின்னர் $-5\,(a+4)$ என்னும் கோவை பெறப்படும். அதை $-5\,(a-4)$ எனச் சிலர் தவறாக எழுதுவர்.

6.3 இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் எழுதப்பட்டுள்ள கோவைகளின் காரணிகள்

$(x-y)$ இனதும் $(x+y)$ இனதும் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$(x-y)\,(x+y) = x\,(x+y) - y\,(x+y)$$
$$= x^2+xy-xy-y^2$$
$$= x^2-y^2$$

இதற்கேற்ப $(x+y)\,(x-y)$ என்பது x^2-y^2 என்னும் கோவைக்குச் சமனாவதுடன் கோவை x^2-y^2 ஆனது இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் எனப்படும்.

$(x+y)\,(x-y) = x^2-y^2$ என்பதிலிருந்து x^2-y^2 என்னும் கோவையின் காரணிகள் $x+y$ உம் $x-y$ உம் ஆகும் என்பது தெளிவாகின்றது.

$x^2 - y^2$ என்பது x இன் இருபடிக் கோவை எனக் கருதி அதன் காரணிகளைக் காணலாமா எனப் பார்ப்போம். அதன் நடு உறுப்பு 0 எனக் கருதினால் இக்கோவையை $x^2 + 0 - y^2$ என எழுதலாம். இனி இதன் காரணிகளைக் காண்போம். கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times (-y^2) = -x^2y^2$ ஆகும். நடு உறுப்பு 0 என்பதால்

$$-x^2y^2 = (-xy) \times (xy) \longrightarrow -xy + xy = 0$$

அப்போது $x^2 + 0 - y^2 = x^2 - xy + xy - y^2$

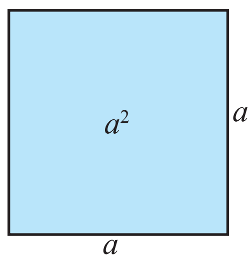
$$= x\,(x - y) + y\,(x - y)$$

$$= (x - y)\,(x + y)$$

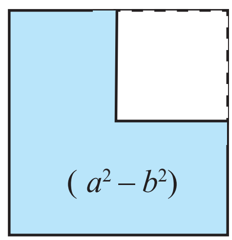
இவ்வாறு $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$ என்பது பெறப்படும்.

உருவைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளைக் காண்போம்

இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளைக் காண்பதற்கு நாம் பக்க நீளம் a அலகுகள் உள்ள சதுரம் ஒன்றைக் கருதுவோம் (உரு (i)). அதிலிருந்து பக்க நீளம் b அலகுகள் ஆகவுள்ள சதுரம் ஒன்றை உரு (ii) இல் காட்டியதுபோன்று நீக்குவோம். தற்போது எமக்குக் கிடைக்கும் உருவின் பரப்பளவு $(a^2 - b^2)$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

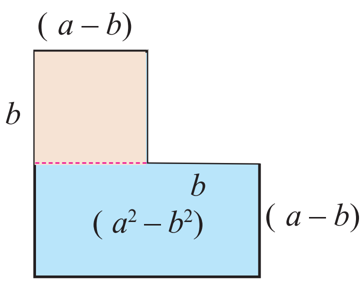


உரு (i)

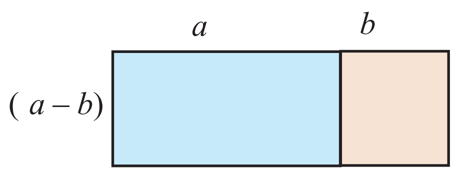


உரு (ii)

அடுத்து நாம் உரு (ii) இல் பெற்ற உருவை உரு (iii) காட்டியதுபோன்று இரண்டு செவ்வகங்களாகப் பிரித்து உரு iv இல் உள்ளது போன்று இணைப்போம்.



உரு (iii)



உரு (iv)

தற்போது கிடைத்துள்ள செவ்வகத்தின் நீளம் $(a + b)$ அலகுகளும் அகலம் $(a - b)$ அலகுகளும் ஆகும்.

தற்போது கிடைத்துள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் × அகலம்

$= (a + b)(a - b)$ ஆகும்.

ஆகவே $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ஆகும்.

இங்கே ஓர் உருவின் பரப்பளவு இரண்டு விதமாகப் பெறப்பட்டுள்ளது. ஆகவே அவை ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

இனி இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதப்பட்ட கோவைகள் சிலவற்றின் காரணிகளைக் காணும் உதாரணங்களை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

$x^2 - 25$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$x^2 - 25 = x^2 - 5^2$

$= (x - 5)(x + 5)$

உதாரணம் 2

$9 - y^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$9 - y^2 = 3^2 - y^2$

$= (3 - y)(3 + y)$

உதாரணம் 3

$4a^2 - 49$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$4a^2 - 49 = 2^2a^2 - 7^2$

$= (2a - 7)(2a + 7)$

உதாரணம் 4

$1 - 4b^2$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$1 - 4b^2 = 1^2 - 2^2b^2$

$= 1^2 - (2b)^2$

$= (1 - 2b)(1 + 2b)$

உதாரணம் 5

$2x^2 - 72$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$2x^2 - 72 = 2(x^2 - 36)$

$= 2(x^2 - 6^2)$

$= 2(x - 6)(x + 6)$

உதாரணம் 6

$33^2 - 17^2$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$33^2 - 17^2 = (33 + 17)(33 - 17)$

$= 50 \times 16$

$= 800$

உதாரணம் 7

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} = \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{3^2}$

$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$

உதாரணம் 8

$1 - \frac{9x^2}{16}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$1 - \frac{9x^2}{16} = 1^2 - \left(\frac{3x}{4}\right)^2$

$= \left(1 - \frac{3x}{4}\right)\left(1 + \frac{3x}{4}\right)$

பயிற்சி 6.3

1. பின்வரும் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க.

a. $x^2 - 100$	**b.** $m^2 - 36$	**c.** $p^2 - 81$
d. $4 - b^2$	**e.** $16 - a^2$	**f.** $64 - y^2$
g. $x^2 - 4y^2$	**h.** $9a^2 - 16b^2$	**i.** $100x^2 - 1$
j. $25m^2 - n^2$	**k.** $49 - 81p^2$	**l.** $25a^2b^2 - 9c^2$

பலவினப் பயிற்சி

1. பொருத்தமானவாறு உறுப்புகளை மாற்றி எழுதிக் காரணிகளைக் காண்க.

(i) $ax + by - ay - bx$ (ii) $pq - 6 + 3q + 2q$

(iii) $x - 12 + x^2$ (iv) $4 - k^2 - 3k$

2. காரணிகளைக் காண்க.

(i) $8x^2 - 50$ (ii) $3x^2 - 243$

(iii) $a^3 b^3 - ab$ (iv) $3 - 12q^2$

3. பெறுமானம் காண்க.

(i) $23^2 - 3^2$ (ii) $45^2 - 5^2$ (iii) $102^2 - 2^2$

4. நிரல் A யில் உள்ள கோவைகளுக்குப் பொருத்தமான கோவையை நிரல் B இல் இருந்து தெரிவுசெய்து தொடர்புபடுத்துக.

A	B
$x^2 - x - 6$	$\left(\frac{x}{5} - 1\right)\left(\frac{x}{5} + 1\right)$
$x^2 + 5x - 3x - 15$	$2x(x-2)(x+2)$
$2x^3 - 8x$	$(x-3)(x+5)$
$4x^2 - 9m^2$	$(x-3)(x+2)$
$\frac{x^2}{25} - 1$	$(2x - 3m)(2x + 3m)$

7 வெளிப்படையுண்மைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- கணிதத்தில் வரும் 5 வெளிப்படையுண்மைகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- இந்த 5 வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம் தொடர்புகளை உருவாக்கு வதற்கும் கேத்திரகணிதக் கணித்தலுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வெளிப்படையுண்மைகள்

நிறுவலின்றித் திட்டமாக உண்மை எனத் தெரியும் கூற்றுகள் வெளிப்படையுண்மைகள் எனப்படும். கணிதத்தில் தர்க்கரீதியாக விடயங்களை விவரிப்பதற்கும் தொடர்புகளை உருவாக்குவதற்கும் முடிவுகளை எடுப்பதற்கும் வெளிப்படையுண்மைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

கேத்திரகணிதத்தின் தந்தை எனக் கருதப்படும் கி.மு. 300 இல் கிரேக்கத்தில் வாழ்ந்த இயூக்கிலிட்டு என்ற கணிதவியலாளர் தாம் எழுதிய "Elements" என்னும் புத்தகத்தில் கணித பாடத்துடன் தொடர்புபட்ட வெளிப்படையுண்மைகளை முன்வைத்தார். அவற்றில் சில கேத்திரகணிதத்துக்கு விசேடமானவை. ஏனைய வெளிப்படையுண்மைகள் பொதுவானவையானதோடு அவற்றை அட்சரகணித்திலும் ஏனைய பகுதிகளிலும் பயன்படுத்த முடியும். பொதுவான ஐந்து வெளிப்படையுண்மைகளை இப்பாடத்தில் பார்ப்போம்.

இவ்வைந்து வெளிப்படையுண்மைகளைப் பின்வருமாறு சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

(1) ஒரே கணியத்துக்குச் சமமான கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.
(2) சமமான கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.
(3) சமமான கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.
(4) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.
(5) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இங்கு ''கணியம்'' என்பதால் கருதப்படுவது நீளம், பரப்பளவு, கனவளவு, திணிவு, கதி, கோணம் போன்றனவாகும்.

இவ்வைந்து வெளிப்படையுண்மைகளையும் பயன்படுத்தி அட்சரகணிதத்திலும் கேத்திரகணிதத்திலும் உள்ள பல பேறுகளைப் பெறமுடியும் என்பதால் அவை மிக முக்கியமானவை. இவற்றை விரிவாகப் பார்ப்போம்.

வெளிப்படையுண்மை 1

ஒரே கணியத்திற்குச் சமமான கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்

இதனைப் பின்வருமாறு சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

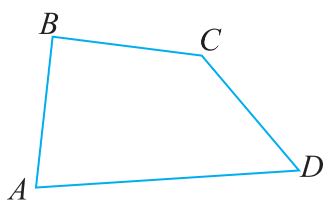
$$a = b$$
$$a = c$$
$$\therefore\ b = c \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வெளிப்படையுண்மைக்கேற்ப

"ரவியின் வயது குமாரின் வயதுக்குச் சமம் ஆகவும் ரவியின் வயது கமலின் வயதுக்குச் சமமாகவும் இருப்பின் குமாரின் வயது கமலின் வயதுக்குச் சமமாகும்".

இவ்வெளிப்படையுண்மையைக் கேத்திரகணிதத்தில் பேறுகளைப் பெறுவதற்குப் பயன்படுத்தும் உதாரணம் ஒன்றைப் பார்ப்போம்.

- கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB = BC,\ AB = CD.$

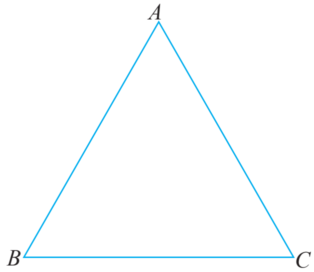


மேலே தரப்பட்டுள்ள வெளிப்படையுண்மைக்கு ஏற்ப,

$BC = CD$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC இல் $AB = AC$ உம் $AB = BC$ உம் ஆகும். $AC = 5$ cm எனின், முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவைக் காண்க.



$AC = 5$ cm ஆகவும் $AC = AB$ ஆகவும் இருப்பதனால் வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கேற்ப $AB = 5$ cm ஆகும்.

இவ்வாறே $AB = 5$ cm ஆகவும் $AB = BC$ ஆகவும் இருப்பதனால் $BC = 5$ cm ஆகும்.

ஆகவே $\Delta\, ABC$ இன் சுற்றளவு $= AC + BC + AB$

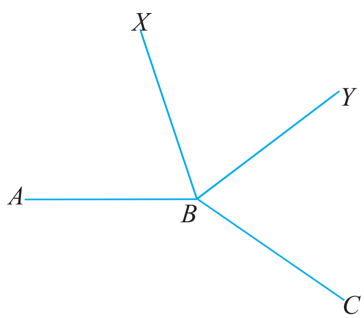
$= 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$

$= 15 \text{ cm}$

$\therefore \Delta\, ABC$ இன் சுற்றளவு 15 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $X\hat{B}Y = A\hat{B}X$ உம் $X\hat{B}Y = C\hat{B}Y$ உம் ஆகும். $A\hat{B}X$ இற்கும் $C\hat{B}Y$ இற்கும் இடையேயான தொடர்பு யாது?



$X\hat{B}Y = A\hat{B}X$ (தரப்பட்டுள்ளது)

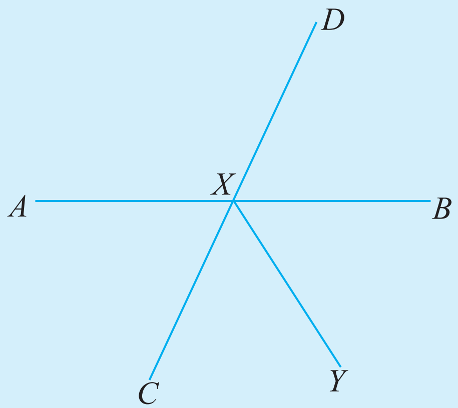
$X\hat{B}Y = C\hat{B}Y$ (தரப்பட்டுள்ளது)

வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கேற்ப

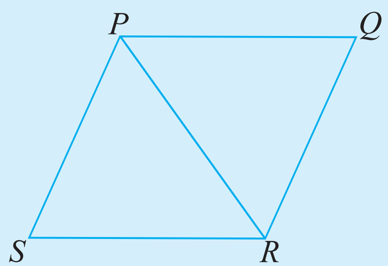
$A\hat{B}X = C\hat{B}Y$ ஆகும்.

பயிற்சி 7.1

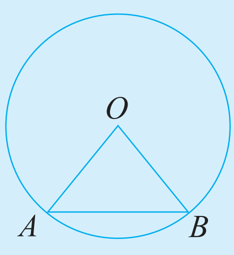
1. AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் X இல் இடைவெட்டுகின்றன. $D\hat{X}B = B\hat{X}Y$ ஆகும். $A\hat{X}C = 70^{\circ}$ எனின், $B\hat{X}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



2. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = PR$, $PQ = PS$ ஆகும். பக்கங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு முக்கோணி PSR எவ்வகை முக்கோணி எனக் கூறுக.



3. O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது A, B என்னும் புள்ளிகள் $OA = AB$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. பக்கங்களுக்கு ஏற்ப முக்கோணி ABO எவ்வகை முக்கோணி எனக் கூறுக.



வெளிப்படையுண்மை 2

சமமான கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின்,

$a + c = b + c$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையை மேலும் விரிவுபடுத்தி எழுதும்போது

$x = y$ ஆகவும் $p = q$ ஆகவும் இருப்பின்,

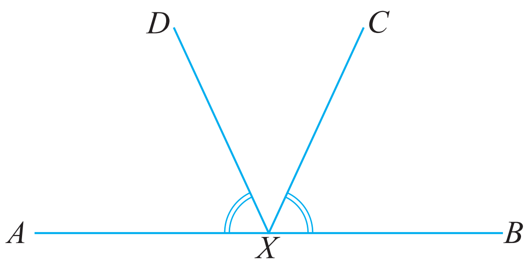
$x + p = y + q$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மைக்கேற்ப

"மரக்கறி வாங்குவதற்குச் செலவான பணம் பால் வாங்குவதற்குச் செலவான பணத்திற்குச் சமனாவதோடு பழம் வாங்குவதற்குச் செலவான பணம் முட்டை வாங்குவதற்குச் செலவான பணத்திற்குச் சமமாகவும் இருப்பின், மரக்கறியும் பழமும் வாங்குவதற்குச் செலவான மொத்தப் பணம் பாலும் முட்டையும் வாங்குவதற்குச் செலவான மொத்தப் பணத்திற்குச் சமனாகும். "

இவ்வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்திப் பெறப்படும் எளிய கேத்திரகணிதப் பேறு ஒன்றைப் பார்ப்போம்.

உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள AB என்னும் கோட்டில் X என்னும் புள்ளி உள்ளது. $A\hat{X}D = B\hat{X}C$ ஆகும்.



$A\hat{X}D = B\hat{X}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

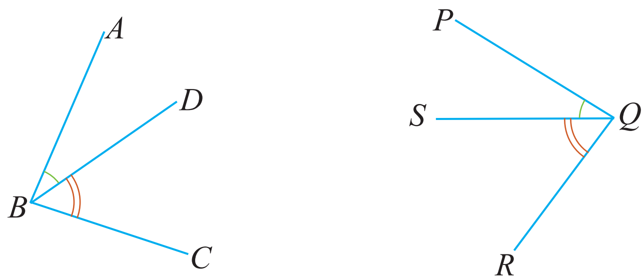
வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப

$$\underbrace{A\hat{X}D + C\hat{X}D} = \underbrace{B\hat{X}C + C\hat{X}D}$$

$$A\hat{X}C = B\hat{X}D$$

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் $A\hat{B}D = P\hat{Q}S$ உம் $C\hat{B}D = R\hat{Q}S$ உம் ஆகும்.
$A\hat{B}C = P\hat{Q}R$ எனக் காட்டுக.



$$A\hat{B}D = P\hat{Q}S,\ C\hat{B}D = R\hat{Q}S$$

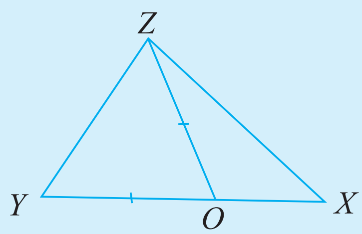
$\therefore$ மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்படையுண்மை 2 இற்கேற்ப

$$A\hat{B}D + C\hat{B}D = P\hat{Q}S + R\hat{Q}S$$

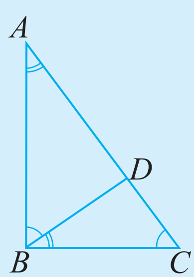
$$\therefore\ A\hat{B}C = P\hat{Q}R$$

பயிற்சி 7.2

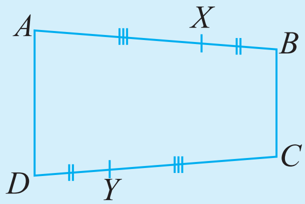
1. முக்கோணி XYZ இன் பக்கம் XY இன் மீது O என்னும் புள்ளியானது $OZ = OY$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. $XY = OZ + OX$ எனக் காட்டுக.



2. முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AC இன் மீது D என்னும் புள்ளி அமைந்துள்ளது. $A\hat{B}D = B\hat{C}D$, $C\hat{B}D = B\hat{A}D$ எனின், $B\hat{A}D + B\hat{C}D = A\hat{B}C$ எனக் காட்டுக.



3. நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் பக்கம் AB இன் மீது புள்ளி X உம் பக்கம் CD இன் மீது புள்ளி Y உம் $AX = CY$ ஆகுமாறும் $BX = DY$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன. $AB = CD$ எனக் காட்டுக.



வெளிப்படையுண்மை 3

சமமான கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின்,

$a - c = b - c$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையை மேலும் விரிவுபடுத்தி எழுதுவோமானால்

$a = b$ ஆகவும் $c = d$ ஆகவும் இருப்பின், $a - c = b - d$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையைப் பயன்படுத்திப் பெறக்கூடிய கேத்திரகணிதப் பேறு ஒன்றைப் பார்ப்போம்.

- கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AD = CB$ ஆகும்.

$$AD = CB$$

வெளிப்படையுண்மை 3 இற்கேற்ப

$$AD - CD = CB - CD$$

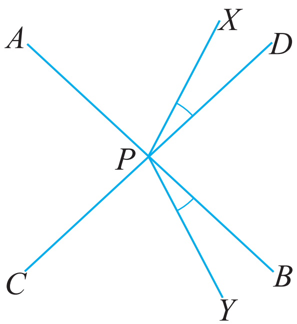
$$\therefore\ AC = DB$$

உதாரணம் 1

AB, CD என்னும் நேர்கோடுகள் P இல் வெட்டுகின்றன. $X\hat{P}D = B\hat{P}Y$ ஆகும்.

(i) $A\hat{P}X = C\hat{P}Y$ எனக் காட்டுக.

(ii) $A\hat{P}D = 70^{\circ}$, $X\hat{P}D = 20^{\circ}$ எனின், $C\hat{P}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) $A\hat{P}D = B\hat{P}C$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$X\hat{P}D = B\hat{P}Y$ (தரப்பட்டுள்ளது)

வெளிப்படையுண்மை 3 இற்கேற்ப,

$$\underbrace{A\hat{P}D - X\hat{P}D} = \underbrace{B\hat{P}C - B\hat{P}Y}$$
$$A\hat{P}X = C\hat{P}Y$$

(ii) $A\hat{P}X = A\hat{P}D - X\hat{P}D$

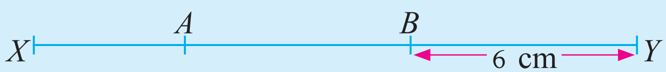
$A\hat{P}X = 70^{\circ} - 20^{\circ}$

$A\hat{P}X = 50^{\circ}$

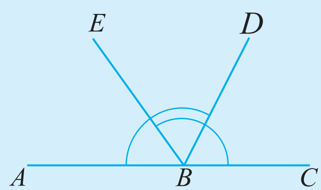
$\therefore\ C\hat{P}Y = 50^{\circ}$

பயிற்சி 7.3

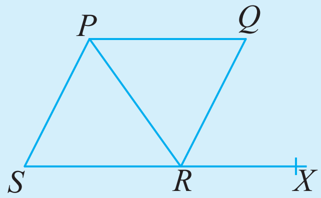
1. நேர்கோடு XY இன் மீது A, B என்னும் புள்ளிகள் $XB = AY$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $XY = 16$ cm, $BY = 6$ cm எனின், AB இன் நீளத்தைக் காண்க.



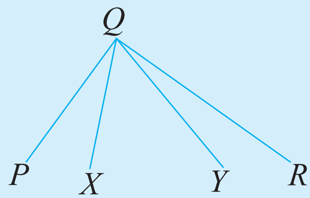
2. நேர்கோடு AC இன் மீது B என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது. $A\hat{B}D = C\hat{B}E$ ஆகும். $A\hat{B}E = C\hat{B}D$ எனக் காட்டுக.



3. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $Q\hat{P}S = P\hat{R}X$ உம் $S\hat{P}R = P\hat{R}Q$ உம் எனின், $Q\hat{P}R = Q\hat{R}X$ எனக் காட்டுக.



4. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $P\hat{Q}Y = X\hat{Q}R$ ஆகும்.
$P\hat{Q}R = 110^{\circ}$, $P\hat{Q}X = 35^{\circ}$ எனின்,
(i) $R\hat{Q}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) $X\hat{Q}Y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



வெளிப்படையுண்மை 4

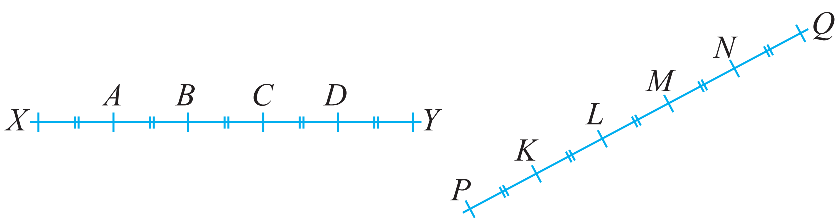
சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின், அப்போது $ac = bc$ ஆகும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையைக் கேத்திரகணிதத்தில் பயன்படுத்தும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தைப் பார்ப்போம்.

- உருவில் காட்டப்பட்டவாறு XY என்னும் கோட்டின்மீது $XA = AB = BC = CD = DY$ ஆகுமாறு A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. PQ என்னும் கோட்டின் மீது $PK = KL = LM = MN = NQ$ ஆகுமாறு K, L, M, N ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. மேலும் $XA = PK$ எனின், $XY = PQ$ எனக் காட்டுக.



இங்கு $XY = PQ$ எனப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

முதலில் $XA = AB = BC = CD = DY$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்,

$$XY = XA + AB + BC + CD + DY$$

$\therefore\ XY = 5XA$

இவ்வாறே $PK = KL = LM = MN = NQ$ ஆகையால்

$PQ = PK + KL + LM + MN + NQ$

$\therefore\ XY = 5XA$

ஆனால் $XA = PK$ ஆகையால்

வெளிப்படையுண்மை 4 இற்கு ஏற்ப

$5XA = 5PK$

அதாவது $XY = PQ$ ஆகும்.

வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம் பேறுகளை நிறுவும் விதத்தை விளங்கிக் கொள்வது முக்கியம். ஆயினும் பல இடங்களிலும் வெளிப்படையுண்மை பற்றிய விவரத்தைக் குறிப்பிடாது பேறுகளை மாத்திரம் எழுதுவது சாதாரண வழக்கம். அதற்கான காரணம் வெளிப்படையுண்மை என்ற சொல்லிற்கு ஏற்ப, அதனைப் பயன்படுத்தி எழுதும் பேறுகளை அனைவருக்கும் இலகுவாக விளங்கிக்கொள்ள முடியும்.

இவ்வெளிப்படையுண்மையை அட்சரகணிதத்தில் பயன்படுத்தும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

$x = 5,\ y = 2x$ எனின், y இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

$x = 5$ ஆகையால் மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்படையுண்மைக்கு ஏற்ப $2x = 2 \times 5$

மேலும் $2 \times 5 = 10$ மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கு ஏற்ப

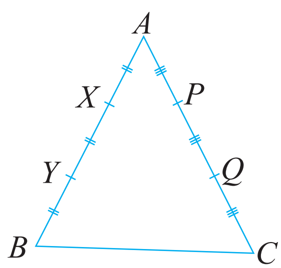
$y = 2x$

$2x = 10$

$\therefore\ y = 10$

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AB இன் மீது X, Y என்ற புள்ளிகள் $AX = XY = YB$ ஆகுமாறும் பக்கம் AC இன் மீது P, Q என்ற புள்ளிகள் $AP = PQ = QC$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளன. $AX = AP$ எனின் AB, AC என்பவற்றுக்கு இடையிலான தொடர்பைக் காண்க.



$AX = XY = YB$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore\ AB = 3AX$

$AP = PQ = QC$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AC = 3AP$

$AX = AP$ (தரப்பட்டுள்ளது)

வெளிப்படையுண்மை 4 இற்கேற்ப

$3AX = 3AP$

$\therefore AB = AC$

வெளிப்படையுண்மை 5

சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

இதனைச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$a = b$ எனின், அப்போது $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ஆகும்.

இங்கு c என்பது பூச்சியமல்லாத ஓர் எண் ஆகும். பூச்சியத்தினால் வகுப்பது வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதால் அச்சந்தர்ப்பங்கள் கருத்திற்கொள்ளப்பட மாட்டா.

- உருக்களில் AB, CD ஆகிய நேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்கள் சமம். (அதாவது $AB = CD$) AB இன் மீது $AX = XY = YB$ ஆகுமாறு X, Y என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. CD இன் மீது $CP = PQ = QD$ ஆகுமாறு P, Q என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

இங்கு, $AX = CP$ என எவ்வாறு காட்டலாம் எனப் பார்ப்போம்.

$AX = XY = YB$ ஆகையால் $\frac{AB}{3} = AX$ ஆகும்.

$CP = PQ = QD$ ஆகையால் $\frac{CD}{3} = CP$ ஆகும்.

$AB = CD$ ஆகையால்

$\frac{AB}{3} = \frac{CD}{3}$

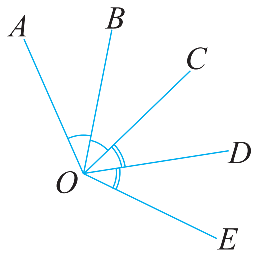
$\therefore AX = CP$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

கீழே காணப்படும் உருவில் $A\hat{O}B = B\hat{O}C$, $C\hat{O}D = D\hat{O}E$ ஆகும். $A\hat{O}C = C\hat{O}E$ எனின்,

(i) $A\hat{O}B$, $D\hat{O}C$ என்வற்றுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

(ii) $B\hat{O}C = 35^{\circ}$ எனின், $D\hat{O}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore A\hat{O}B = \frac{A\hat{O}C}{2}$

$C\hat{O}D = D\hat{O}E$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore D\hat{O}E = \frac{C\hat{O}E}{2}$

$A\hat{O}C = C\hat{O}E$

$\frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{C\hat{O}E}{2}$

$\therefore$ வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப $A\hat{O}B = D\hat{O}E$.

(ii) $A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{O}B = B\hat{O}C$ (தரப்பட்டுள்ளது)

(வெளிப்படையுண்மை 1 இற்கேற்ப)

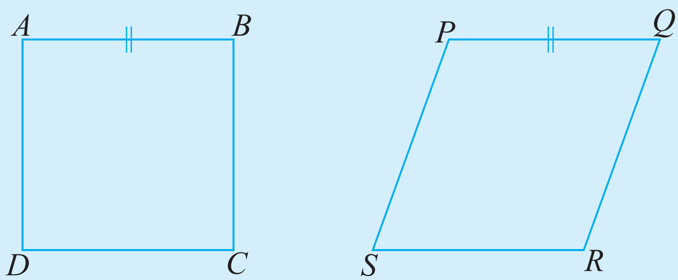
$\therefore A\hat{O}B = 35^{\circ}$ ($\because$ $BOC = 35^{\circ}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{O}B = D\hat{O}E$ (நிறுவப்பட்டுள்ளது)

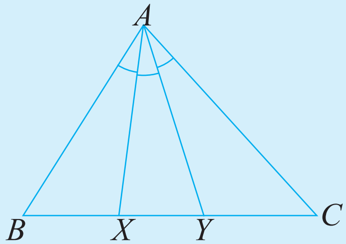
$\therefore D\hat{O}E = 35^{\circ}$.

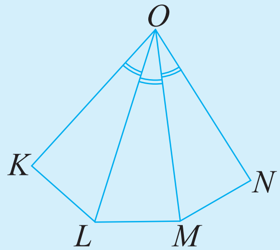
பயிற்சி 7.4

1. சதுரம் $ABCD$, சாய்சதுரம் $PQRS$ என்பவற்றில் $AB = PQ$ ஆகும். வெளிப்படையுண்மை 4 ஐப் பயன்படுத்தி
   - (i) சதுரம் $ABCD$ இன் சுற்றளவும் சாய்சதுரம் $PQRS$ இன் சுற்றளவும் சமம் எனக் காட்டுக.
   - (ii) $AB = 7$ cm எனின், சாய்சதுரம் $PQRS$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

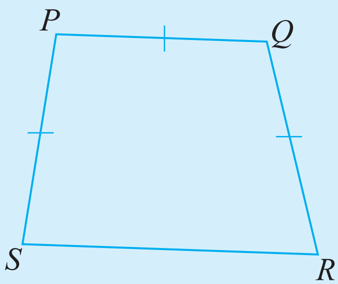


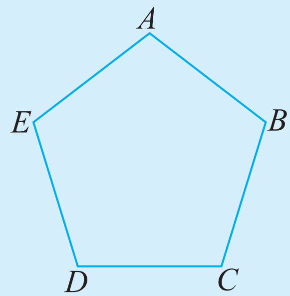
2. உருவில் முக்கோணி ABC இல் $B\hat{A}X = X\hat{A}Y = C\hat{A}Y$ ஆகும். ஐங்கோணி $KLMNO$ இல் $M\hat{O}N = L\hat{O}M = K\hat{O}L$ ஆகும். $B\hat{A}C = K\hat{O}N$ எனின்,
   (i) $X\hat{A}Y = M\hat{O}L$ எனக் காட்டுக.
   (ii) $X\hat{A}Y = 30^{o}$ எனின், $K\hat{O}N$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.





3. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = QR = SP$ உம் $2PQ = RS$ உம் ஆகும். ஒழுங்கான ஐங்கோணி $ABCDE$ இன் சுற்றளவு நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் சுற்றளவுக்குச் சமமாகும்.
   (i) PQ இற்கும் AB இற்கும் இடையிலான தொடர்பைக் காண்க.
   (ii) $AB = 8\text{ cm}$ எனின், நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.





வெளிப்படையுண்மைகளின் பயன்பாடுகள்

உதாரணம் 1

வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.
$2x + 5 = 13$
சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் என்பது x இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதாகும்.
இங்கு $2x + 5$ என்ற கணியம் 13 என்ற கணியத்திற்குச் சமம். வெளிப்படையுண்மை 3 இற்கு ஏற்ப இவ்விரண்டு சம கணியங்களிலிருந்தும் 5 ஐக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமம் ஆகையால்,

$$2x + 5 - 5 = 13 - 5.$$
$$2x = 8$$

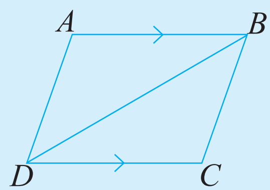
இங்கு $2x$ என்ற கணியம் 8 என்ற கணியத்திற்குச் சமம் எனப் பெறப்பட்டுள்ளது. வெளிப்படையுண்மை 5 இற்கேற்ப இவ்விரு கணியங்களையும் 2 ஆல் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமம் ஆகையால் $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

சுருக்குவதன் மூலம் $x = 4$ எனப் பெறப்படுகின்றது.

எனவே சமன்பாட்டின் தீர்வு 4 ஆகும்.

பலவினப் பயிற்சி

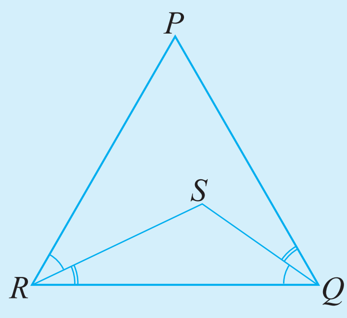
1. நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் $AB//CD$, $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ஆகும். வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம் நாற்பக்கல் $ABCD$ ஆனது ஓர் இணைகரம் ஆகும் எனக் காட்டுக.



2. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $P\hat{R}S = S\hat{Q}R$, $Q\hat{R}S = P\hat{Q}S$ ஆகுமாறு S என்னும் புள்ளி அமைந்துள்ளது. வெளிப்படையுண்மைகளின் மூலம்

(i) $P\hat{R}Q = P\hat{Q}R$ எனக் காட்டுக.

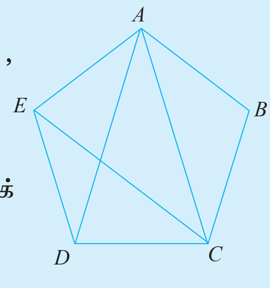
(ii) $R\hat{P}Q = P\hat{R}Q$ எனின், ΔPQR இன் கோணங்கள் யாவும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனக் காட்டுக.



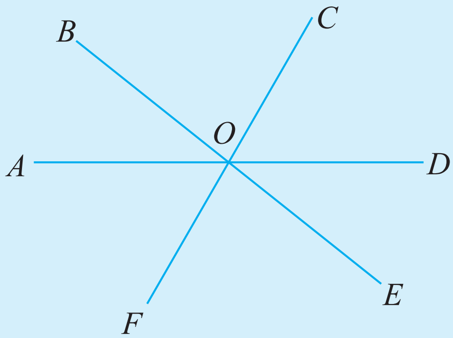
3. ஒழுங்கான ஐங்கோணி $ABCDE$ இல் $E\hat{A}D = D\hat{A}C = B\hat{A}C$, $B\hat{C}A = A\hat{C}E = D\hat{C}E$ ஆகும்.

(i) $B\hat{C}A = B\hat{A}C$ எனக் காட்டுக.

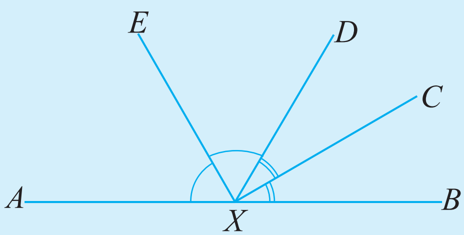
(ii) $B\hat{A}C = 36^{\circ}$ எனின், $C\hat{D}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



4. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு AD, BE, CF என்னும் நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று O என்ற புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன. $D\hat{O}E = A\hat{O}F$ எனின், $B\hat{O}D = D\hat{O}F$ எனக் காட்டுக.



5. AB என்ற நேர்கோட்டின் மீது புள்ளி X அமைந்துள்ளது. $A\hat{X}E = E\hat{X}D$, $B\hat{X}C = C\hat{X}D$ ஆகும். $C\hat{X}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



பொழிப்பு

பொதுவாகப் பயன்படுத்தும் 5 வெளிப்படையுண்மைகள்

(1) ஒரே கணியத்துக்குச் சமமான கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

(2) சமமான கணியங்களுடன் ஒரே கணியத்தைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

(3) சமமான கணியங்களிலிருந்து ஒரே கணியத்தைக் கழிப்பதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

(4) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

(5) சமமான கணியங்களை ஒரே கணியத்தினால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் கணியங்களும் சமமாகும்.

8 நேர்கோடுகளுடனும் சமாந்தரக் கோடுகளுடனும் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

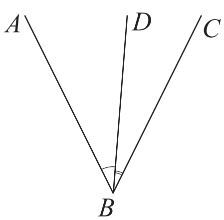
- ஒரு நேர்கோடு வேறொரு நேர்கோட்டினைச் சந்திக்கும்போது அல்லது வேறொரு நேர்கோட்டினை இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் அடுத்துள்ள கோணங்களும் மற்றும் குத்தெதிர்க் கோணங்களும் இடம்பெறும் தேற்றங்களை அறிந்துகொள்வதற்கும் அவற்றினை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கும் அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- இரு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் கோணங்களை இனங்காண்பதற்கும்
- இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்களை அறிந்துகொள்வதற்கும் வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்கும் அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அறிமுகம்

முதலில் கேத்திரகணிதம் தொடர்பாக முன்னைய தரங்களில் கற்ற சில அடிப்படை விடயங்களை நினைவுகூர்வோம்.

அடுத்துள்ள கோணங்கள்



- பொது உச்சி காணப்படும்.
  $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ ஆகிய இரு கோணங்களுக்கும் பொது உச்சி உண்டு. அப்பொது உச்சி B ஆகும்.
- பொதுப் புயம் காணப்படும்.
  $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ என்பவற்றுக்குப் பொதுப் புயம் உண்டு. அது BD ஆகும்.
- பொதுப் புயத்தின் இரு புறத்திலும் கோணங்கள் அமைந்திருக்கும்.

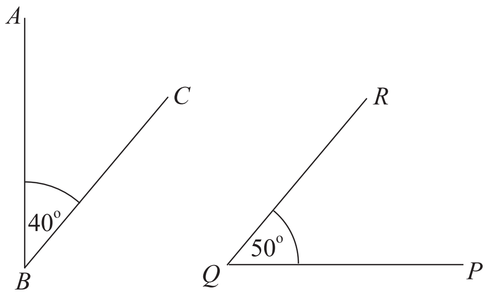
  BD இன் இரு புறத்திலும் $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ என்னும் கோணங்கள் அமைந்துள்ளன.

$\therefore A\hat{B}D$ உம் $D\hat{B}C$ உம் ஓர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

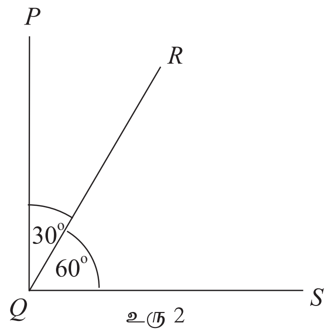
குறிப்பு

ஆனால் $A\hat{B}D$ உம் $A\hat{B}C$ உம் ஓர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியன்று. அதற்குக் காரணம் இவ்விரு கோணங்களும் பொதுப் புயத்தின் இரு பக்கங்களிலும் அமைந்திருக்காமையாகும்.

நிரப்பு கோணங்கள்



உரு 1

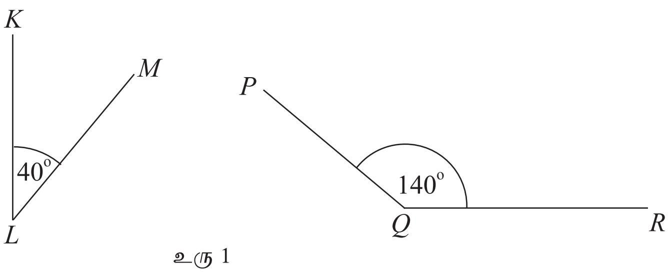


உரு 2

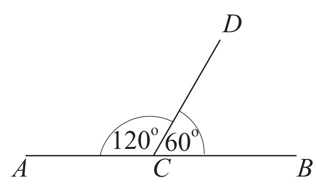
உரு 1 இல் $A\hat{B}C + P\hat{Q}R = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ ஆகையால், $A\hat{B}C$, $P\hat{Q}R$ ஆகிய கோணச் சோடி நிரப்பு கோணங்களாகும்.

உரு 2 இல் $P\hat{Q}R$, $R\hat{Q}S$ ஆகியன அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும். மேலும் $P\hat{Q}R + R\hat{Q}S = 90^\circ$ ஆகையால், அக்கோணச்சோடி நிரப்பு கோணங்களும் ஆகும். எனவே $P\hat{Q}R$, $R\hat{Q}S$ ஆகியன ஒரு நிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

மிகைநிரப்பு கோணங்கள்



உரு 1

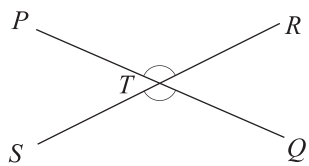


உரு 2

உரு 1 இல் $K\hat{L}M + P\hat{Q}R = 180^\circ$ ஆகையால், $K\hat{L}M$, $P\hat{Q}R$ ஆகிய கோணச் சோடி மிகைநிரப்பு கோணங்களாகும்.

உரு 2 இல் $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$ ஆகியன ஓர் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும். மேலும் $A\hat{C}D + B\hat{C}D = 180^{o}$ ஆகையால், அக்கோணச் சோடி $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$ ஆகியன ஒரு மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும்.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள்



PQ, RS ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் T இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் $P\hat{T}R$, $S\hat{T}Q$ ஆகிய கோணச் சோடி குத்தெதிர்க் கோணங்களாகும்.

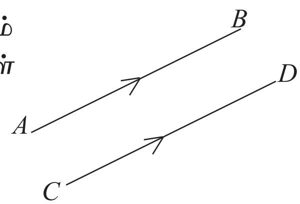
அவ்வாறே $P\hat{T}S$, $R\hat{T}Q$ ஆகியனவும் வேறொரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடியாகும்.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் பருமனில் ஒன்றுக்கொன்று சமம்

ஆகவே $P\hat{T}R = S\hat{T}Q$, $P\hat{T}S = R\hat{T}Q$

சமாந்தர நேர்கோடுகள்

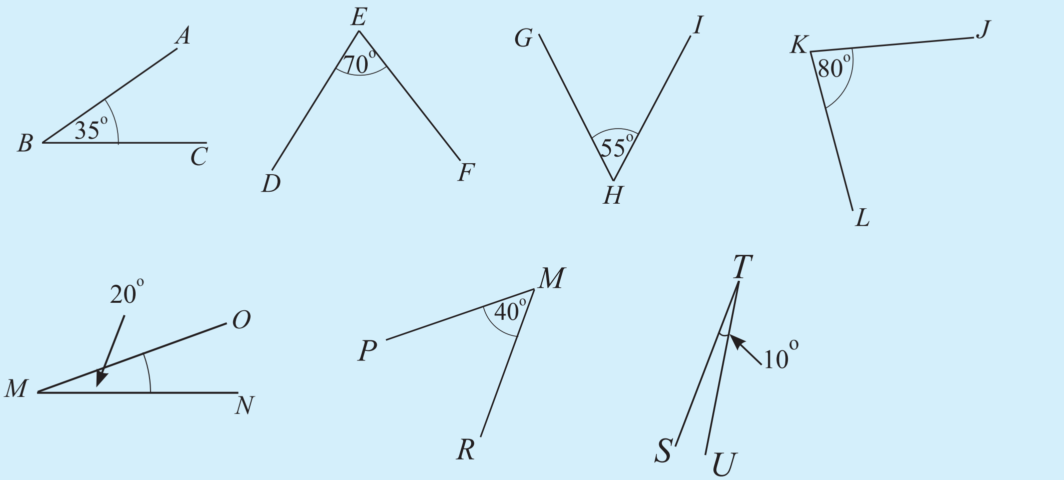
இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கு இடையேயான செங்குத்துத் தூரம் எப்போதும் சமமாக இருப்பின், அவை சமாந்தர நேர்கோடுகள் எனப்படும். இங்கு $AB \parallel CD$ ஆகும்.



இவ்விடயங்கள் பற்றிய அறிவை மேலும் உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

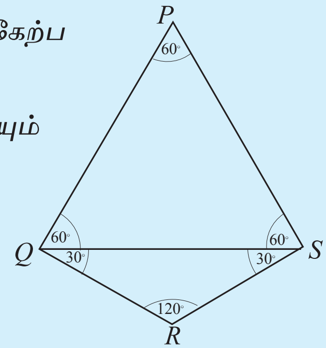
1. பின்வரும் கோணங்களிலிருந்து நிரப்பு கோணச் சோடிகளைத் தெரிந்து அவை எல்லாவற்றையும் எழுதுக.



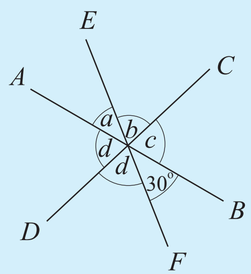
2. உருவில் உள்ள ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனுக்கேற்ப

(i) நிரப்பு கோணச் சோடிகள் நான்கையும்
(ii) நிரப்பு அடுத்துள்ள கோணச் சோடிகள் இரண்டையும்
(iii) மிகைநிரப்பு கோணச் சோடிகள் இரண்டையும்

எழுதுக.

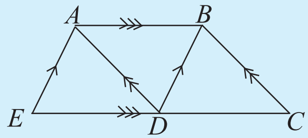


3. உருவில் AB, CD, EF ஆகிய நேர்க்கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன. அதில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப



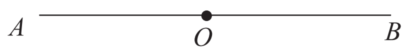
(i) a இன் மூலம் காட்டப்படும் கோணத்தின் பெறுமானத்தைத் தருக.
(ii) $b = d$ ஆக இருப்பதற்குக் காரணத்தைத் தருக.
(iii) d இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(iv) b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் தருக.

4. உருவில் காணப்படும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகள் 3 தருக.

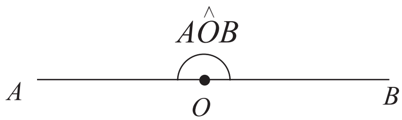


8.1 நேர்கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

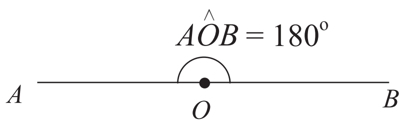
ஒரு நேர்கோடு AB மீது புள்ளி O இருக்கின்றதெனக் கொள்வோம்.



இப்போது $A\hat{O}B$ ஆனது AO, OB ஆகியவற்றைப் புயங்களாகக் கொண்ட ஒரு கோணமெனக் கருதலாம். அத்தகைய ஒரு கோணம் நேர்கோணம் எனப்படும்.

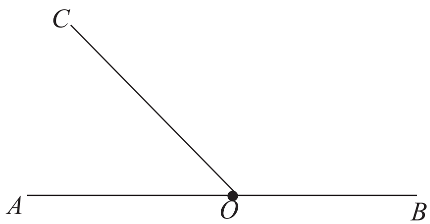


ஒரு நேர்கோணத்தின் பெறுமானம் 180° ஆக இருக்குமாறு கோணங்களை அளப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் பாகை தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றது. ஆகவே $A\hat{O}B = 180^{\circ}$ என எழுதலாம்.



இதற்கேற்ப ஒரு நேர்கோணத்தின் பெறுமானம் 180° ஆகும்.

ஒரு நேர்கோடு AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இல் இரு கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ள ஒரு சந்தர்ப்பம் கீழே காணப்படுகின்றது.



இங்கு $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ ஆகிய கோணங்கள் இரண்டும் ஓர் அடுத்துள்ளக் கோணச் சோடியாகும். அத்தகைய ஓர் அமைவில் $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ ஆகிய இரு அடுத்துள்ள கோணங்களும் நேர்கோடு AB மீது இருப்பதாகக் கூறப்படும். மேலும் $A\hat{O}B = 180^{\circ}$ ஆகையால்,

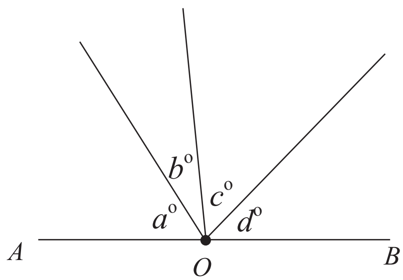
$$A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^{\circ}$$

என்பது தெளிவாகும். அதாவது $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$ ஆகிய இரு கோணங்களும் ஒரு மிகைநிரப்பு அடுத்துள்ள கோணச் சோடியாகும். இங்கு ஆராய்ந்த விடயங்களை பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாகக் காட்டலாம்.

தேற்றம்

ஒரு நேர்கோடு மீது அமைந்திருக்கும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.

மேலே ஆராய்ந்த விடயங்களை மேலும் பொதுவாக எடுத்துரைக்கலாம். ஓர் உதாரணமாக ஒரு நேர்கோடு AB மீது இருக்கும் புள்ளி O இல் நான்கு கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ள சந்தர்ப்பம் கீழே காணப்படுகின்றது.



அக்கோணங்களின் பெறுமானங்கள் பாகைகளில் a, b, c, d எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இத்தகைய ஓர் அமைவில் அக்கோணங்கள் எல்லாம் நேர்கோடு AB மீது உள்ளனவெனக் கூறப்படும். மேலும் $A\hat{O}B = 180^{o}$ ஆகையால்

$$a + b + c + d = 180$$

என்பது தெளிவாகும். கோணங்களின் எவ்வெண்ணிக்கைக்கும் இத்தொடர்புடைமை உண்மையானது என்பது தெளிவாகும். அதாவது

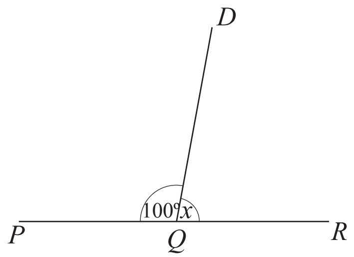
ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்திருக்கும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} ஆகும்.

இப்போது இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தை உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் PQR ஒரு நேர்கோட்டில் இருப்பின், x இன் மூலம் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i)



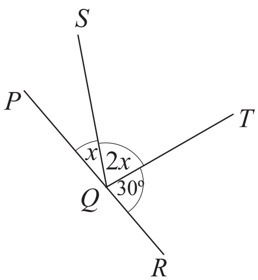
$P\hat{Q}D + D\hat{Q}R = 180^\circ$ (நேர்கோடு PQR மீது உள்ள கோணங்கள்)

$100^\circ + x = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 100^\circ$

$= 80^\circ$

(ii)



$P\hat{Q}S + S\hat{Q}T + T\hat{Q}R = 180^\circ$ (நேர்கோடு PQR மீது உள்ள கோணங்கள்)

$x + 2x + 30^\circ = 180^\circ$

$3x + 30^\circ = 180^\circ$

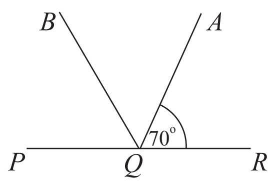
$3x = 180^\circ - 30^\circ$

$3x = 150^\circ$

$x = 50^\circ$

உதாரணம் 2

உருவில் $A\hat{Q}R = 70^\circ$ உம் $P\hat{Q}A$ இன் இருகூறாக்கி QB உம் ஆகும். $A\hat{Q}B$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



PQR ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்,

$P\hat{Q}A + A\hat{Q}R = 180^\circ$ (நேர்கோடு PQR மீது உள்ள கோணங்கள்)

$P\hat{Q}A + 70^\circ = 180$

$\therefore \quad P\hat{Q}A = 180 - 70^{\circ}$

$\qquad\qquad = 110^{\circ}$

$P\hat{Q}A$ இன் இருகூறாக்கி BQ ஆகையால்,

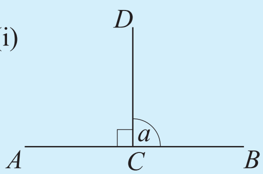
$$P\hat{Q}B = A\hat{Q}B = \frac{1}{2}\, P\hat{Q}A$$

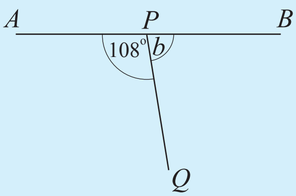
$$\therefore \quad A\hat{Q}B = \frac{110^{\circ}}{2}$$

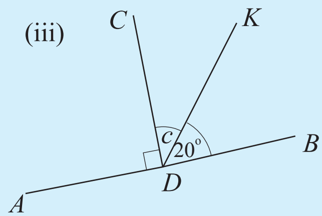
$$= 55^{\circ}$$

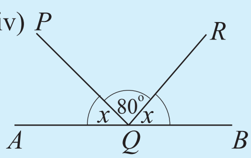
பயிற்சி 8.1

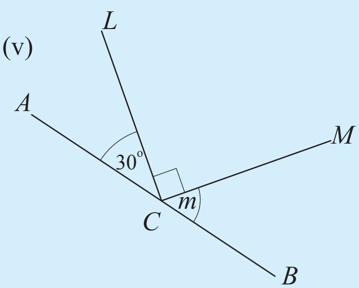
1. கீழே உள்ள உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் இருக்கும் தகவல்களுக்கேற்ப ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்தினால் காட்டப்பட்டுள்ள கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

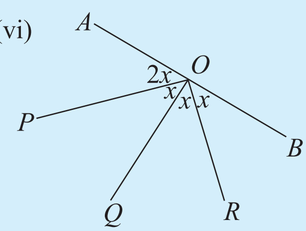
(i)


(ii)


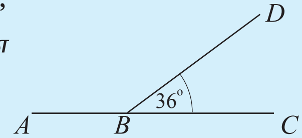
(iii)


(iv)


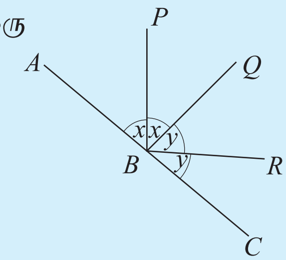
(v)


(vi)


2. உருவில் ABC ஒரு நேர்கோடாகும். $D\hat{B}C = 36^{\circ}$ எனின், $A\hat{B}D$ இன் பெறுமானம் $D\hat{B}C$ இன் பெறுமானத்தின் நான்கு மடங்கெனக் காட்டுக.

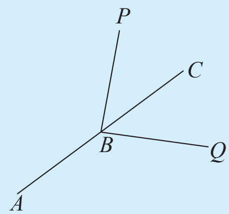


3. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $P\hat{B}R$ ஒரு செங்கோணமெனக் காட்டுக.

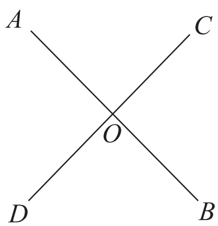


4. உருவில் ABC ஒரு நேர்கோடு. $P\hat{B}C = C\hat{B}Q$ ஆகும்.

$A\hat{B}P = A\hat{B}Q$ எனக் காட்டுக.



8.2 குத்தெதிர்க் கோணங்கள்



உருவில் AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.

இங்கு உச்சி O ஆனது $A\hat{O}C$, $D\hat{O}B$ ஆகிய கோணங்களுக்குப் பொதுவானது. மேலும் அக்கோணங்கள் O இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் இருக்கின்றன.

இந்த $A\hat{O}C$, $D\hat{O}B$ ஆகிய கோணங்கள் ஒரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடி எனப்படும்.

அவ்வாறே உச்சி O இல் $A\hat{O}D$ உம் அதற்கு எதிர்ப் பக்கத்தில் $B\hat{O}C$ உம் இருக்கும் அதே வேளை உச்சி O அவ்விரு கோணங்களுக்கும் பொதுவானதாகும்.

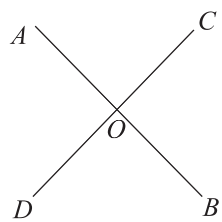
ஆகவே $A\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ ஆகியனவும் ஒரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடியாகும்.

இதற்கேற்ப இரு நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும்போது இரு குத்தெதிர்க் கோணச் சோடிகள் உண்டாகின்றன என்பது தெளிவாகும்.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் தொடர்பான ஒரு தேற்றத்தைக் கருதுவோம்.

தேற்றம்
இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும்போது உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

உருவைப் பார்க்கும்போது ''குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம்'' என்னும் விடயம் உங்களுக்கு வெளிப்படையாகத் தெரியவரும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. எனினும் நாம் இப்பாடத்தில் மேலே கற்ற ''ஒரு நேர்கோடு மீது உள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்'' என்னும் வெளிப்படையுண்மை பற்றிய அறிவையும் பயன்படுத்தி இத்தேற்றம் முறையாக நிறுவப்படும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.



தரவு: AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.

நிறுவ வேண்டியது: $A\hat{O}C = B\hat{O}D$,

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$

நிறுவல்:

AB ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்,

$A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு AOB மீது உள்ள கோணங்கள்)

அவ்வாறே CD உம் ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்,

$B\hat{O}C + B\hat{O}D = 180^{\circ}$ (நேர்கோடு COD மீது உள்ள கோணங்கள்)

$\therefore\ A\hat{O}C + B\hat{O}C = B\hat{O}C + B\hat{O}D$ (வெளிப்படையுண்மை)

இரு பக்கங்களிலிருந்தும் $B\hat{O}C$ ஐக் கழிக்கும்போது

$$A\hat{O}C + \cancel{B\hat{O}C} - \cancel{B\hat{O}C} = \cancel{B\hat{O}C} - \cancel{B\hat{O}C} + B\hat{O}D \text{ (வெளிப்படையுண்மை)}$$

$$A\hat{O}C = B\hat{O}D$$

இவ்வாறே $A\hat{O}D + A\hat{O}C = 180^\circ$ (நேர்கோடு COD மீது உள்ள கோணங்கள்)

$A\hat{O}C + B\hat{O}C = 180^\circ$ (ஒரு நேர்கோடு AOB மீது உள்ள கோணங்கள்)

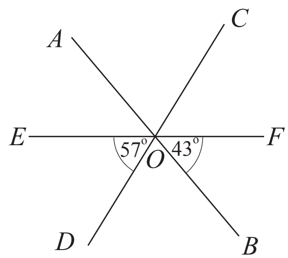
$\therefore \quad A\hat{O}D + A\hat{O}C = A\hat{O}C + B\hat{O}C$ (வெளிப்படையுண்மை)

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் $A\hat{O}C$ ஐக் கழிக்கும்போது

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$

இத்தேற்றம் தொடர்பான பயிற்சியில் ஈடுபடுவதற்குப் பின்வரும் உதாரணங்களில் கவனஞ் செலுத்துக.

உதாரணம் 1



உருவில் உள்ள தகவல்களின் மீது காரணங் காட்டி

(i) $D\hat{O}B$ இன் பெறுமானம்

(ii) $A\hat{O}C$ இன் பெறுமானம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) EOF ஒரு நேர்கோடு ஆகையால்

$E\hat{O}D + D\hat{O}B + B\hat{O}F = 180^\circ$ (ஒரு நேர்கோடு மீது உள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$$57^\circ + D\hat{O}B + 43^\circ = 180^\circ$$

$$D\hat{O}B = 180^\circ - (57^\circ + 43^\circ)$$

$$= 180^\circ - 100^\circ$$

$$\therefore \quad D\hat{O}B = 80^\circ$$

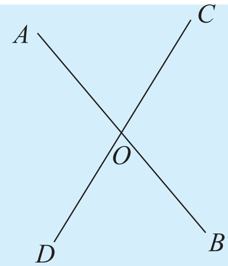
(ii) $A\hat{O}C = D\hat{O}B$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$D\hat{O}B = 80^\circ$ (முன்னர் காட்டப்பட்டுள்ளது)

$\therefore \; A\hat{O}C = 80^\circ$

பயிற்சி 8.2

1. உருவில் AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகள் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.



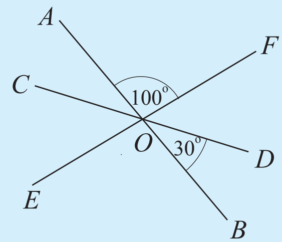
$A\hat{O}C = 80^{\circ}$ எனின்,

(i) $B\hat{O}D$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $A\hat{O}D$ இற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.

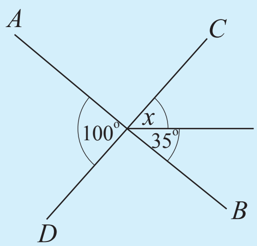
2. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்பப் பின்வரும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $A\hat{O}C$ (ii) $B\hat{O}E$ (iii) $C\hat{O}E$



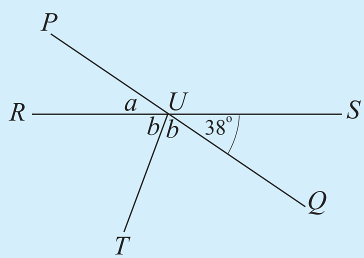
3. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகவல்களிலிருந்து ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்தினால் காட்டப்படும் கோணத்தின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i)



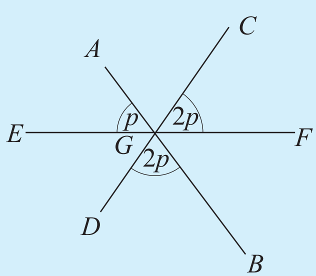
இந்த உருவில் AB உம் CD உம் நேர்கோடுகளாகும்.

(ii)



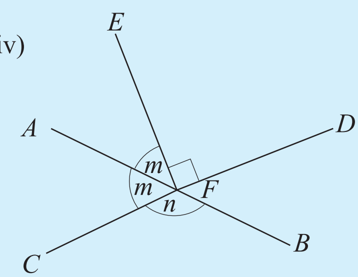
இந்த உருவில் RS உம் PQ உம் நேர்கோடுகளாகும்.

(iii)



இந்த உருவில் AB, CD, EF என்பன நேர்கோடுகளாகும்.

(iv)



இந்த உருவில் AB உம் CD உம் நேர்கோடுகளாகும்.

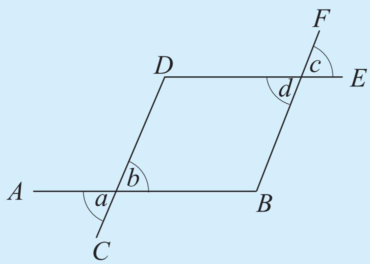
4. உருவில் AB, CD, DE, BF என்பன நேர்கோடுகளாகும். அத்துடன் a, b, c, d ஆகியவற்றினால் காட்டப்படும் கோணங்களில் $a = d$ ஆகும். $b = c$ என நிறுவும் பின்வரும் படிமுறைகளில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

$a = b$ (................)

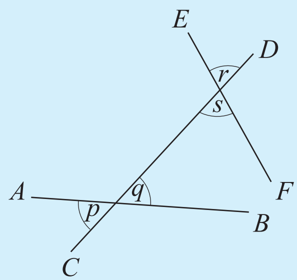
$d =$ ..... (................)

ஆனால் ..... = ... (தரவு)

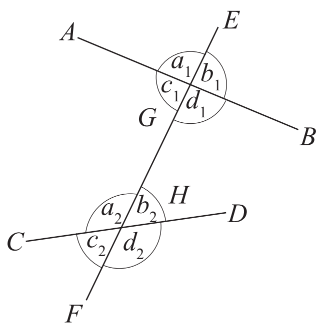
$\therefore \quad b = c$



5. உருவில் AB, CD, FE ஆகியன நேர்கோடுகளாகும். இத்துடன் $p = r$ ஆகும். $s = q$ என நிறுவுக.



8.3 ஒத்த கோணங்கள், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், நேயக் கோணங்கள்



மேலே காட்டப்பட்டுள்ள உருவில் AB, CD என்னும் இரு நேர்கோடுகள் கோடு EF இனால் முறையே G, H ஆகியவற்றில் இடைவெட்டப்படுகின்றன.

இக்கோடு EF ஆனது **குறுக்கோடி** எனப்படும்.

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட நேர்கோடுகளை வெட்டுமாறு வரையப்படும் நேர்கோடு **குறுக்கோடி** எனப்படும்.

மேற்குறித்த உருவில் புள்ளி G ஐச் சுற்றி நான்கு கோணங்களும் புள்ளி H ஐச் சுற்றி நான்கு கோணங்களும் உள்ளன. இக்கோணங்கள் இருக்கும் விதத்திற்கேற்ப அவை சோடிகளாக விசேட பெயர்களினால் அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒத்த கோணங்கள்

பின்வரும் நான்கு கோணச் சோடிகளையும் கருதுக.

(i) a_1 உம் a_2 உம் (ii) b_1 உம் b_2 உம் (iii) c_1 உம் c_2 உம் (iv) d_1 உம் d_2 உம்

இக்கோணச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒத்த கோணச் சோடியாகும். ஒத்த கோணச் சோடியாக இருப்பதற்கு இரு கோணங்களுக்கும் பின்வரும் இயல்புகள் இருத்தல் வேண்டும்.

1. இரு கோணங்களும் ஒரு குறுக்கோடியின் ஒரே பக்கத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப a_1, a_2 மற்றும் c_1, c_2 ஆகிய இரு கோணச் சோடிகளும் குறுக்கோடியின் இடது பக்கத்தில் உள்ளன. அதேபோல் b_1, b_2 மற்றும் d_1, d_2 ஆகிய இரு கோணச் சோடிகளும் குறுக்கோடியின் வலது பக்கத்தில் உள்ளன.

2. இரு கோணங்களும் இரு நேர்கோடுகள் பற்றி ஒரே திசையில் இருத்தல் வேண்டும்.

தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப a_1, a_2 ஆகிய இரு கோணங்களும் மற்றும் b_1, b_2 ஆகிய கோணங்களும் முறையே AB, CD ஆகிய கோடுகளுக்கு மேலே உள்ளன. c_1, c_2 ஆகிய கோணங்களும் மற்றும் d_1, d_2 ஆகிய கோணங்களும் முறையே AB, CD ஆகிய கோடுகளுக்குக் கீழே உள்ளன.

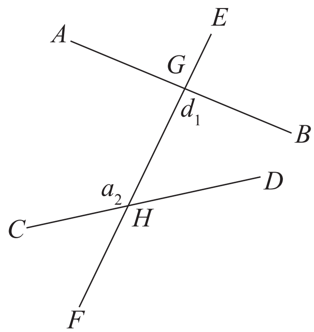
ஆகவே இங்கே காணப்படும் கோணச் சோடிகள்

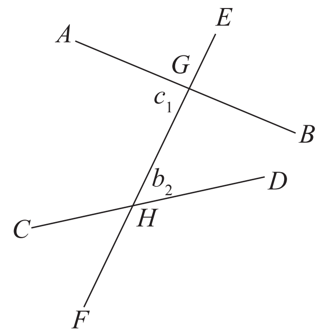
(i) $E\hat{G}B$ உம் $G\hat{H}D$ உம் (ii) $A\hat{G}E$ உம் $C\hat{H}G$ உம்

(iii) $A\hat{G}H$ உம் $C\hat{H}F$ உம் (iv) $B\hat{G}H$ உம் $D\hat{H}F$ உம்

ஒத்த கோணச் சோடிகள் ஆகும்.

ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்





பின்வரும் இரண்டு கோணச் சோடிகளையும் கருதுக.

(i) a_2 உம் d_1 உம்
(ii) c_1 உம் b_2 உம்

இக்கோணச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் எனப்படும்.

இக்கோணச் சோடியை இனங்காண்பதற்குள்ள பொது இயல்புகள் பின்வருவனவாகும்.

1. **இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் இரு பக்கங்களிலும் இருத்தல் வேண்டும்**

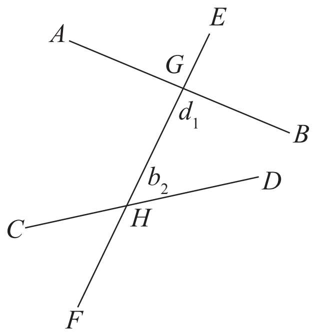
தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப a_2, d_1 ஆகிய இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ளன. அவ்வாறே c_1, b_2 ஆகிய இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ளன.

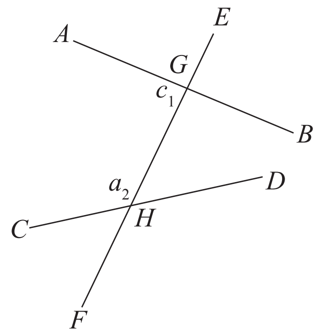
2. **இரு கோணங்களுக்குமிடையே உள்ள குறுக்கோடித் துண்டம் இரு கோணங் களுக்கும் பொதுப் புயமாக இருத்தல் வேண்டும்.**

தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்பக் கோட்டுத் துண்டம் GH ஆனது a_2, d_1 ஆகிய இரு கோணங்களுக்கும் பொதுப் புயமாகும். அவ்வாறே c_1, b_2 ஆகிய இரு கோணங்களுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் GH ஆனது ஒரு பொதுப் புயமாகும்.

ஆகவே இங்கே உருவில் காணப்படும்
(i) $A\hat{G}H$, $G\hat{H}D$ (ii) $B\hat{G}H$, $G\hat{H}C$
ஆகிய கோணச் சோடிகள் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகளாகும்.

நேயக் கோணங்கள்





பின்வரும் இரண்டு கோணச் சோடிகளையும் கருதுக.

(i) c_1 உம் a_2 உம்

(ii) d_1 உம் b_2 உம்

இக்கோணச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றும் நேயக் கோணச் சோடியாகும்.

இக்கோணச் சோடியை இனங்காண்பதற்குள்ள பொது இயல்புகள் பின்வருவனவாகும்.

1. **இரு கோணங்களும் குறுக்கோடியின் ஒரே பக்கத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.** தரப்பட்டுள்ள உருவிற்கேற்ப d_1, b_2 ஆகிய கோணங்கள் GH இன் வலது பக்கத்தில் அமைந்துள்ளன. c_1, a_2 ஆகிய கோணங்கள் GH இன் இடது பக்கத்தில் அமைந்துள்ளன.

2. **இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது.**

AB, CD ஆகிய நேர்கோடுகளுக்குமிடையே பொதுப் புயம் GH இன் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கும் கோணச் சோடிகள் நேயக் கோணச் சோடிகள் எனப்படும்.

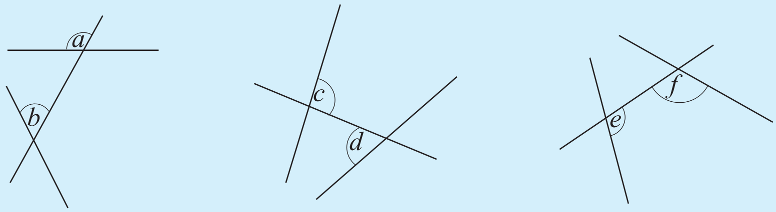
ஆகவே இங்கே உருவில் காணப்படும்

(i) $A\hat{G}H$, $C\hat{H}G$ (ii) $B\hat{G}H$, $D\hat{H}G$

ஆகிய கோணச் சோடிகள் நேயக் கோணச் சோடிகளாகும்.

பயிற்சி 8.3

1. பின்வரும் உருக்களைக் கருதுக.



உரு 1 உரு 2 உரு 3

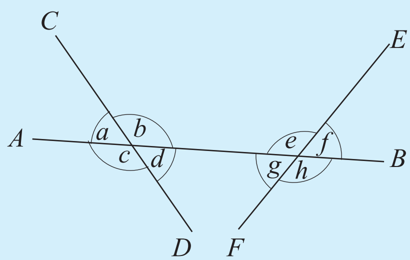
ஒவ்வோர் உருவிலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களைக் கருதிப் பின்வரும் வாக்கியங்களில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) உரு 1 இல் a, b ஆகியவற்றினால் .... கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது.

(ii) உரு 2 இல் c, d ஆகியவற்றினால் .... கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது.

(iii) உரு 3 இல் e, f ஆகியவற்றினால் .... கோணச் சோடி காட்டப்பட்டுள்ளது.

2. பின்வரும் உருவைக் கருதுக. ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் அவற்றின் கோணங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.



(i) உருவில் குறுக்கோடியாக எடுக்கத்தக்க கோட்டினைப் பெயரிடுக.

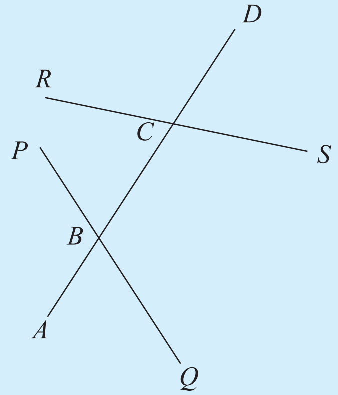
(ii) குறுக்கோடியினால் இடைவெட்டப்படும் இரு நேர்கோடுகளைப் பெயரிடுக.

(iii) ஓர் ஒத்த கோணச் சோடி a, e ஆகும். அவ்வாறே எஞ்சிய மூன்று ஒத்த கோணச் சோடிகளையும் பெயரிடுக.

(iv) இரு நேயக் கோணச் சோடிகளை ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளின் சார்பில் காட்டுக.

(v) இரு ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகளை ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளின் சார்பில் காட்டுக.

3. தரப்பட்டுள்ள உரு தொடர்பாகப் பின்வரும் பகுதிகளுக்கு விடை எழுதுக.



(i) $A\hat{B}P$ இற்கு ஒத்த கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(ii) $B\hat{C}S$ இற்கு

(a) நேயக் கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(b) ஒன்றுவிட்ட கோணத்தைப் பெயரிடுக.

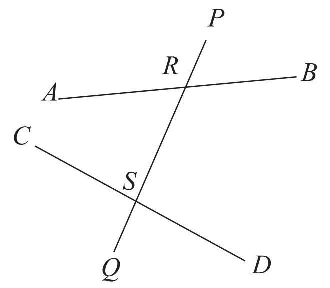
(c) ஒத்த கோணத்தைப் பெயரிடுக.

(iii) $R\hat{C}D$, $P\hat{B}C$ ஆகியன எவ்வகைக் கோணச் சோடியாகும்.

(iv) $P\hat{B}C$, $B\hat{C}R$ ஆகியன எவ்வகைக் கோணச் சோடியாகும்.

8.4 சமாந்தரக் கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட கோணங்கள்

உருவில் உள்ளவாறு குறுக்கோடி PQ இனால் AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் முறையே R, S ஆகியவற்றில் இடைவெட்டப்படுகின்றன. அப்போது AB, CD ஆகிய இரு கோடுகளினதும் அமைவைப் பரீட்சிப்போம்.



அதற்காக நாம் பின்வரும் மூன்று சந்தர்ப்பங்களையும் கருதுவோம்.

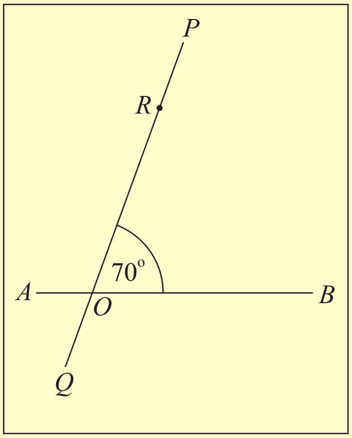
- ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது
- ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது
- நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை $180°$ ஆக இருக்கும்போது

இதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

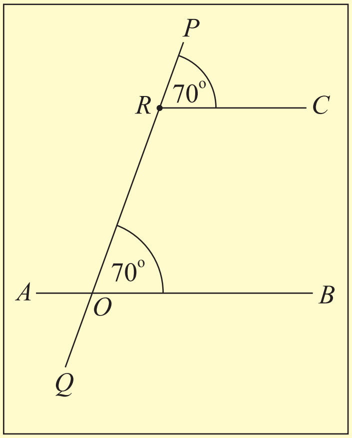
செயற்பாடு 1

வகை I ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமாக இருக்கும்போது

படி : ஒரு A_4 தாள் மீது உருவில் உள்ளவாறு AB, PQ என்னும் இரு கோடுகளை O இல் இடைவெட்டுமாறும் $P\hat{O}B = 70^{\circ}$ ஆக இருக்குமாறும் வரைக. OP மீது புள்ளி R ஐக் குறிக்க.



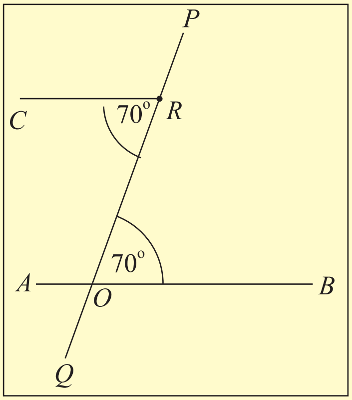
படி 2: பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி உருவில் காணப்படுகின்றவாறு புள்ளி R இல் பருமன் 70° ஐ உடைய $P\hat{R}C$ ஐ வரைக. இங்கு $P\hat{O}B$, $P\hat{R}C$ ஆகியன ஓர் ஒத்த கோணச் சோடி என்பதை (RC, AB ஆகிய கோடுகளை இடைவெட்டும் குறுக்கோடியாகக் கோடு PQ ஐக் கருதும்போது) அவதானிக்க.



படி 3: ஒரு மூலைமட்டத்தையும் ஒரு நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்தி AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

படி 4 : $P\hat{O}B$ இன் பெறுமானத்தை மாற்றி மேற்குறித்த மூன்று படிமுறைகளையும் பல தடவைகள் செய்து மீண்டும் மீண்டும் பார்ப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

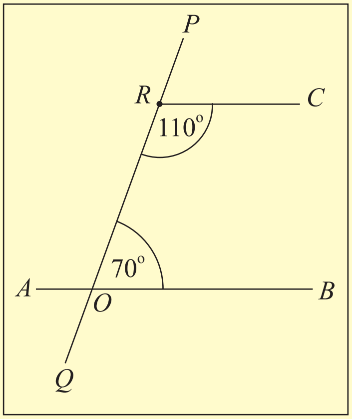
வகை II ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாக இருக்கும்போது



படி 1: மேலே ஒத்த கோணங்களுக்குச் செய்த படிமுறைகளைப் போல ஒன்றுவிட்ட கோணங்களுக்கும் செய்க. அப்படிமுறைகளை நிறைவேற்றும்போது இங்கு காணப் படுகின்றவாறான ஓர் உரு உங்களுக்குக் கிடைக்கும்.

படி 2: ஒரு மூலை மட்டத்தையும் ஒரு நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

வகை III நேயக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்போது



படி 1 : மேற்குறித்த படிமுறைகளில் ஒத்த கோணங்களுக்குச் செய்த படிமுறைகளை நேயக் கோணங்களுக்கும் செய்க. மேலே படிமுறை 2 இல் வரைந்த கோடு RC ஐ, இங்கு உள்ள உருவில் இருக்கின்றவாறு $C\hat{R}O = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, வரைதல் வேண்டும்.

படி 2: ஒரு மூலைமட்டத்தையும் ஒரு நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்தி AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமா எனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் நீங்கள்

(i) ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமாக இருக்கும்போது **அல்லது**
(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் சமமாக இருக்கும்போது **அல்லது**
(iii) நேயக் கோணச் சோடிகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆக இருக்கும்போது

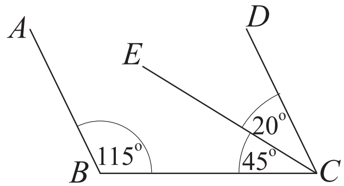
AB, RC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமென நீங்கள் அவதானிப்பீர்கள். இப்பேறு பொதுவாக உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

தேற்றம்: இரு நேர்கோடுகள் ஒரு குறுக்கோடியினால் இடைவெட்டப்படும்போது உண்டாகும்

- ஒத்த கோணங்கள் சமனாகும்போது அல்லது
- ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமனாகும்போது அல்லது
- நேயக் கோண்ங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்போது

அவ்விரு கோடுகளும் சமாந்தரமாகும்.

உதாரணம் 1



உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப AB உம் CD உம் சமாந்தரமெனக் காட்டுக. AB, CD ஆகிய இரு நேர்கோடுகளும் குறுக்கோடி BC இனால் வெட்டப்படும்போது உண்டாகும் $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ ஆகியன ஒரு நேயக் கோணச் சோடியாகும்.

$$A\hat{B}C = 115^{\circ}$$

$$B\hat{C}D = B\hat{C}E + E\hat{C}D = 45^{\circ} + 20 = 65^{\circ}$$

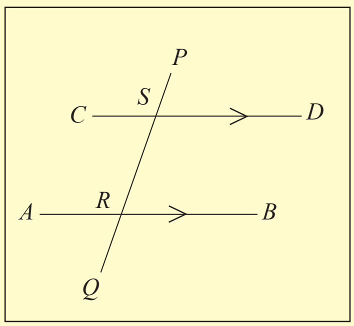
$$\therefore \quad A\hat{B}C + B\hat{C}D = 115^{\circ} + 65^{\circ} = 180^{\circ}$$

ABC, BCD ஆகிய நேயக் கோணச் சோடியின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகையால், AB உம் CD உம் சமாந்தரமாகும்.

சமாந்தரக் கோடுகளுடன் தொடர்புபட்ட வேறொரு தேற்றத்தில் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

செயற்பாடு 2

படி 1 : ஓர் A_4 தாள் மீது உருவில் உள்ளவாறு AB, CD என்னும் இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளையும் (ஒரு மூலை மட்டத்தையும் ஒரு நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்திச் சமாந்தரக் கோடுகளை வரையலாம்) அவற்றை முறையே R, S ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுமாறு ஒரு குறுக்கோடி PQ ஐயும் வரைக.



படி 2 : ஒரு பாகைமானியைக் கொண்டு

(i) $S\hat{R}B$, $P\hat{S}D$ ஆகிய ஒத்த கோணச் சோடியை அளந்து பெறுமானங்களைக் குறித்துக் கொண்டு அவை சமமாவெனப் பார்க்க. ஏனைய ஒத்த கோணச் சோடிகளையும் அவ்வாறே அளந்து அவையும் சமமாவெனப் பார்க்க.

(ii) $C\hat{S}R$, $S\hat{R}B$ ஆகிய ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியை அளந்து பெறுமானங்களைக் குறித்துக் கொண்டு அவை சமமாவெனப் பார்க்க. மற்றைய ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியையும் அவ்வாறே அளந்து அவையும் சமமாவெனப் பார்க்க.

(iii) $D\hat{S}R$, $S\hat{R}B$ ஆகிய நேயக் கோணச் சோடியை அளந்து பெறுமானங்களைக் குறித்துக்கொண்டு அவை மிகை நிரப்புகின்றனவாவெனப் பார்க்க. ஏனைய நேயக் கோணச் சோடியையும் அவ்வாறே அளந்து அவையும் மிகைநிரப்பு கின்றனவாவெனப் பார்க்க.

படி 3 : குறுக்கோடி PQ இன் சாய்வை மாற்றிக்கொண்டு மேற்குறித்த இரு படிமுறைகளையும் மறுபடியும் பல தடவைகள் செய்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிலிருந்து இரண்டு சமாந்தரக் கோடுகள் ஒரு குறுக்கோடியினால் இடைவெட்டப்படும்போது நீங்கள் அளந்த

(i) ஒவ்வொரு ஒத்த கோணச் சோடியும் சமம் எனவும்

(ii) ஒவ்வொரு ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியும் சமம் எனவும்

(iii) ஒவ்வொரு நேயக் கோணச் சோடியும் மிகைநிரப்புகின்றது எனவும்

அவதானிப்பீர்கள். இப்பேறு பொதுவாக உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

தேற்றம்: இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி இடைவெட்டும்போது உருவாகும்

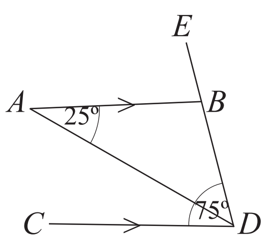
(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

(ii) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

(iii) நேயக் கோணங்கள் மிகைநிரப்புகின்றன.

இத்தேற்றம் மேற்குறித்த தேற்றத்தின் மறுதலையாவென அவதானிக்க.

உதாரணம் 2



மேலே உள்ள உருவில் நேர்கோடுகள் AB, CD என்பன சமாந்தரமாகும். $B\hat{D}C = 75^{\circ}$ உம் $B\hat{A}D = 25^{\circ}$ உம் ஆகும்.

(i) $A\hat{B}E$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. விடைக்குக் காரணத்தைக் காட்டுக.

(ii) $A\hat{D}B$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. விடைக்குக் காரணத்தைக் காட்டுக.

(i) $B\hat{D}C = 75^{\circ}$ (தரவு)

$B\hat{D}C = A\hat{B}E$ (ஒத்த கோணங்கள், $AB//CD$)

$\therefore A\hat{B}E = 75^{\circ}$

(ii) $B\hat{A}D = 25^{\circ}$ (தரவு)

$B\hat{A}D = A\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், $AB//CD$)

$\therefore A\hat{D}C = 25^{\circ}$

ஆனால் $A\hat{D}B = B\hat{D}C - A\hat{D}C$

$= 75^{\circ} - 25^{\circ}$

$= 50^{\circ}$

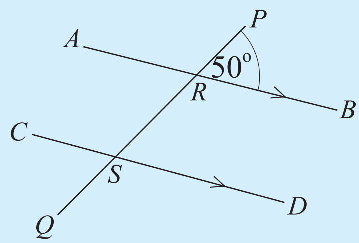
$\therefore A\hat{D}B = 50^{\circ}$

பயிற்சி 8.4

1. உருவில் $AB//CD$ ஆகும். $P\hat{R}B = 50^{\circ}$ எனின்,

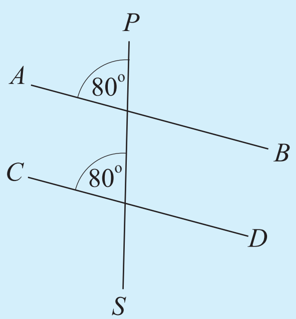
(i) $R\hat{S}D$ (ii) $A\hat{R}S$ (iii) $C\hat{S}Q$ (iv) $Q\hat{S}D$

ஆகியவற்றின் பருமனைக் காண்க.

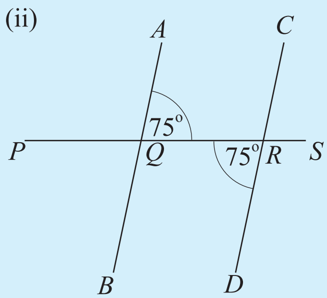


2. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப AB, CD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாவெனக் காரணத்துடன் தருக.

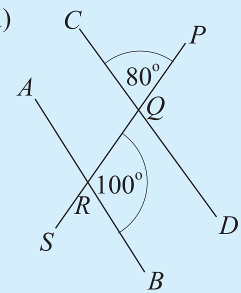
(i)



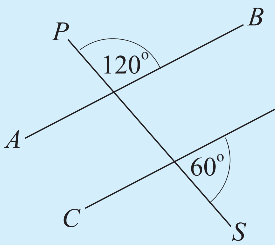
(ii)



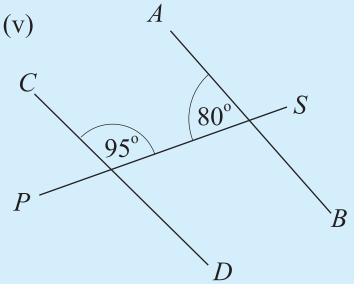
(iii)



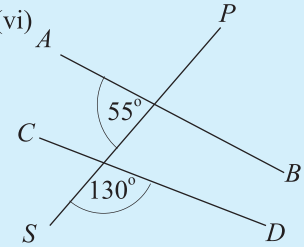
(iv)



(v)

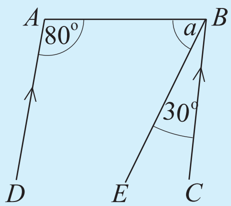


(vi)

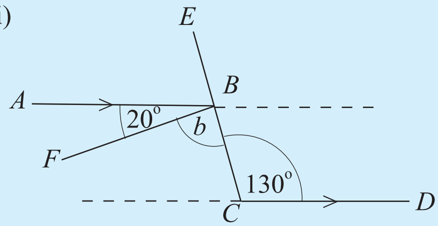


3. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

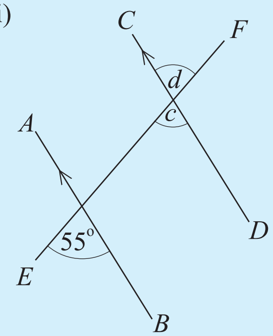
(i)



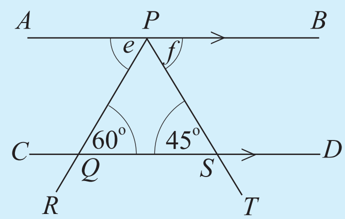
(ii)



(iii)

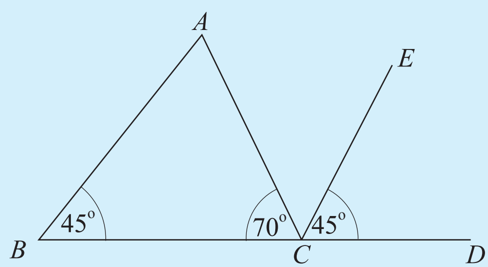


(iv)



4. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

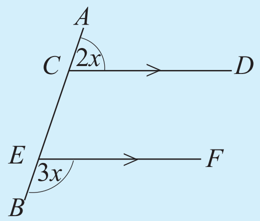
AB//*EC* எனக் காட்டுக.



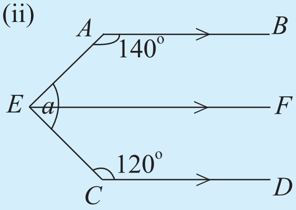
பலவினப் பயிற்சி

1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்துகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

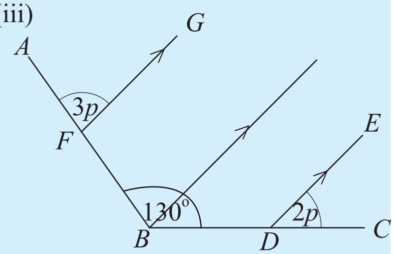
(i)



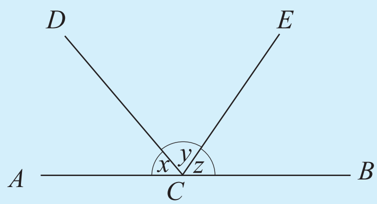
(ii)



(iii)



2. உருவில் x, y, z ஆகியவற்றினால் கோணங்களின் பருமன்கள் காட்டப்படுகின்றன. $x + z = y$ எனின், y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

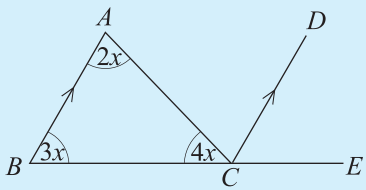


3. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

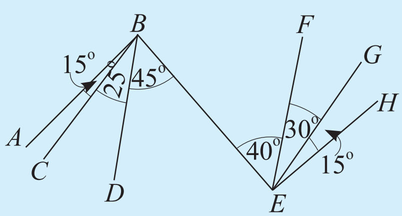
(i) $D\hat{C}E$, $A\hat{C}D$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை x இன் சார்பில் காண்க.

(ii) x இன் மூலம் காட்டப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

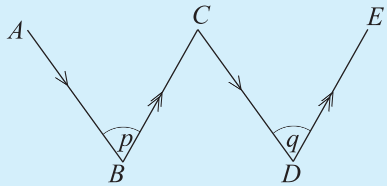
(iii) முக்கோணியின் ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.



4. பின்வரும் உருவில் உள்ள எல்லாச் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகளையும் எழுதுக. உங்கள் தெரிவுக்குரிய காரணத்தையும் காட்டுக.



5. உருவில் $A\hat{B}C = p$, $C\hat{D}E = q$ எனக்காட்டப்பட்டிருக்கும்போது $p = q$ எனக் காட்டுக.



பொழிப்பு

- இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதனால் உருவாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமமாகும்.
- ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரண்டு செங்கோணங்கள் ஆகும்.
- இரண்டு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்கோடி வெட்டும்போது உண்டாகும்
  - ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமம் எனின் அல்லது
  - ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் சமம் எனின் அல்லது
  - நேயக் கோணச் சோடிகளின் கூட்டுத்தொகை 180° எனின்

  அவ்விரு நேர்கோடுகளும் சமாந்தரமாகும்.
- இதன் மறுதலை இரண்டு சமாந்தர நேர்கோடுகளைக் குறுக்கோடி ஒன்று வெட்டும்போது உண்டாகும்
  - ஒத்த கோணச் சோடிகள் சமமாகும்.
  - ஒன்றுவிட்ட சோடிகள் சமமாகும்.
  - நேயக் கோணச் சோடிகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

9

திரவ அளவீடுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- திரவக் கனவளவுகள் அளக்கப்படும் அலகுகளாகிய
  ml இற்கும் cm^3 இற்குமிடையே
  l இற்கும் cm^3 இற்குமிடையே
  l இற்கும் m^3 இற்குமிடையே
  உள்ள தொடர்புடைமைகளைக் காண்பதற்கும்
- திரவக் கனவளவுகள் அளக்கப்படும் அலகுகள் இடம்பெறும் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

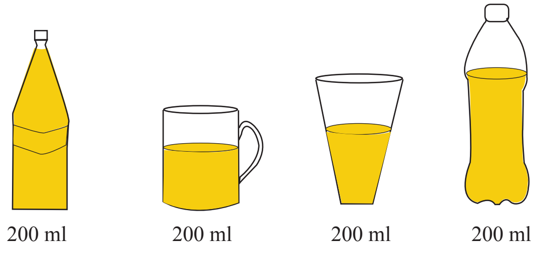
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

9.1 கனவளவும் கொள்ளளவும்

ஒரு குறித்த திண்மம் அல்லது திரவம் வெளியில் எடுக்கும் இடத்தின் அளவானது அத்திண்மத்தின் அல்லது திரவத்தின் கனவளவு எனப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

ஒரு திண்மத்துக்கு நிலையான வடிவமும் நிலையான கனவளவும் உண்டு. எனினும் ஒரு திரவத்திற்கு நிலையான கனவளவு இருப்பினும் நிலையான வடிவம் இல்லை. திரவம் எப்போதும் தான் கொள்ளப்பட்டிருக்கும் பாத்திரத்தின் வடிவத்தை எடுக்கும் எனக் கற்றுள்ளோம்.

200 மில்லிலீற்றர் அளவுள்ள பானம் வெவ்வேறு வடிவமுள்ள பாத்திரங்களில் இடப்பட்டிருக்கும் விதம் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றது.



அப்பானத்தின் அளவுகள் பல்வேறு வடிவமுள்ள பாத்திரங்களில் இடப்படும்போது அத்திரவத்தின் வடிவம் பாத்திரங்களின் வடிவத்தை எடுக்கின்றபோதிலும் 200 ml என்னும் பானக் கனவளவு மாறுவதில்லை. உருவில் முதலாவது பாத்திரத்தில் உள்ள 200 மில்லிலீற்றர் பானத்தினால் முழுப் பாத்திரமும் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இங்கு அப்பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு 200 மில்லிலீற்றர் எனவும் காட்டலாம். அதாவது ஒரு பாத்திரத்தின் **கொள்ளளவு** என்பது அப்பாத்திரம் கொள்ளக்கூடிய உயர்ந்தபட்சக் கனவளவாகும்.

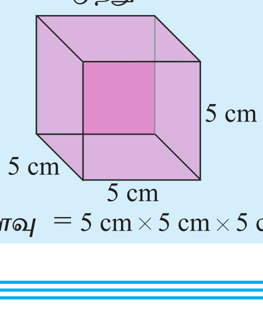
கனவளவையும் கொள்ளளவையும் பற்றி முன்னர் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

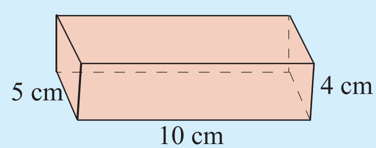
1. 1 l =1000 ml ஆகும். இதனைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

ml	l உம் ml உம்		l இல்
	l	ml	
2500	2	500	2.5
....	3	000	
3500			
....			1.755
....	0	500	
200			
50			
....			3.25
....	0	25	
....			0.005

2. பின்வரும் உருக்களில் உள்ள சதுரமுகியினதும் கனவுருவினதும் கனவளவு கணிக்கப்பட்டுள்ள விதத்திற்கேற்பக் கீழே உள்ள இரு அட்டவணைகளையும் பூரணப்படுத்துக.



கனவளவு $= 5\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 125\text{ cm}^3$



கனவளவு $= 10\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 200\text{ cm}^3$

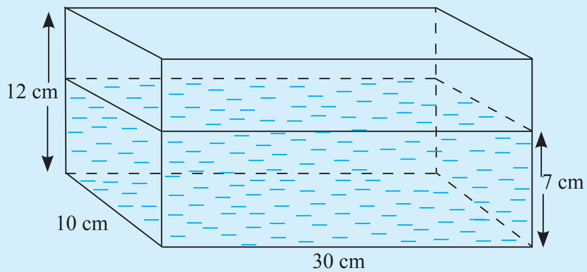
(i) சதுரமுகி

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் (cm)	கனவளவு (cm^3)
2	.... × .... × .... = ...
4	
6	
7	
8	
10	
12	

(ii) கனவுரு

நீளம் (cm)	அகலம் (cm)	உயரம் (cm)	கனவளவு (cm^3)
3	2	2	... × ... × ... = ...
5	3	4	
8	6	5	
10	5	10	
10	5	6	
12	10	8	
12	6	5	
15	8	10	
20	7	8	

3. உருவில் உள்ள பாத்திரத்தின் உள் நீளம் 30 cm, அகலம் 10 cm, உயரம் 12 cm ஆகும். அதில் 7 cm உயரத்துக்கு நீர் இடப்பட்டுள்ளது.



பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு

(ii) பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்பத் தேவையான நீரின் கனவளவு

(iii) பாத்திரத்தில் 7 cm உயரத்திற்கு மாத்திரம் நீர் இடப்பட்டிருப்பின், அந்நீரின் கனவளவு

(iv) பாத்திரத்தில் 7 cm உயரத்திற்கு நீர் இருக்கும்போது கசிவு காரணமாக ஒரு மணித்தியாலத்தில் நீர் மட்டத்தின் உயரம் 5 cm இற்கு இறங்கினால் அம்மணித்தியாலத்தில் கசிந்த நீரின் கனவளவு.

9.2 கன சென்ரிமீற்றருக்கும் மில்லிலீற்றருக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை

மருத்துவர்கள் பயன்படுத்தும் சிவிறி (Syringe) மேலேயுள்ள உருவில் காணப்படுகின்றது. ஒரு நோயாளிக்கு ஏற்றப்படும் திரவ மருந்தின் அளவை அதில் உள்ள அளவிடையைப் பயன்படுத்தி இனங்காணலாம்.

அதில் cc/ ml என அளவீட்டு அலகுகள் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கும்.

cc என்பது கன சென்ரிமீற்றர் ஆகும். அது ஆங்கிலத்தில் cubic centimetre எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றமையால் அவ்விரு பதங்களினதும் முதலெழுத்துகளைக் கொண்டு cc பெறப்பட்டுள்ளது. ஒரு கன சென்ரிமீற்றர் என்பது நீளம் 1 சென்ரிமீற்றராக உள்ள ஒரு சதுரமுகிப் பாத்திரத்தின் கனவளவவாகும்.

இங்கு சாய்ந்த கோடு / ஆனது ''அல்லது'' என்பதைக் கருதுகின்றது. அதாவது மருந்தின் அளவை cc அல்லது ml எனக் காட்டலாம் என்பதாகும். அப்போது ஒரு கன சென்ரிமீற்றர் என்பது ஒரு மில்லிலீற்றருக்குச் சமமா என்னும் வினா எம்மிடம் எழுகின்றது. உண்மையில் மெட்ரிக் அலகு முறையில் ஒரு மில்லிலீற்றரின் அளவானது ஒரு கன சென்ரிமீற்றரின் அளவுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கேற்ப

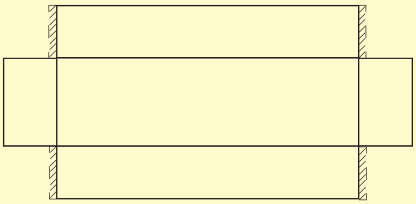
1 கன சென்ரிமீற்றர் = 1 மில்லிலீற்றர்.

$$1\ cm^3 = 1\ ml$$

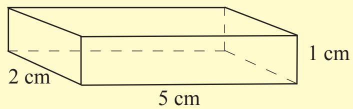
இவ்விடயங்கள் பற்றி மேலும் அறிவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1

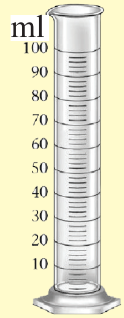
படி 1 - மெல்லிய பிளாத்திக்கு தாள் (file cover), வரைகோல், அளவுச் சாடி, செலோரேப் என்பவற்றைப் பெற்றுக் கொள்க.



கனவுரு ஒன்றின் வலை



$10\ cm^3$ கனவளவுள்ள கனவுரு



அளவுச் சாடி

படி 2 - உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள அளவுகளை உடைய கனவுரு ஒன்றைச் செய்வதற்கான மாதிரியை வரைந்து வெட்டிக் கொள்க.

படி 3 - வெட்டியெடுத்த மாதிரியைக் கொண்டு $5\ cm \times 2\ cm \times 1\ cm$ அளவுள்ள கனவுரு வடிவப் பாத்திரத்தைத் தயார் செய்க. (நீர் கசியாதவாறு விளிம்புகளை உகந்தவாறு செலோரேப்பினால் அல்லது பிசினால் நன்றாக ஒட்டுக.)

படி 4 - ஆய்கூடத்திலிருந்து 100 ml அளவுள்ள ஓர் அளக்கும் சாடியைப் பெற்றுக் கொள்க.

படி 5 - பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

கனவுரு வடிவமுள்ள பாத்திரத்தினால் அளக்கும் சாடிக்குள்ளே நீர் இடப்படும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை	அளக்கும் சாடியில் இடப்படும் நீரின் கனவளவு	
	கனவுரு வடிவப் பாத்திரத்திற்கேற்ப cm^3 இல்	அளக்கும் சாடிக்கேற்ப ml இல்
	10 20 30 40 50	

படி 6 - கனவுரு வடிவப் பாத்திரத்தை நீரால் நிரப்பி அதனை அளவு சாடியினுள் இடுவதன் மூலம் அதன் வாசிப்பைப் பெறுக.

படி 7 - இதனைப் பல தடவைகள் செய்வதன் மூலம் வாசிப்புகளைக் குறித்துக் கொள்க.

இதிலிருந்து பாத்திரத்தின் கனவளவையும் சாடியில் உள்ள நீரின் கனவளவையும் கொண்டு cm இற்கும் ml இற்கும் இடையே ஒரு தொடர்பைப் பெறுக.

செயற்பாட்டிற்கேற்ப,

$10\ cm^3 =$ அளக்கும் சாடியின் 10 ml
$20\ cm^3 =$ அளக்கும் சாடியின் 20 ml

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore 1\ cm^3 = 1\ ml$$

பாத்திரங்களில் அடங்கும் திரவக் கனவளவுகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

உள் நீளம் 20 cm, அகலம் 15 cm, உயரம் 10 cm ஆகவுள்ள கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு கண்ணாடிப் பாத்திரத்தில் ஒரு வகை மருந்துத் திரவம் உள்ளது.

(i) பாத்திரத்தின் கனவளவைக் கன சென்ரிமீற்றரில் காண்க.
(ii) பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு லீற்றரில் யாது?
(iii) பாத்திரத்தில் அடங்கும் மருந்துத் திரவம் 50 ml வீதம் சிறிய போத்தல்களில் இடப்படுமெனின், முழு மருந்துத் திரவத்தையும் அவ்வாறு இடுவதற்குத் தேவையான சிறிய போத்தல்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) பாத்திரத்தின் கனவளவு $= 20\ cm \times 15\ cm \times 10\ cm$
$= 3000\ cm^3$

(ii) பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு $= 3000$ ml
$= 3$ l

(iii) முழு மருந்துத் திரவத்தினதும் அளவு $= 3000$ ml
50 ml வீதம் இடப்படத்தக்க சிறிய
போத்தல்களின் எண்ணிக்கை $= 3000 \div 50$
$= 60$

உதாரணம் 2

அடியின் நீளம் 2 m ஆகவும் அகலம் 1 m ஆகவும் இருக்கும் ஒரு கனவுரு வடிவமுள்ள கொங்கிறீற்றுத் தொட்டியில் 800 l நீர் இடப்பட்டுள்ளது. தொட்டியில் எவ்வளவு உயரத்துக்கு நீர் உள்ளதெனக் காண்க.

தொட்டியில் x சென்ரிமீற்றர் உயரத்திற்கு நீர் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு ஒரு சமன்பாட்டை உருவாக்கி அதனைத் தீர்ப்பதன் மூலம் நீர் இருக்கும் உயரத்தைக் காண்போம்.

அதற்காக எல்லா அளவீடுகளையும் சென்ரிமீற்றருக்கு மாற்றுவோம்.

தொட்டியின் நீளம் = 2 m = 200 cm
தொட்டியின் அகலம் = 1 m = 100 cm

தொட்டியில் உள்ள நீரின் கனவளவு = 800 l
= 800 000 ml
= 800 000 cm^3

தொட்டியில் உள்ள நீரின் கனவளவு = 200 cm × 100 cm × x cm

$$20\,000 \times x = 800\,000$$

$$x = \frac{800\,000}{20\,000}$$

$$= 40 \text{ cm}$$

$\therefore$ தொட்டியில் 40 cm உயரத்திற்கு நீர் உள்ளது.

பயிற்சி 9.1

1. அடைப்பு A இல் உள்ள கனவளவுக்குச் சமமான கனவளவை அடைப்பு B இலிருந்து தெரிந்தெடுத்து இணைக்க.

A	B
1000 cm^3	25 ml
10 cm^3	25 l
3000 cm^3	1 l
1500 cm^3	10 ml
25000 cm^3	1.5 l
25 cm^3	3 l

2. கனவுரு வடிவமுள்ள சில பாத்திரங்களின் அளவுகள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. அவ்வட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

நீளம் (cm)	அகலம் (cm)	உயரம் (cm)	கொள்ளளவு		
			cm^3	ml	l
20	10	5			
40	20	10			
35	12	10			
50	35	12			
40	35	25			
25	20	18			

3. அடியின் பரப்பளவு 240 cm^2 ஆன கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் 12 cm உயரத்துக்கு நீர் உள்ளது. நீரின் கனவளவை
(i) கன சென்ரிமீற்றர் (ii) மில்லிலீற்றர் (iii) லீற்றர்
ஆகியவற்றில் காண்க.

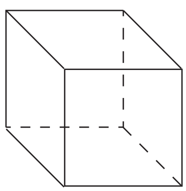
4. சதுர வடிவமுள்ள அடியைக் கொண்ட ஒரு பாத்திரத்தின் அடியின் பரப்பளவு 225 cm^2 ஆகும். அதில் 3.6 l நீர் இடப்பட்டுள்ளது.
   (i) நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.
   (ii) பாத்திரத்தின் உயரம் 24 cm எனின், அதன் கொள்ளளவின் $\frac{2}{3}$ இல் நீர் இருக்குமெனக் காட்டுக.

5. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகி வடிவப் பாத்திரம் திரவத்தினால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. அப்பாத்திரத்தினால் 15 தடவைகள் அத்திரவத்தை இடுவதன் மூலம் 15 l கொள்ளளவுள்ள ஒரு பீப்பாவை நிரப்பலாமெனக் காட்டுக.

9.3 லீற்றரும் கன மீற்றரும்

எண்ணெய் சேமித்து வைக்கப்படும் பெரிய தாங்கிகள், நீச்சல் தடாகங்கள் போன்றவற்றில் பெரிய திரவக் கனவளவைச் சேகரிக்கும்போது அந்த அளவைக் குறிப்பிடுவதற்கு ml, l போன்ற அலகுகள் போதியனவல்ல. அதற்குக் கன மீற்றர் என்னும் பெரிய அலகு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

கன மீற்றரை இனங்காண்பதற்கு ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 1 m ஆகவுள்ள சதுரமுகி வடிவமுள்ள ஒரு தாங்கியின் கொள்ளளவைக் கணிப்போம்.



உருவில் உள்ள பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு $= 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$

$1\text{ m} = 100\text{ cm}$ ஆகையால்

பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு $= 100\text{ cm} \times 100\text{ cm} \times 100\text{ cm}$

$= 1\,000\,000\text{ cm}^3$

$1\,000\,000\text{ cm}^3 = 1\,000\,000\text{ ml}$ ($1\text{ cm}^3 = 1\text{ ml}$ ஆகையால்)

$100\,000\text{ ml} = \frac{1000\,000}{1000}\text{ l}$ ($1000\text{ ml} = 1\text{ l}$ ஆகையால்)

$= 1\,000\text{ l}$

$1\text{ m}^3 = 1000\text{ l}$

இதற்கேற்ப

ஒரு கன மீற்றர் என்பது 1 000 l கனவளவாகும்.

உதாரணம் 1

ஒரு வீட்டில் தினமும் பயன்படுத்தத் தேவையான நீர் சேகரிப்படும் கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு தொட்டியின் உள் நீளம் 1.5 m, அகலம் 1 m, உயரம் 1 m ஆகும்.

(i) தொட்டியின் கொள்ளளவு எத்தனை லீற்றர்?

(ii) வீட்டில் வசிப்பவர்கள் தினமும் 300 லீற்றர் நீரை நுகர்வார்களெனின், முற்றாக நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ள தொட்டியில் உள்ள நீர் அவர்களுக்கு எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?

(i) தொட்டியின் கொள்ளளவு $= 1.5\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$

$= 1.5\text{ m}^3$

$= 1\,500\text{ l}$ ($1\text{ m}^3 = 1000\text{ l}$ என்பதால்)

(ii) ஒரு நாளுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் நீரின் கனவளவு $= 300\text{ l}$

தொட்டியில் உள்ள நீரின் கனவளவு $= 1\,500\text{ l}$

$\therefore$ போதுமான நாட்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{1\,500}{300}$

$= 5$ நாட்கள்

பயிற்சி 9.2

1. அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

கனவுரு வடிவமுள்ள தொட்டியின் உள் அளவுகள்			தொட்டியின் கொள்ளளவு	
நீளம் (m)	அகலம் (m)	உயரம் (m)	m^3	l
2	2	1	.....	.....
2	1.5	1	.....	.....
1	1	0.5	.....	.....
4	.....	.....	8	.....
.....	1.5	.....	.....	9000
.....	.....	1	1.5	.....

2. ஒரு நீச்சல் தடாகத்தின் நீளம் 50 m, அகலம் 25 m, ஆழம் 3 m ஆகும்.
   (i) நீச்சல் தடாகத்தின் கொள்ளளவைக் காண்க.
   (ii) தடாகத்தில் 1.2 m உயரத்திற்கு நீர் இருப்பின், அதில் உள்ள நீரின் கனவளவு எத்தனை லீற்றர்?
   (iii) நீச்சல் தடாகத்தில் முற்றாக நீர் நிரம்புவதற்கு மேலும் எவ்வளவு நீர் தேவை?

3. கொள்ளளவு 6.5 m^3 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஓர் எண்ணெய் பவுசரில் முற்றாக எண்ணெய் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இந்த பவுசர் 8 எண்ணெய் நிரப்பும் நிலையங்களுக்கு ஒன்றுக்கு 850 l வீதம் எண்ணெயை வழங்க வேண்டியுள்ளது. பவுசரில் தேக்கி வைக்கப்பட்டுள்ள எண்ணெயின் அளவு அந்த 8 நிலையங்களுக்கும் வழங்கப் போதுமானதா? உமது விடைக்குக் காரணங்களைத் தருக.

4. ஒரு நாளுக்கு ஒருவருக்குக் குறைந்தபட்சம் 150 l நீர் தேவை. உள் நீளம் $1\frac{1}{2}$ m, அகலம் 1 m, உயரம் 1 m அளவுள்ள கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு தொட்டியில் நீர் நிரம்பியிருப்பின், அந்நீர் எத்தனை பேருக்கு ஒரு நாளுக்குப் போதும்?

5. சதுரமுகி வடிவமுள்ள ஒரு தொட்டியின் உள் நீளம் 1 m ஆகும். இத் தொட்டியில் முற்றாக நீர் நிரம்பியுள்ளது. தொட்டியிலிருந்து நீரை வெளியேற்றும் திருகுபிடியைத் திறக்கும்போது அதிலிருந்து நீர் நிமிடத்துக்கு 50 l என்னும் சீரான வீதத்தில் வெளியேறுகின்றது. இச்சீரான கதியில் இத்திருகுபிடியைத் திறந்து எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பின்னர் தொட்டியில் உள்ள நீர் முற்றாக வெறிதாகுமெனக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஒரு பெரிய அளவுள்ள பழப் பானப் போத்தலின் கொள்ளளவு 1.5 l ஆகும். ஒரு விழாவில் இப்பானத்தை வழங்குவதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு சிறிய அளவிலான குவளையில் 150 ml பானத்தை இடுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விழாவிற்கு 225 பேர் அழைக்கப்பட்டிருப்பின், அவர்களை உபசரிக்கத் தேவையான பெரிய அளவிலான பானப் போத்தல்களின் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. வீடுகளில் நீரைத் தேக்கி வைக்கும் நீர்த் தாங்கிகள் 500 l, 1000 l, 2000l அளவுகளில் சந்தைகளில் விற்கப்படுகின்றன. ஐந்து பேரைக் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தின் தலைவர் ஒருவர் தனது வீட்டுக்குத் தேவையான நீரைச் சேகரித்து வைப்பதற்கு ஒரு நீர்த் தாங்கியைக் கொள்வனவு செய்வதற்கு உத்தேசித்துள்ளார். ஒரு நாளுக்கு ஒருவருக்கு உயர்ந்தபட்சம் 150 l நீர் தேவையாக இருக்கும் அதே வேளை வீட்டில் ஏனைய பணிகளுக்கு 200 l நீர் மேலதிகமாகத் தேவை எனத் தீர்மானிக்கும் தலைவர் ஒரு நாளுக்கு ஒரு தடவை மாத்திரம் தாங்கியில் நீரை நிரப்புவதற்கு உத்தேசித்துள்ளார். இத்தீர்மானங்களுக்கேற்ப இவ்வீட்டுக்கு எத்தாங்கி உகந்ததெனத் துணிக.

பொழிப்பு

- 1 cm^3 கனவளவு 1 ml திரவக் கனவளவுக்குச் சமம்
- 1 l ஆனது 1000 cm^3 ஆகும்.
- 1 கன மீற்றர் என்பது 1000 லீற்றர் ஆகும்.

மீட்டற் பயிற்சி I
பகுதி I

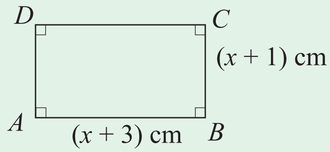
1. 5, 8, 11, 14, ... என்னும் எண் கோலத்தின் பொது உறுப்பைக் காண்க.

2. $10011_{\text{இரண்டு}} - \ldots\ldots_{\text{இரண்டு}} = 11_{\text{இரண்டு}}$ எனின், கீறிட்ட இடத்தை நிரப்புக.

3. குறித்த ஒரு தொகைப் பணத்தின் $\frac{1}{3}$ இன் பெறுமானம் ரூ. 800 ஆகும். அத்தொகையின் $\frac{3}{4}$ இன் பெறுமானம் எவ்வளவு?

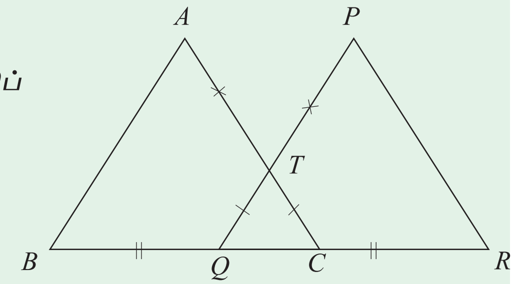
4. ஒரு பொருள் ரூ. 1 500 இற்கு விற்கப்படுவதால் ரூ. 300 இலாபமாகக் கிடைக்கின்றதெனின், இலாபச் சதவீதம் எவ்வளவு?

5. செவ்வகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவை x இன் சார்பில் காண்க.

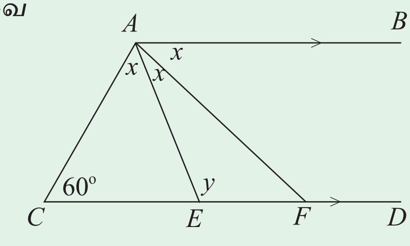


6. $x^2 - x - 6$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

7. தரப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்டு வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்தி
(i) $AC = PQ$ எனவும்
(ii) $BC = QR$ எனவும்
காட்டுக.

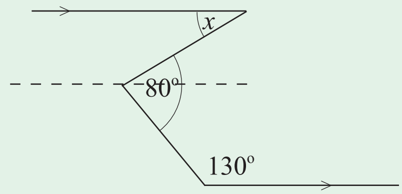


8. AB, CD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை எனின், y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

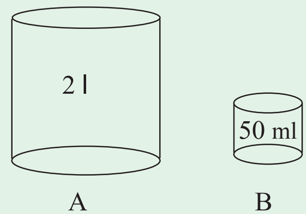


9. $(x + 4)(x - 3) = x^2 + bx + c$ எனின், b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

10. x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



11. 2 l கொள்ளளவுள்ள பாத்திரம் A இன் $\frac{3}{4}$ இல் நீரை இடுவதற்கு 50 ml கொள்ளளவுள்ள பாத்திரம் B இனால் எத்தனை தடவைகள் நீரை ஊற்ற வேண்டும்?



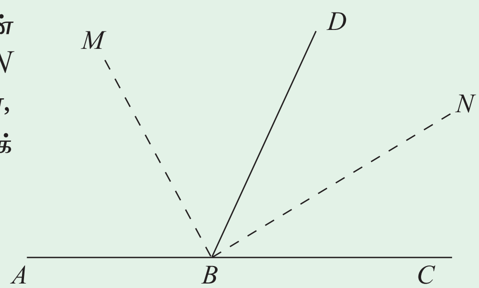
12. காணி ஒன்றை விற்கும்போது 3% தரகுப் பணம் அறவிடப்படுகின்றது. தரகுப் பணம் செலுத்தப்பட்டபின்னர் உரிமையாளருக்கு 4 850 000 ரூபாய் கிடைத்ததெனின், காணி என்ன விலைக்கு விற்கப்பட்டது?

13. $1\frac{3}{4}$ ஐ என்ன பின்னத்தினால் பெருக்கும்போது $3\frac{3}{4}$ கிடைக்கும்?

14. கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

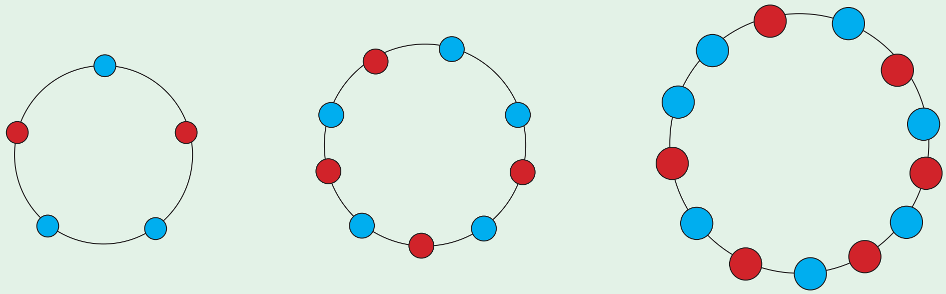
$$\begin{array}{r} 1101_{\text{இரண்டு}} \\ +\ 1111_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\ 101_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

15. $A\hat{B}D$, $D\hat{B}C$ ஆகிய கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் முறையே BM, BN ஆகும். ABC ஒரு நேர்கோடு எனின், $A\hat{B}M + C\hat{B}N$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



பகுதி II

1. நீல நிற மின் குமிழ்கள் 3, 5, 7 ஆகவும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்கள் 2, 4, 6 ஆகவும் இருக்கும் விதத்தில் மின் குமிழ்களைக் கொண்டு வளையங்களாக உருவாக்கப்பட்ட அலங்கார அமைப்பு ஒன்றின் முதல் மூன்று சந்தர்ப்பங்களும் இங்கு தரப்பட்டுள்ளன.



(i) நான்காம் ஐந்தாம் சந்தர்ப்பங்களில் பயன்படுத்தப்பட்டிருக்கும் நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையையும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக் கையையும் முறையே எழுதிக் காட்டுக.

(ii) இங்கே பயன்படுத்தியிருக்கும் நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையும் வெளிப்படுத்தும் கோலத்தை இனங்கண்டு n ஆம் சந்தர்ப்பத்துக்குத் தேவையான நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையையும் சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையையும் n மூலம் தனித்தனியே குறிக்க.

(iii) மேலே (ii) இல் பெற்ற எண் கோலத்தைக் கொண்டு 10 ஆம் சந்தர்ப்பத்தை உருவாக்கத் தேவையான நீல நிற, சிவப்பு நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கையைத் தனித்தனியே காண்க.

(iv) மின் குமிழ்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 61 ஆக இருப்பது எத்தனையாவது கோலத்தில் ஆகும்? அதில் காணப்படும் நீல நிற மின் குமிழ்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

2. (a) சுருக்குக.

(i) $\dfrac{2\frac{1}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{10}}$

(ii) $\left(1\frac{1}{3}\right.$ இன் $\left.1\frac{1}{8}\right) \div 2\frac{1}{2}$

(b) (i) காணி ஒன்றின் $\frac{1}{4}$ இல் மாமரங்கள் நடப்பட்டுள்ளனவெனின், எஞ்சிய காணியின் அளவு எவ்வளவு?

(ii) எஞ்சிய காணியின் $\frac{1}{3}$ இல் வாழை மரங்கள் நடப்பட்டிருப்பின் வாழை மரங்கள் நடப்பட்ட காணியின் அளவு முழுக்காணியின் என்ன பின்னமாகும்?

(iii) மா, வாழை ஆகியன நடப்பட்ட காணியின் அளவு முழுக் காணியின் என்ன பின்னம்?

(iv) மேலே குறிக்கப்பட்ட மரங்கள் நடப்படாத காணியின் அளவு 8 ஹெக்ரெயர் எனின், மொத்தக் காணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

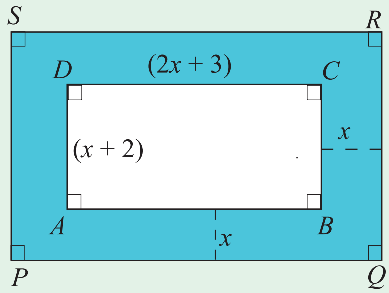
3. (a) ரூ. 8 000 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருள் ஒன்று 25% இலாபத்துடன் விலை குறிக்கப்படுகின்றது. அது உடன் பணத்துக்கு விற்கப்படும்போது 10 % கழிவு வழங்கப்படுகிறது எனின், வியாபாரி அடையும் இலாபச் சதவீதம் எவ்வளவு?

(b) நபர் ஒருவர் பொருள் ஒன்றை 15% இலாபத்துடன் விலை குறிக்கிறார். அதனை 20% இலாபத்துடன் விற்றாரெனின், மேலதிகமாக ரூ. 200 ஐப் பெற்றிருக்கலாம். அவ்வாறெனின், அப்பொருளின் கொள்விலையையும் விற்ற விலையையும் காண்க.

4. (a) $a = (-\frac{1}{2})$, $b = \frac{2}{3}$ ஆக இருக்கும்போது தரப்பட்ட கோவைகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $2a + 3b$ (ii) $b - 2a$ (iii) $\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$

(b) செவ்வகம் $ABCD$ யின் நீளம் $(2x + 3)$ cm உம் அகலம் $(x + 2)$ cm உம் ஆகும்.



(i) $ABCD$ யின் பரப்பளவுக்கான கோவையை x சார்பில் தருக.

(ii) $ABCD$ ஐச் சுற்றி x cm அகலமுள்ள ஒரு கீலம் ஒட்டப்பட்டுச் செவ்வகம் $PQRS$ உருவாக்கப்படுகின்றது. நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) $x = 3$ cm எனின், நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

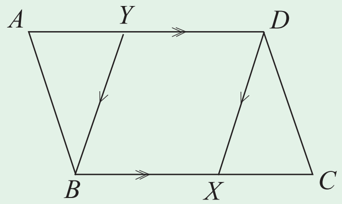
(c) காரணிகளைக் காண்க.

(i) $5x^2 + 12y - 4xy - 15xy^2$ (ii) $6(x - 1) + 3x - 3$

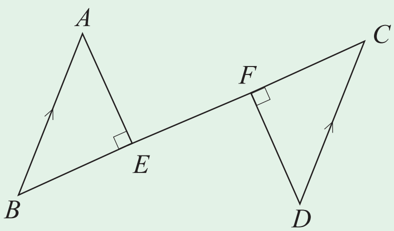
(iii) $t^2 - 8t + 15$ (iv) $3k^2 - 12k$

5. (a) வெளிப்படையுண்மைகளைக் கொண்டு பின்வரும் உருக்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கிணங்க வினவப்பட்டுள்ளவற்றைப் பெறுக.

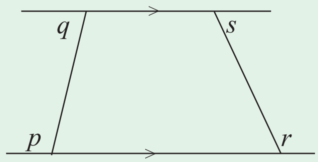
(i) $A\hat{Y}B = D\hat{X}C$ எனக் காட்டுக.



(ii) $B\hat{A}E = F\hat{D}C$ எனக் காட்டுக.

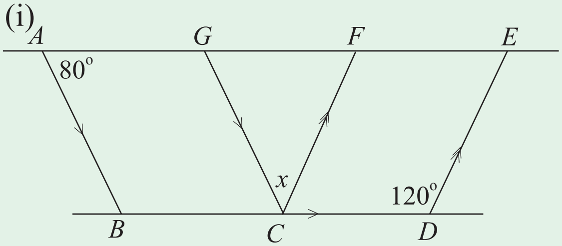


(iii) $\hat{p} - \hat{s} = \hat{r} - \hat{q}$ எனக் காட்டுக.

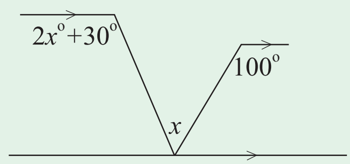


(b) தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i)



(ii)



(c) PQ, RS என்னும் சமாந்தரக் கோடுகள் MN, KL என்னும் குறுக்குக்கோடிகளால் இடைவெட்டப்படுகின்றன. தரப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்டு

(i) கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} ஆகும் எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களையும் எழுதிக் காட்டுக.

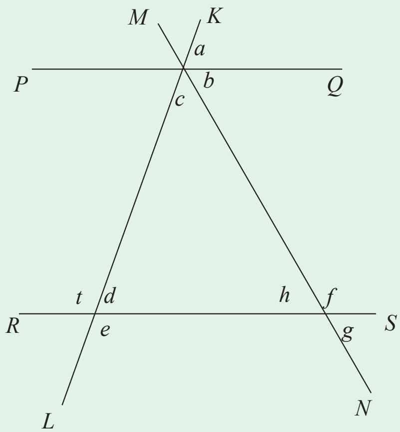
(ii) நேயக் கோணச் சோடிகளைத் தெரிந்து எழுதுக.

(iii) b, g ஆகியன எவ்வகைக் கோணச் சோடியாகும்?

(iv) $\hat{a} + \hat{e} = 180^{o}$ ஆகுமா? விளக்குக.

(v) வெளிப்படையுண்மைகளைக் கொண்டு $t - f = h - d$ எனக் காட்டுக.

(vi) $e = 140^{o}$, $f = 110^{o}$ எனின், ஆங்கில எழுத்துகள் குறிக்கும் பெறுமானங்களைத் தனித்தனியே காண்க.



6. ஒரு வீட்டின் நீர்த் தொட்டியின் நீளம், அகலம், உயரம் என்பன முறையே 2 m, 1.5 m, 1 m ஆகும்.

(i) இந்நீர்த் தொட்டியின் கொள்ளளவை லீற்றரில் தருக.

(ii) குறித்த நபர் ஒருவருக்கு நாள் ஒன்றிற்கு 150 l நீர் தேவைபடுகின்றதெனின், நால்வர் குடியிருக்கும் ஒரு வீட்டுக்கு நாள் ஒன்றுக்குத் தேவைப்படும் நீரின் அளவு எத்தனை லீற்றர்?

(iii) மேற்குறித்த நீர்த் தொட்டியில் உள்ள மொத்த நீரின் அளவு நால்வருக்கும் எத்தனை நாட்களுக்குப் போதுமானது?

(iv) வெற்றுத் தொட்டியை நிரப்புவதற்கு நிமிடத்துக்கு 100 l நீர் வழங்கும் குழாய் மூலம் தொட்டிக்கு நீர் வழங்கப்படுகின்றதெனின், தொட்டி நிரப்புவதற்கு எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும்?

(v) தொட்டி முற்றாக நிரம்பியிருந்த நாள் ஒன்றில் அதில் ஏற்பட்ட கசிவு ஒன்றின் காரணமாக 900 l நீர் வெளியேறிவிட்டது. இப்போது எஞ்சியுள்ள நீர் தொட்டியில் என்ன உயரத்திற்குக் காணப்படும்?

கலைச் சொற்கள்

அ

அட்சரகணித உறுப்பு	වීජීය පද	Algebraic term
அட்சரகணிதக் கோவைகள்	වීජීය ප්‍රකාශන	Algebraic expressions
அடி	පාදය	Base
அடைப்பு	වරහන්	Brackets

இ

இடப் பெறுமானம்	ස්ථානීය අගය	Place Value
இலாபம்	ලාභය	Profit

ஈ

ஈருப்புக் கோவைகள்	ද්විපද ප්‍රකාශන	Binomial expressions

உ

உறுப்புகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம்	පද අතර වෙනස	Difference of terms

எ

எண் தொடரி	සංඛ්‍යා අනුක්‍රම	Number sequence

ஒ

ஒத்த கோணங்கள்	අනුරූප කෝණ	Corresponding angles
ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்	ඒකාන්තර කෝණ	Alternate angles

க

கழிவு	වට්ටම	Discount
கழித்தல்	අඩු කිරීම	Subtraction
கனவளவு	පරිමාව	Volume
குத்தெதிர்க் கோணங்கள்	ප්‍රතිමුඛ කෝණ	Vertically opposite angles
குறித்த விலை	ලකුණු කළ මිල	Marked Price
கூட்டல்	එකතු කිරීම	Addition
கொள்ளளவு	ධාරිතාව	Capacity

த

தரகர்	තැරැව්කරුවා	Broker
தரகு	කොමිස්	Commission
தசம எண்கள்	දශම සංඛ්‍යා	Decimal Numbers
துவித எண்கள்	ද්වීමය සංඛ්‍යා	Binary numbers
தேற்றம்	ප්‍රමේයය	Theorem

ந

நிறைவெண்கள்	නිඛිල	Integers
நேயக் கோணங்கள்	මිත්‍ර කෝණ	Allied angles

ப

பின்னங்கள்	භාග	Fractions
பொது உறுப்பு	සාධාරණ පදය	General term
பொதுக் காரணி	පොදු සාධක	Common factors

ம

மறுதலை	විලෝමය	Converse
மாற்றம்	පරිවර්තනය	Conversion
முதலாம் உறுப்பு	පළමුවන පදය	1^{st} term

வ

வலு	බලය	Power
விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு	විද්‍යාත්මක අංකනය	Sciencetific notation
விற்ற விலை	විකුණුම් මිල	Selling Price

கற்பித்தல் தொடரொழுங்கு

உள்ளடக்கம்	தேர்ச்சி மட்டம்	பாடவேளைகளின் எண்ணிக்கை
முதலாந் தவணை		
1. எண் கோலங்கள்	2.1	3
2. துவித எண்கள்	1.3	3
3. பின்னங்கள்	3.1	5
4. சதவீதம்	5.1	6
5. அட்சரகணிதக் கோவைகள்	14.1, 14.2	5
6. அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்	15.1, 15.2	5
7. வெளிப்படையுண்மைகள்	23.1	4
8. நேர்கோடுகள், சமாந்தரக்கோடுகள் தொடர்பான கோணங்கள்	21.1, 21.2, 21.3	7
9. திரவ அளவீடு	11.1	3
		41
இரண்டாம் தவணை		
10. நேர் விகிதசமன்	4.1	6
11. கணிகருவி	6.2	2
12. சுட்டிகள்	6.1	3
13. மட்டந்தட்டலும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடும்	1.1, 1.2	5
14. ஒழுக்குகளும் அமைப்புகளும்	27.1, 27.2	9
15. சமன்பாடுகள்	17.1, 17.2	6
16. முக்கோணியொன்றின் கோணங்கள்	23.2, 23.3	9
17. சூத்திரங்கள்	19.1	2
18. வட்டமொன்றின் பரிதி	7.1	5
19. பைதகரசின் தொடர்பு	23.5	4
20. வரைபுகள்	20.1	4
		55
மூன்றாம் தவணை		
21. சமனிலிகள்	18.1	3
22. தொடைகள்	30.1	7
23. பரப்பளவு	8.1	5
24. நிகழ்தகவு	31.1	5
25. பல்கோணிகளின் கோணங்கள்	23.4	5
26. அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்	16.1	3
27. அளவிடைப் படங்கள்	13.1, 13.2	8
28. தரவுகளை வகைகுறித்தலும் விளக்கம் கூறலும்	28.1, 29.1	10
		46
		142

10 நேர் விகிதசமன்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- நேர் விகிதசமன்களை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- அலகு முறையைப் பயன்படுத்தி நேர் விகிதசமப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- விளக்கமளிப்பதன் மூலம் நேர் விகிதசமப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- நேர் விகிதசமனாகும் இரு கணியங்களுக்கிடையிலான தொடர்பை $y = kx$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதிக் காட்டுவதற்கும்
- நேர் விகிதசமன் தொடர்பான அறிவைப் பயன்படுத்தி வெளிநாட்டு நாணய மாற்றீடுகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

10.1 நேர் விகிதசமன்களின் அறிமுகம்

குறித்த ஒரு வகை பேனாக்களின் எண்ணிக்கையுடன் அவற்றின் விலை மாறும் விதம் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பேனாக்களின் எண்ணிக்கை	விலை (ரூ.)
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75
6	90

பேனாக்களின் எண்ணிக்கைக்கும் அவற்றின் விலைக்கும் இடையில் உள்ள கணித ரீதியிலான தொடர்பை விகிதமாக எழுதி அதனை எளிய வடிவில் காண்பிக்கும் விதத்தை நோக்குவோம். மேலேயுள்ள அட்டவணைக்கேற்பப் பேனாக்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது அதற்கேற்ப விலையும் அதிகரிக்கிறது எனத் தெரிகிறது.

பேனாக்களின் எண்ணிக்கையையும் அவற்றின் விலைகளையும் இரண்டு கணியங்களாகக் கருதுவோம். மேலேயுள்ள உதாரணத்துக்கேற்பப் பேனாக்களின் எண்ணிக்கையின் இரண்டு பெறுமானங்களுக்கும் ஒத்த விலைகளின் இரண்டு பெறுமானங்களுக்கும் இடையிலான சில விகிதங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இவ்விகிதங்கள் சமமானவை என்பதை அவதானிக்க.

பேனாக்களின் எண்ணிக்கைக்கு இடையில் உள்ள விகிதம்	அதற்கு ஒத்த விலைகளுக்கு இடையில் உள்ள விகிதம்
1 : 2	15 : 30 = 1 : 2
1 : 3	15 : 45 = 1 : 3
2 : 3	30 : 45 = 2 : 3
3 : 5	45 : 75 = 3 : 5
2 : 5	30 : 75 = 2 : 5

ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட இரு கணியங்கள் ஒரே விகிதத்தில் அதிகரிக்குமாயின் அல்லது குறையுமாயின், அக்கணியங்கள் நேர் விகிதசமனானவை எனப்படும்.

நேர் விகிதசமமாகவுள்ள இரண்டு கணியங்களில் ஒரு கணியம் அதிகரிக்கும்போது மற்றைய கணியமும் அதற்கு ஒத்ததாக அதே விகிதத்தில் அதிகரிப்பதை அவதானிக்கக் கூடியதாக இருக்கின்றது. இவ்வாறே நேர் விகிதசமனாகவுள்ள இரண்டு கணியங்களுள் ஒரு கணியம் குறையும்போது மற்றைய கணியமும் அதற்குச் சமனான விகிதத்தில் குறையும்.

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் தரப்படும் இரண்டு கணியங்களும் நேர் விகிதசமமானவையா, இல்லையா எனக் குறிப்பிடுக.

(i) ஒரே வகையான புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையும் அவற்றின் விலையும்.

(ii) சீரான கதியில் அசையும் பொருள் ஒன்று சென்ற தூரமும் அதற்காக எடுத்த நேரமும்.

(iii) மோட்டர் வாகனம் ஒன்றின் வேகமும் குறித்தவொரு தூரத்தைச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரமும்.

(iv) ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் அதன் சுற்றளவும்.

(v) யாதாயினுமொரு வேலையில் ஈடுபடும் மனிதர்களின் எண்ணிக்கையும் அதற்கு எடுக்கும் நாட்களின் எண்ணிக்கையும்.

(vi) சதுரம் ஒன்றின் பக்கம் ஒன்றின் நீளமும் அதன் பரப்பளவும்

(vii) ஒரு வீட்டில் பயன்படுத்தும் மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கையும் மாதக் கட்டணமும்.

10.2 அலகு முறையைப் பயன்படுத்தி நேர் விகிதசமன் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

குறித்தவொரு வகையில் 3 சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலை ரூ. 120 எனத் தரப்பட்டபோது அதே வகையான 5 சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலையைக் காணவேண்டும் எனக் கொள்வோம். இங்கே ஒரு சவர்க்காரக்கட்டியின் விலையைக் கண்டு அதிலிருந்து 5 சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலையை இதற்கு முன்னைய வகுப்புகளில் கற்றவாறு இலகுவில் கணித்து விடலாம்.

3 சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலை = ரூ. 120

1 சவர்க்காரக்கட்டியின் விலை = ரூ. $120 \div 3$

= ரூ. 40

5 சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலை = ரூ. 40×5

= ரூ. 200

இக்கணிப்பு முறையை இவ்வாறும் விவரிக்கலாம்.

இங்கு இரு கணியங்கள் உள்ளன. சவர்க்காரக்கட்டிகளின் எண்ணிக்கையும் அவற்றின் விலையுமே அவையாகின்றன. முதலில் ஒரு சவர்க்காரக்கட்டியின் விலையாகிய ரூ. 40 ஐக் கணித்தோம். பின்பு 5 சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலையைக் காண அப்பெறுமானத்தை 5 ஆல் பெருக்கினோம். ஒரு சவர்க்காரக்கட்டியின் விலை என்பது

மாறாப் பெறுமானமான $\dfrac{\text{சவர்க்காரக்கட்டிகளின் விலை}}{\text{சவர்க்காரக்கட்டிகளின் எண்ணிக்கை}}$

என்னும் பின்னத்தின் பெறுமானமாகும்.

அலகு ஒன்றின் பெறுமானத்தைக் காண்பதன்மூலம் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் முறை அலகு முறை எனப்படும்.

அலகு முறையையைப் பயன்படுத்தி நேர் விகிதசமப் பிரசினங்கள் சிலவற்றைத் தீர்க்கும் விதத்தை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

சீரான வேகத்தில் நடந்து செல்லும் ஒரு நபர் 5 நிமிடங்களில் 800 மீற்றர் தூரம் செல்வாராயின், 12 நிமிடங்களில் அவர் செல்லும் தூரத்தைக் கணிக்க.

5 நிமிடங்களில் நடந்து செல்லும் தூரம் $= 800$ m

1 நிமிடத்தில் நடந்து செல்லும் தூரம் $= 800 \div 5$

$= 160$ m

$\therefore$ 12 நிமிடங்களில் நடந்து செல்லும் தூரம் $= 160 \times 12$

$= 1\,920$ m ஆகும்.

உதாரணம் 2

கிறிகெற் போட்டியின்போது பயன்படுத்தப்படும் ஒரேயளவான 10 பந்துகளின் திணிவு 3 கிலோகிராம் எனின், அதே வகையான 3 பந்துகளின் திணிவு எவ்வளவு?

10 பந்துகளின் திணிவு $= 3$ kg

ஒரு பந்தின் திணிவு $= 3000 \div 10$

$= 300$ g

3 பந்துகளின் திணிவு $= 300 \times 3$

$= 900$ g ஆகும்.

அலகு முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பிரசினங்களைத் தீர்க்க.

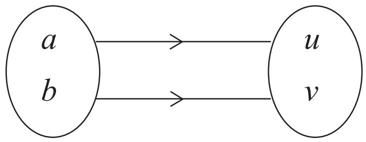
பயிற்சி 10.2

1. 8 தோடம்பழங்களின் விலை ரூ. 320 எனின், 5 தோடம்பழங்களின் விலை எவ்வளவு?
2. 5 மீற்றர் சீத்தைத் துணியின் விலை ரூ. 750 எனின், 12 மீற்றர் சீத்தைத் துணியின் விலை எவ்வளவு?
3. 15 அப்பிள்கள் அடங்கிய ஒரு பொதியின் திணிவு 3.6 கிலோகிராம் ஆயின் 8 அப்பிள்களின் திணிவு யாது? (எல்லா அப்பிள்களும் சம திணிவு உடையன எனக் கொள்க.)
4. 5 நிமிடங்களில் 240 பிரதிகளை அச்சிடும் அச்சு இயந்திரம் ஒன்று 12 நிமிடங்களில் அச்சிடும் பிரதிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
5. சீரான வேகத்தில் செல்லும் மோட்டர் வாகனம் ஒன்று 15 நிமிடங்களில் 12 கிலோமீற்றர் தூரம் செல்லும் எனின், 40 நிமிடங்களில் செல்லும் தூரத்தைக் கணிக்க.
6. மோட்டர்ச் சைக்கிள் ஒன்று 2 லீற்றர் எரிபொருளைப் பயன்படுத்தி 90 கிலோமீற்றர் தூரம் செல்லும் எனின், அது 5 லீற்றர் எரிபொருளைப் பயன்படுத்தி எவ்வளவு தூரம் செல்லும் எனக் காண்க.
7. சீரான வேகத்தில் நீர் வடிந்தோடும் ஒரு நீர்க் குழாய் 1000 லீற்றர் கொள்ளளவுள்ள தாங்கி ஒன்றை நிரப்புவதற்கு 5 நிமிடங்கள் எடுக்குமாயின், 1600 லீற்றர் கொள்ளளவுள்ள தாங்கி ஒன்றை நிரப்புவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைச் செக்கனில் காண்க.

10.3 விளக்கமளிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி நேர் விகிதசமப் பிரசினங் களைத் தீர்த்தல்

நேர் விகிதசமனுள்ள இரு கணியங்களில் முதலாவது கணியத்தின் எவையேனும் இரண்டு பெறுமானங்களுக்கிடையிலான விகிதம் மற்றைய கணியத்தின் அதற்கொத்த இரண்டு பெறுமானங்களுக்கிடையிலான விகிதத்திற்குச் சமனாகுமெனப் பாடத்தின் தொடக்கத்தில் கற்றோம். அதனைப் பின்வருமாறு அட்சரங்களால் குறிப்பிடலாம்.

a எண்ணிக்கையுள்ள ஏதேனும் ஒரு பொருளின் விலை ரூ. u எனவும் b எண்ணிக்கையுள்ள அதே பொருளின் விலை ரூ. v எனவும் கருதும்போது



அப்போது $a : b = u : v$ என எழுதலாம். இதனைப் பின்னமாக $\frac{b}{a} = \frac{v}{u}$ (அல்லது $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$) என எழுதலாம்.
இதனை $av = bu$ எனவும் குறுக்குப் பெருக்கத்தின் மூலம் கூறலாம்.

இப்பண்பைப் பயன்படுத்தி நேர் விகிதசமன் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் அறிந்துகொள்வோம்.

உதாரணம் 1

5 மாம்பழங்களின் விலை ரூ. 75 எனின், 8 மாம்பழங்களின் விலை என்ன?
8 மாம்பழங்களின் விலையை ரூ. x எனக் கருதும்போது அவற்றின் தொடர்பைப் இவ்வாறு காட்டலாம்.

மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கை		விலை (ரூ.)
5	$\longrightarrow$	75
8	$\longrightarrow$	x

இத்தரவுகளைச் சமன்பாடு வடிவத்தில் எழுதி x இன் பெறுமானத்தைப் பெற்று விடலாம். அதன் மூலம் 8 மாம்பழங்களின் விலை பெறப்படும்.

$$5 : 8 = 75 : x$$

ஆகவே $$\frac{5}{8} = \frac{75}{x}$$

$$5x = 75 \times 8$$

$$x = \frac{75 \times 8}{5}$$

$$x = 120$$

எனவே 8 மாம்பழங்களின் விலை ரூ. 120 ஆகும்.

உதாரணம் 2

15 % இலாபம் கிடைக்குமாறு ரூ. 500 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருள் ஒன்றை விற்க வேண்டிய விலையைக் காண்க.

இப்பிரசினத்தில் உள்ள தரவுகளை விகிதசமனைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதுவோம். ரூ. 100 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருளின் விற்பனை விலை ரூ. 115 ஆயின் (இலாபம் 15% என்பதால்), ரூ 500 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருளின் விற்பனை விலை என்ன?

ரூ. 500 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருளின் விற்பனை விலை ரூ. x என்போம்.

கொள்விலை (ரூ.)		விற்பனை விலை (ரூ.)
100	$\longrightarrow$	115
500	$\longrightarrow$	x

$$100 : 500 = 115 : x$$

$$\frac{100}{500} = \frac{115}{x}$$

$$100\,x = 115 \times 500$$

$$x = \frac{115 \times 500}{100}$$

$$x = 575$$

ஆகவே, விற்க வேண்டிய விலை ரூ. 575 ஆகும்.

பயிற்சி 10.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள விகிதசமன்களில் வெற்றிடத்திற்குப் பொருத்தமான பெறுமானங்களை எழுதுக.

   (i) 2 : 5 = 8 : ......   (ii) 3 : 4 = ... : 20

   (iii) 5 : 3 = 40 : ......   (iv) 4 : 1 = ... : 8

   (v) ... : 6 = 35 : 30   (vi) 8 : ... = 24 : 15

2. பின்வரும் பிரசினங்களில் உள்ள தரவுகளை அம்புக்குறி மூலம் காண்பித்து, பின்னர் சமன்பாடு ஒன்றை எழுதி விகிதசம முறையில் தீர்க்க.
   (i) 10 கிலோகிராம் அரிசியின் விலை ரூ. 850 ஆகும். இவ்வகையான 7 கிலோகிராம் அரிசியின் விலையைக் காண்க.
   (ii) 9 cm^3 கனவளவுள்ள ஒரு வகை உலோகத்தின் திணிவு 108 கிராம் ஆகுமாயின், 12 cm^3 கனவளவுள்ள அதே வகை உலோகத்தின் திணிவைக் காண்க.

(iii) சீரான கதியில் செல்லும் ஒரு மோட்டர்ச் சைக்கிள் 4 மணித்தியாலங்களில் 240 கிலோமீற்றர் தூரம் செல்லுமாயின், 3 மணித்தியாலங்களில் அவ்வாகனம் செல்லும் தூரத்தைக் காண்க.

(iv) பொருள் ஒன்றை விற்பனை செய்யும்போது 3% கழிவு வழங்கப்படும் ஒரு விற்பனை நிலையத்தில் ரூ. 800 விலையுள்ள குறித்த பொருள் ஒன்றைக் கொள்வனவு செய்யத் தேவைப்படும் பணம் யாது?

(v) 4 பென்சில்கள் ரூ. 48 ஆகுமெனின், ரூ 132 இற்குக் கொள்வனவு செய்யத்தக்கப் பென்சில்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(vi) 12 பழப்பானப் போத்தல்களின் விலை ரூ. 4800 ஆயின், ரூ. 6000 இற்கு வாங்கத்தக்க போத்தல்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(vii) ஒரு பொருளை விற்கும்போது 12% தரகுக் கட்டணம் வழங்கப்படுமாயின், ரூ. 15 000 பெறுமதியுள்ள பொருளை விற்கும்போது கிடைக்கும் தரகுக் கட்டணம் யாது?

10.4 அட்சரகணித முறையில் எழுதி நேர் விகிதசமன் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

பேனா ஒன்றின் விலை ரூ. 15 ஆகுமெனின்,

- 2 பேனாக்களின் விலை ரூ. 30 ஆகும்.
- 3 பேனாக்களின் விலை ரூ. 45 ஆகும்.
- 4 பேனாக்களின் விலை ரூ. 60 ஆகும்.

மேலே தரப்பட்ட நான்கு சந்தர்ப்பங்களிலும் செலவாகும் தொகையைப் பேனாக்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கும்போது பெறப்படும் பெறுமானம் மாறாப் பெறுமானம் என நோக்கினோம்.

அதாவது $$\frac{\text{செலவிட்ட தொகை}}{\text{பேனாக்களின் எண்ணிக்கை}} = \text{மாறாப் பெறுமானம் (மாறிலி)}$$

இங்கே மாறாப் பெறுமானம் பேனா ஒன்றின் விலையாகும். அதற்கேற்ப x எண்ணிக்கையுள்ள பேனாக்களின் விலை ரூ. y எனின்,

$\frac{y}{x} = k$ எனக் குறிக்கலாம். k என்பது ஒரு மாறாப் பெறுமானமாகும்.

இச்சமன்பாட்டை $y = kx$ எனவும் எழுதலாம்.

இவ்வட்சரகணிதச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேர் விகிதசமப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்கள் மூலம் அறிந்து கொள்வோம்.

உதாரணம் 1

3 அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலை ரூ. 75 எனின், 5 அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலை என்ன?

அப்பியாசப் புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையை x எனவும் அவற்றின் விலையை y எனவும் கொண்டால், இத்தொடர்பு $y = kx$ என எழுதலாம். இங்கே, k ஒரு மாறிலியாகும். பிரசினத்தில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து k இன் பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

3 அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலை ரூ. 75 ஆகையால், $x = 3$ உம் $y = 75$ உம் ஆகும்.

இப்பெறுமானங்களைச் சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதனால் $75 = k \times 3$ ஆகும். இதனைத் தீர்ப்பதால் $k = 25$ என்னும் பெறுமானம் கிடைக்கும்.

k இற்குரிய பெறுமானத்தை முதலிற் பெற்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது $y = 25\,k$ என்னும் x இற்கும் y இற்கும் இடையில் உள்ள தொடர்பு பெறப்படுகின்றது.
இப்போது இச்சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எந்தவொரு x பெறுமானத்துக்கும் ஒத்த y பெறுமானத்தையும் அல்லது எந்தவொரு y இன் பெறுமானத்துக்கு ஒத்த x இன் பெறுமானத்தையும் காணலாம்.

பிரசினத்தில் 5 அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலையைக் காணவேண்டும் ஆகையால், $x = 5$ இற்கு ஒத்த y இன் பெறுமானத்தைக் காணவேண்டியுள்ளது. இதனை

$y = 25x$ இல் $x = 5$ ஐப் பிரதியிடுவதன் மூலம்
$y = 25 \times 5$
$= 125$ எனப் பெறப்படும்.
இதற்கேற்ப 5 அப்பியாசப் புத்தகங்களின் விலை ரூ. 125 ஆகும்.

உதாரணம் 2

குறித்த ஒரு வியாபாரி 20% இலாபத்துடன் ரூ. 500 இற்குக் கொள்வனவு செய்த பொருள் ஒன்றை என்ன விலைக்கு விற்பார்?
பொருளின் கொள்விலையை x எனவும் விற்பனை விலையை y எனவும் கொண்டு

$\frac{y}{x} = k$ இல் பிரதியிடும்போது

$$\frac{120}{100} = k$$

$\frac{y}{500} = k$ என்னும் சமன்பாடுகள் பெறப்படும்.

k ஒரு மாறிலி ஆகையால்,

$$\frac{y}{500} = \frac{120}{100}$$ என எழுதலாம்.

அப்போது $y = \frac{120 \times 500}{100}$

$$y = 600$$

எனவே பொருளின் விற்பனை விலை ரூ. 600 ஆகும்.

பயிற்சி 10.4

இப்பிரசினங்களை அட்சரகணிதச் சமன்பாட்டு முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

1. 3 காற்சட்டைகளின் விலை ரூ. 1200 எனின், 5 காற்சட்டைகளின் விலையைக் காண்க.

2. சமனான வேதனத்தைப் பெறும் 8 தொழிலாளர்களுக்கு நாள் ஒன்றில் ரூ. 7200 வேதனம் வழங்கப்பட்டது. அவ்வாறெனின், மூன்று தொழிலாளர்கள் நாள் ஒன்றுக்குப் பெற்ற வேதனத்தைக் காண்க.

3. அளவிடைக்கேற்ப வரையப்பட்ட தேசப்படம் ஒன்றில் 5 சென்ரிமீற்றரினால் 25 மீற்றர் குறிக்கப்படுகின்றது. அவ்வாறெனின், 8 சென்ரிமீற்றரினால் குறிக்கப்படும் உண்மையான தூரம் எவ்வளவு?

4. மென்பானத்தை உற்பத்திசெய்யும் ஒரு இயந்திரம் 5 மணித்தியாலங்களில் 7500 மென்பானப் போத்தல்களை உற்பத்திசெய்கின்றது. அவ்வியந்திரம் 7 மணித்தியாலங்களில் எத்தனை போத்தல்களை உற்பத்திசெய்யும்?

5. புத்தக விற்பனை நிலையம் ஒன்று ஒவ்வொரு கொள்வனவிலும் 8% கழிவு வழங்குகின்றது. குறித்த ஒருவர் ரூ. 1200 இற்கு அங்கு புத்தகங்களைக் கொள்வனவு செய்யும்போது செலுத்த வேண்டிய பணத்தொகை எவ்வளவு?

10.5 வெளிநாட்டு நாணயங்கள்

ஒவ்வொரு நாட்டிலும் அவற்றுக்கே உரித்தான பண அலகுகள் இருப்பதையும் அப்பண அலகின் பெறுமதியை இன்னொரு நாட்டின் பண அலகுடன் ஒப்பிடும்போது அவற்றின் பெறுமானம் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபடுவதையும் நாம் அறிவோம். ஒரு நாட்டின் பண அலகை இன்னொரு நாட்டின் பண அலகாக மாற்றும் விதத்தைக் குறிப்பதற்கு **நாணயமாற்று விகிதம்** என்னும் பதம் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. அவ்விகிதம் நிரந்தரமான பெறுமானமாக இருக்காது. பல காரணங்களால் நாணயமாற்று விகிதம் தினந்தோறும் மாற்றமடைவது வழக்கமாகும்.

நாடுகள் சிலவற்றில் பயன்படுத்தப்படும் பண அலகுகளும் குறித்தவொரு தினத்தில் அப்பண அலகுகளின் நாணயமாற்று விகிதமும் இலங்கை ரூபாயில் நாணயமாற்று விகிதமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

நாடு	**வெளிநாட்டு நாணய அலகு**	**நாணயமாற்று விகிதம் (இலங்கை ரூ.)**
அமெரிக்கா	அமெரிக்க டொலர்	151.20
இங்கிலாந்து	ஸ்ரேலிங் பவுண்	185.90
ஐரோப்பா	யூரோ	160.60
யப்பான்	யென்	1.33
இந்தியா	இந்திய ரூபாய்	2.26
சவுதி அரேபியா	சவுதி ரியால்	40.32
சிங்கப்பூர்	சிங்கப்பூர் டொலர்	107.30

(2017-03-05 இணையத்தளத்திலிருந்து பெறப்பட்டது)

விகிதசமன் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி நாணயமாற்று விகிதம் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் விதத்தை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

அமெரிக்க டொலர் ஒன்றின் நாணயமாற்று விகிதம் ரூ. 151 ஆக இருந்த ஒரு நாளில் 50 அமெரிக்க டொலர்களை இலங்கை ரூபாயாக மாற்றிய ஒருவர் பெற்ற பணத்தொகை இலங்கை ரூபாயில் எவ்வளவு?

1 அமெரிக்க டொலரின் பெறுமதி = ரூ. 151

50 டொலர்களின் பெறுமானம் = ரூ. 151×50

= ரூ. 7550

உதாரணம் 2

இங்கிலாந்துக்குச் சுற்றுலா ஒன்றை மேற்கொண்ட ஒரு நபர் ஸ்ரேலிங் பவுண் ஒன்றின் நாணயமாற்று விகிதம் ரூ. 185 ஆக இருந்த ஒரு தினத்தில் ரூ. 74 000 ஐ ஸ்ரேலிங் பவுண்களாக மாற்றிய அவர் பெறும் தொகையை ஸ்ரேலிங் பவுண்களில் காண்க.

ரூ. 185 இன் பெறுமானம் = 1 ஸ்ரேலிங் பவுண்

ரூ. 1 இன் பெறுமானம் = ஸ்ரேலிங் பவுண் $\dfrac{1}{185}$

ரூ. 74 000 இன் பெறுமானம் = ஸ்ரேலிங் பவுண் $\dfrac{1}{185} \times 74\,000$

= ஸ்ரேலிங் பவுண் 400

(இங்கு $\dfrac{1}{185}$ ஐத் தசம வடிவில் மாற்றாது வைத்திருப்பின் சுருக்குவது இலகுவாகும்).

எனவே பெறும் ஸ்ரேலிங் பவுண்களின் எண்ணிக்கை 400 ஆகும்.

பயிற்சி 10.5

மேலே தரப்பட்ட நாணயமாற்று விகித அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

1. வெளிநாடு ஒன்றில் பணிபுரியும் நபர் ஒருவரின் மாதச் சம்பளம் 1500 அமெரிக்க டொலர் ஆகும். அவரது மாதச் சம்பளம் இலங்கை ரூபாயில் எவ்வளவு ?

2. யப்பானிலிருந்து இறக்குமதி செய்யப்பட்ட தொலைக்காட்சிப்பெட்டி ஒன்று 12500 யென் எனின், அதன் பெறுமானம் இலங்கை ரூபாயில் எவ்வளவு ?

3. மேற்படிப்புக்காக ஐக்கிய இராச்சியத்திற்குச் செல்லும் புலமைப் பரிசில் பெற்ற ஒருவர் மாதந்தோறும் 2500 ஸ்ரேலிங் பவுண்களைக் கொடுப்பனவாகப் பெறுகிறார். அவர் பெறும் பணத்தின் தொகையை இலங்கை ரூபாயில் காண்க.

4. குறித்தவொரு விற்பனை நிலையத்தில் தீர்வையின்றி விற்பனைக்கு வைக்கப்பட்டிருந்த விளையாட்டுப் பொருள் ஒன்றின் விலை 750 யூரோ எனக் குறிக்கப்பட்டிருந்தது. இப்பொருளைக் கொள்வனவு செய்யச் செலுத்த வேண்டிய இலங்கை ரூபாய் எவ்வளவு ?

5. இந்தியாவுக்கு யாத்திரை செல்லும் ஒருவர் ரூ. 56 500 இலங்கை ரூபாயை இந்திய ரூபாயாக மாற்றிக் கொண்டார். அவர் பெற்ற தொகை இந்திய ரூபாயில் எவ்வளவு ?

6. இலங்கையிலிருந்து சிங்கப்பூருக்கு ஏற்றுமதி செய்யப்படும் 600 880 ரூபாய் பெறுமதியான ஆடைத் தொகை ஒன்றுக்காகக் கிடைக்கும் பணத்தின் தொகையைச் சிங்கப்பூர் டொலரில் தருக.

11 கணிகருவி

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

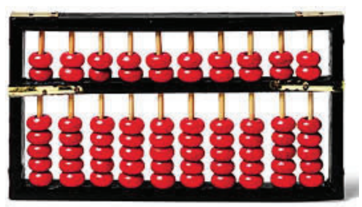
- விஞ்ஞானக் கணிகருவியின் =, %, x^2, $\sqrt{x}$ என்னும் சாவிகளை இனங்கண்டு பயன்படுத்துவதுவதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

11.1 கணிகருவி

ஆதிகாலத்திலிருந்து மனிதன் கணிப்புகளைச் செய்வதற்குப் பல்வேறு உபகரணங்களைப் பயன்படுத்தி வருகின்றான். இடையர் காலத்தில் மனிதனிடமிருந்த விலங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுவதற்குக் கற்களைப் பயன்படுத்தினான். பின்னர் அவன் கோடுகளை வரைவதன் மூலம் அப்பணியைச் செய்தான். இதற்காகக் களிமண் பலகைகள் பயன்படுத்தப்பட்டமைக்குச் சான்றுகள் உள்ளன. கி. மு. 1000 இல் எகிப்தியர் கணிப்புகளுக்காக எண்சட்டம் என்னும் உபகரணத்தைப் பயன்படுத்தினர். நாம் தற்போது பயன்படுத்தும் விதத்தில் அமைந்த எண்சட்டம் சீனர்களினால் 15 ஆம் நூற்றாண்டில் தயாரிக்கப்பட்டது. அதே வேளை 17 ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த ஜோன் நேப்பியரினால் எண் கீற்றுகள் உள்ள உபகரணம் தயாரிக்கப்பட்டது. அது நேப்பியர் கீற்றுகள் எனப்படும்.

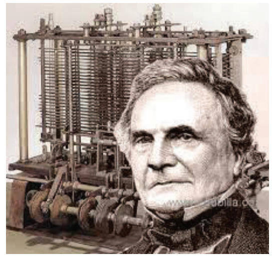
புராதன எகிப்து எண்சட்டம்



தற்கால எண்சட்டம்

பிரெஞ்சு இனத்தவராகிய பிளேஸ் பஸ்கால் (Blaise Pascal 1623 - 1662) என்பவர் பொறிமுறையாகத் தொழிற்படும் கணிகருவியை உற்பத்திசெய்தார். 1833 ஆம் ஆண்டில் ஆங்கிலேயராகிய சாள்ஸ் பெபேஜ் (1791 - 1871) மேலும் மேம்பட்ட கணிகருவியை அறிமுகஞ்செய்தார். இப்பொறியை அடிப்படையாகக் கொண்டு மின் வலுவினால் தொழிற்படுத்தப்படும் கணினி உருவாகியது. இலத்திரனியலின் மேம்பாட்டுடன் தற்போது பயன்படுத்தப்படும் சிறிய அளவிலான கணிகருவி உற்பத்தி செய்யப்பட்டது.

Blaise Pascal

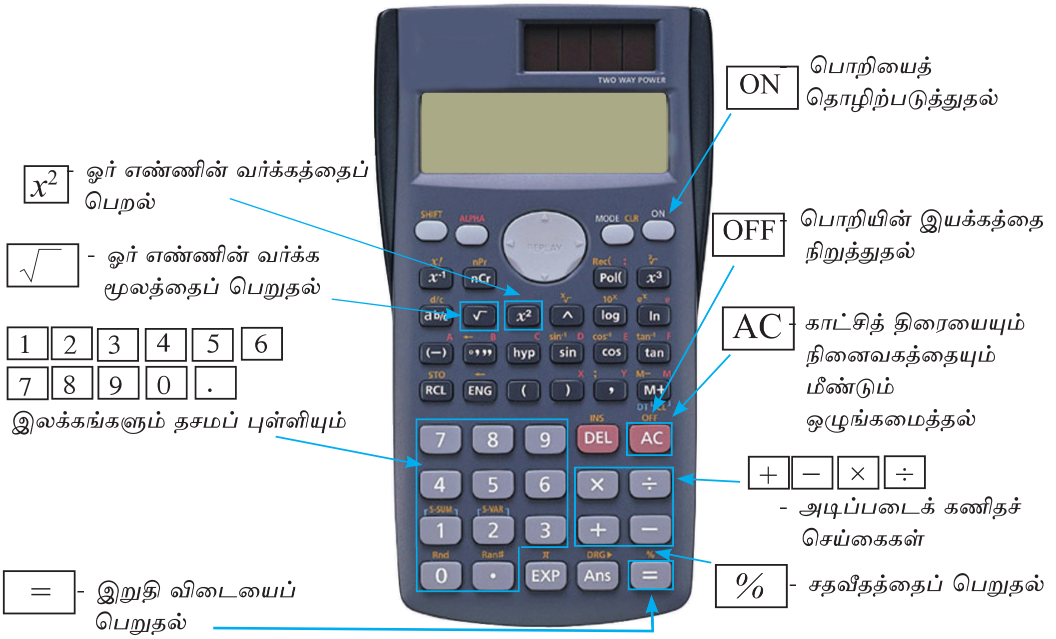


Charles Babbage

தற்போது கணிகருவிகள் சாதாரண கணிகருவி, விஞ்ஞானக் கணிகருவி என இரு வகைகளாக உற்பத்திசெய்யப்படுகின்றன. சாதாரண கணிகருவி மூலம் கூட்டல், கழித்தல், வகுத்தல், பெருக்கல் போன்ற சாதாரண கணிதச் செய்கைகளை மாத்திரம் செய்யலாம். விஞ்ஞானக் கணிகருவி மூலம் $x^2, x^3, \sqrt[x]{y}$, 10^{x} போன்ற சிக்கலான கணிதச் செய்கைகளையும் செய்யலாம்.

விஞ்ஞானக் கணிகருவி

விஞ்ஞானக் கணிகருவி சாதாரண கணிகருவியைப் போன்று தரவுகளை உள்ளிடுவதற்கான சாவிப் பலகையையும் காட்சித் திரையையும் கொண்டுள்ளது. ஆயினும் விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் உள்ள சாவிகள், காட்சித் திரையில் காணத்தக்க இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை, இலக்க நிரைகளின் எண்ணிக்கை ஆகியன சாதாரண கணிகருவியிலும் பார்க்கக் கூடியனவாகும்.



11.1 கணிகருவியைப் பயன்படுத்திக் கணித்தல்

கணிகருவியைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகளைச் செய்யும்போது சாவிகளைக் குறித்த ஒழுங்கு முறையில் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

உதாரணம் 1

27 + 35 இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை பின்வருமாறு;

ON → 2 → 7 → + → 3 → 5 → = 62

உதாரணம் 2

208 − 159 இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை பின்வருமாறு;

ON → 2 → 0 → 8 → − → 1 → 5 → 9 → = 49

உதாரணம் 3

5.25 × 35.4 இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை பின்வருமாறு;

ON → 5 → . → 2 → 5 → × → 3 → 5 → . → 4 → = 185.85

உதாரணம் 4

5.52 ÷ 6 இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை பின்வருமாறு;

ON → 5 → . → 5 → 2 → ÷ → 6 → = 0.92

கணிப்பின் இறுதியில் விடையைப் பெற்ற பின்னர் கணிகருவியின் இயக்கத்தை நிறுத்துவதற்கு OFF சாவியைத் தொழிற்படுத்த வேண்டும். அன்றேல், வேறொரு கணிப்பைத் தொடங்க வேண்டிய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் AC சாவியைத் தொழிற்படுத்துவதன் மூலம் தொடக்கக் கணிப்பின் எல்லாத் தகவல்களையும் அழிக்கலாம்.

உதாரணம் 5

பின்வரும் சுருக்கல்களுக்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்கு முறையைக் காட்டுக.

(i) $53 + 42 - 25$ (ii) $35 \times 45 \div 21$

ON	→	5	→	3	→	+	→	4	→	2	→	−	→	2	→	5	→	=	70

AC	→	3	→	5	→	×	→	4	→	5	→	÷	→	2	→	1	→	=	75

பயிற்சி 11.1

1. சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறையைக் காட்டி, கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

a. $45 + 205$ **b.** $350 - 74$ **c.** 824×95
d. $3780 \div 35$ **e.** $3.52 + 27.7$ **f.** $43.5 - 1.45$
g. 7.35×6.2 **h.** $134.784 \div 31.2$ **i.** $12.5 \div 50 \times 4.63$
j. $15.84 - 6.75 \times 3.52$ **k.** $120.82 \div 0.0021 \times 5$ **l.** $0.006 \div 0.33 \times 0.12$

சாதாரண கணிகருவியையும் விஞ்ஞானக் கணிகருவியையும் பயன்படுத்திச் சுருக்கல்

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கணிதச் செய்கைகள் இருக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கல் செய்யப்படும் விதத்தை இப்போது கருதுவோம்.

சாதாரண கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி $75 + 6 \div 3$ ஐச் சுருக்கும்போது

ON → 7 → 5 → + → 6 → ÷ → 3 → = என்னும் ஒழுங்குமுறையில் தரவுகளை உள்ளிடும்போது தரவுகளை வழங்கும் ஒழுங்குமுறையில் கணிதச் செய்கைகள் நடைபெற்று விடையாக 27 பெறப்படும்.

அதாவது $75 + 6 \div 3 = 81 \div 3 = 27$ எனத் தவறான விடை கிடைக்கும்.

(BODMAS விதிக்கு ஏற்பப் பெறப்பட்ட விடை தவறானதாகும்.)

விஞ்ஞானக் கணிகருவிக்கு அவ்வாறு தரவுகளை உள்ளிடும்போது நியம ஒழுங்கு முறைக்கேற்பக் கணிதச் செய்கை நடைபெற்று விடையாக 77 பெறப்படும்.

அது $75 + 6 \div 3 = 75 + 2 = 77$ எனக் கணிக்கப்படுகின்றது.

சுருக்கும்போது நாம் வழக்காகப் பயன்படுத்தப்படும் BODMAS விதிகளுக்கேற்ப இவ்விடை சரியானது.

குறிப்பு

சாதாரண கணிகருவி மூலம் கணிக்கும்போது தரவுகளை உள்ளிடும் ஒழுங்குமுறை பற்றிக் கவனமாக இருத்தல் வேண்டும். எனினும் விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் இருக்கும் ஒழுங்குமுறைக்கேற்பத் தரவுகளை உள்ளிட்டுச் சரியான விடையைப் பெறலாம். ஆனால் இங்கு விசேடமாகக் குறிப்பிடவேண்டிய ஒரு விடயம் உண்டு. கணிகருவிகளை உற்பத்திசெய்யும் பெரும்பாலான கம்பனிகள் தமது உற்பத்தி நிகழ்ச்சித்திட்டங்களைத் திட்டமிடும்போது BODMAS விதிகளைப் பின்பற்றினாலும் அவற்றிலிருந்து சிறிது வேறுபட்ட விதத்தில் கணிப்புகள் நடைபெறும் கணிகருவிகளும் இருப்பதைக் காணலாம். அத்தகைய கணிகருவிகளுக்குத் தரவுகளை உள்ளிட வேண்டிய விதம் அவற்றுடன் வரும் அறிவுறுத்தற் படிவங்களில் தரப்பட்டிருக்கும். அவ்வாறு அவற்றுள் அறிவுறுத்தற் படிவங்கள் இல்லாத சந்தர்ப்பத்தில் சில எளிய சுருக்கல்களைச் செய்து கணிகருவியின் மூலம் கணிப்பு நடைபெறும் விதம் பற்றிய விளக்கத்தைப் பெறலாம். அவ்வாறில்லாவிட்டால் முதலில் நடைபெற வேண்டிய கோவையை அடைப்புக்குள் இட்டு வேறுபடுத்த வேண்டும். ஓர் உதாரணமாகக் கோவை $1 - 5 + 12 \div 3 \times 2$ இல் உள்ள ஒழுங்குமுறைமைக்கு உள்ளிட்டால், சில கணிகருவிகளில் வகுத்தலுக்கு முன்பாக பெருக்கல் நடைபெறும். எனினும் BODMAS விதிகளுக்கேற்ப வகுத்தலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் சம முன்னுரிமை அளிக்கப்படுகின்றமையால், இடமிருந்து வலமாகச் செல்லும்போது முதலில் வகுத்தலைச் செய்தல் வேண்டும்.

11.2 விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் $\boxed{\%}$ சாவியைப் பயன்படுத்தல்

சதவீதங்களைக் கணிக்கையில் $\boxed{\%}$ சாவி பயன்படுத்தப்படுகின்றது. பெரும்பாலான கணிகருவிகளில் $\boxed{=}$ சாவி மீது $\boxed{\%}$ குறிக்கப்பட்டிருக்கும். அதே வேளை $\boxed{\text{Shift}}$ சாவியைத் தொழிற்படுத்தி $\boxed{=}$ சாவியை அழுத்துவதன் மூலம் $\boxed{\%}$ தொழிற்படுத்தப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

480 இன் 25% ஐக் காண்பதற்குப் பின்வரும் ஒழுங்கு முறையில் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

$\boxed{\text{ON}}$ அல்லது $\boxed{\text{AC}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{0} \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{\text{SHIFT}} \rightarrow \overset{\%}{\boxed{=}} \rightarrow \boxed{=}$ 120

உதாரணம் 2

$\frac{2}{8}$ ஐ ஒரு சதவீதமாகக் காட்டுவோம். அதற்காகப் பின்வரும் ஒழுங்குமுறையில் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

ON → 2 → ÷ → 8 → SHIFT → = (%) → = → 25

உதாரணம் 3

ரூ. 2500 இன் 35% ஐக் காண்பதற்குப் பின்வரும் ஒழுங்கு முறையில் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

ON → 2 → 5 → 0 → 0 → × → 3 → 5 → SHIFT → = (%) → = → 875

உதாரணம் 4

ஒரு கிராமத்தின் சனத்தொகை 550 ஆகும். அதில் 66 பேர் பாடசாலைப் பிள்ளைகளாவர். பாடசாலைக்குச் செல்லும் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையைக் கிராமத்தின் சனத்தொகையின் சதவீதமாகக் காண்பதற்குப் பின்வரும் ஒழுங்கு முறையில் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டும்.

ON → 6 → 6 → ÷ → 5 → 5 → 0 → SHIFT → = (%) → = → 12

பயிற்சி 11.2

1. சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறையைக் காட்டி, கணிகருவியியைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.
(i) 350 × 3%   (ii) 7520 × 60%   (iii) 75.3 × 5%

2. கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் சதவீதமாகக் காட்டுக.

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{12}{25}$ (iii) $\frac{7}{20}$

3 தொடக்கம் **7** வரையுள்ள பிரசினங்களின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்குக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்துக.

3. ஒருவர் ரூ. 450 ஐச் செலவழித்து உற்பத்திசெய்த ஒரு கதிரையை விற்று ரூ. 220 இலாபமாகப் பெறுகின்றார். அவர் பெற்ற இலாபச் சதவீதம் யாது?

4. ஒரு பாடசாலையில் உள்ள பிள்ளைகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 750 ஆகும். அவர்களில் 20% ஆனோர் பேருந்தில் பாடசாலைக்கு வருகின்றனர். பேருந்தில் பாடசாலைக்கு வரும் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை யாது?

5. நிமலனின் மாதச் சம்பளம் ரூ. 35 000 ஆகும். அவர் அதில் ரூ. 7 000 ஐச் சேமிப்புக் கணக்கில் வைப்புச் செய்கின்றார். அவர் சேமித்த பணம் அவரது சம்பளத்தில் என்ன சதவீதமாகும்?

6. 650 பிள்ளைகள் கற்கும் ஒரு பாடசாலையில் 143 பிள்ளைகள் சங்கீதம் கற்கின்றனர். சங்கீதம் கற்கும் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையைப் பாடசாலையில் உள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையின் சதவீதமாகக் காட்டுக.

7. நெல் இருப்பில் உள்ள பதர்களின் சதவீதம் 2 % இலும் குறைவானது எனக் கூறப்பட்டது. 350 kg நெல்லில் உள்ள பதர்களின் அளவு 6 kg ஆகும். மேற் குறித்த கூற்று உண்மையானதா?

11.3 எண் ஒன்றின் வர்க்கத்தை $\boxed{x^2}$ சாவியைப் பயன்படுத்திக் கணித்தல்

2^2, 5^2, 3.21^2 போன்ற சுட்டி 2 உள்ள வலுக்களின் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு $\boxed{x^2}$ சாவி பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

3^2 இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{ON}} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{9}$

உதாரணம் 2

4.1^2 இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{AC}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{\cdot} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{=} \quad \boxed{16.81}$

உதாரணம் 3

$5^2 \times 12^2$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{AC}} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{=} \boxed{3600}$

உதாரணம் 4

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறையை எழுதுக.
சதுரத்தின் பரப்பளவு = $6 \times 6 \text{ cm}^2$ ஆகையால்

$\boxed{\text{ON}} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{36}$

$\therefore$ சதுரத்தின் பரப்பளவு = 36 cm^2

பயிற்சி 11.3

1. கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்கு முறையைக் காட்டி, வலுக்களைக் காண்க.

(i) 2^2 (ii) 8^2 (iii) 127^2
(iv) 3532^2 (v) 3.5^2 (vi) 6.03^2

2. கணிகருவியைப் பயன்படுத்திச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்கு முறையைக் காட்டிப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) 3×5^2 (ii) $3^2 \times 4^2$ (iii) $(3.5)^2$
(iv) $4^2 + 3^2$ (v) $10^2 - 6^2$ (vi) $10^2 - 3^2 \times 5$

11.4 விஞ்ஞானக் கணிகருவியில் $\boxed{\sqrt{\ }}$ சாவியைப் பயன்படுத்திக் கணித்தல்

ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலத்தைக் காண்பதற்கு $\boxed{\sqrt{\ }}$ சாவி பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

உதாரணம் 1

$\sqrt{25}$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{ON}} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{=}$ 5

உதாரணம் 2

$\sqrt{44\,521}$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{ON}} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{=}$ 211

உதாரணம் 3

$\sqrt{5.29}$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{ON}} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{.} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{9} \rightarrow \boxed{=}$ 2.3

பயிற்சி 11.4

1. விஞ்ஞானக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்தி, சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறையைக் காட்டிப் பின்வரும் எண்களின் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

(i) 64 (ii) 81 (iii) 2704
(iv) 3 356 (v) 3 500 (vi) 362 404

2. சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறையைக் காட்டிப் பின்வரும் எண்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $\sqrt{49}$ (ii) $\sqrt{121}$ (iii) $\sqrt{625}$
(iv) $\sqrt{20.25}$ (v) $\sqrt{5.76}$ (vi) $\sqrt{0.1225}$

பலவினப் பயிற்சி

1. சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறையைக் காட்டி விஞ்ஞானக் கணிகருவியின் மூலம் சுருக்குக.

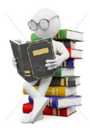
(i) $5 + 6 \div 2 + 4 \times 5$ (ii) $2\,562 + 37 \times 0.25$ (iii) $42.48 \div 5.31$
(iv) $428 + 627 \times 5\ \%$ (v) $5.3^2 \div 6.01$ (vi) $\frac{7}{130} \times 2\ \% + 560$

2. மோகன் நாற்று மேடையில் முளைப்பதற்கு இட்ட 35 வித்துகளில் 21 வித்துகள் முளைத்தன. முளைத்த வித்துகளின் எண்ணிக்கை நாற்றுமேடையில் இடப்பட்ட வித்துகளின் எண்ணிக்கையின் என்ன சதவீதம் என்பதை விஞ்ஞானக் கணிகருவியைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

3. நிமலனின் சம்பளம் 12% இனால் அதிகரித்தது. அது அதிகரிப்பதற்கு முன்னர் நிமலனின் சம்பளம் ரூ 45 200 எனின், அதிகரித்த பின் நிமலனின் சம்பளம் எவ்வளவு?

4. $a = 1.33^2$ எனின், a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. $p = \sqrt{18.49 - 2}$ ஆகும். p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



மேலதிக அறிவிற்கு

$\sqrt{4^2 + 3^2}$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குச் சாவிகளைத் தொழிற்படுத்த வேண்டிய ஒழுங்குமுறை

$\boxed{\text{ON}} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \boxed{(} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{+} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{)} \rightarrow \boxed{=} \boxed{5}$ ஆகும்.

12 சுட்டிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- வலுக்களைப் பெருக்குதல், வலுக்களை வகுத்தல், வலுவின் வலு ஆகிய ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்துக்குமுரிய சுட்டி விதிகளை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- மேற்குறித்த சுட்டி விதிகளைப் பயன்படுத்தி அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்
- பூச்சியச் சுட்டியையும் மறைச் சுட்டியையும் அறிந்துகொள்வதற்கும் அவற்றுக்குரிய அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள.

சுட்டிகள்

நீங்கள் இதற்கு முன்னைய வகுப்புகளில் 2^1, 2^2, 2^3 போன்ற எண்களின் வலுக்கள் பற்றிக் கற்றுள்ளீர்கள் அவற்றின் பெறுமானங்களை இவ்வாறு காணலாம்.

$$\begin{aligned}2^1 &= 2\\ 2^2 &= 2\times 2 = 4\\ 2^3 &= 2\times 2\times 2 = 8\\ &\vdots\end{aligned}$$

இவ்வாறே, x^1, x^2, x^3 போன்ற அட்சரகணிதக் குறியீடுகளைக் கொண்ட வலுக்கள் பற்றியும் கற்றுள்ளீர்கள். அவற்றையும் கீழே உள்ளவாறு விரித்து எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}x^1 &= x\\ x^2 &= x\times x\\ x^3 &= x\times x\times x\\ &\vdots\end{aligned}$$

இவ்வாறே எண்களினதும் அட்சரகணித உறுப்புகளினதும் வலுக்கள் பெருக்கப்பட்டிருக்கும்போதும் அவற்றை விரித்து எழுதும் முறையை நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். உதாரணமாக

$5^2 a^3 b^2 = 5\times 5\times a\times a\times a\times b\times b$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறே $(xy)^2$ என்னும் வடிவத்திலான ஒரு பெருக்கத்தின் வலுவை $x^2 y^2$ என வலுக்களின் பெருக்கமாகக் காட்ட முடியும் எனவும் $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ என்னும் வடிவத்திலான ஒரு வகுத்தலின் வலுவை $\frac{x^2}{y^2}$ எனக் காட்ட முடியும் எனவும் கற்றுள்ளீர்கள்.

இவ்விடயங்களை மேலும் நினைவுகூர்வதற்குத் தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) 2^5 (ii) $(-3)^2$ (iii) $(-4)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ (v) $(-3)^3$ (vi) $(-4)^3$

2. கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(i) $(xy)^2 = (xy) \times ....$
$= .... \times .... \times x \times y$
$= x \times x \times .... \times ....$
$= x^2 \times y^2$

(ii) $(pq)^3 = ... \times .... \times ....$
$= p \times q \times .... \times .... \times .... \times ....$
$= p \times p \times p \times ... \times ... \times ....$
$= p^3 \times q^3$

(iii) $(2ab)^2 = ... \times ....$
$= .... \times .... \times a \times .... \times .... \times b$
$= 2 \times 2 \times .... \times .... \times .... \times ....$
$= 4a^2 \times b^2$

(iv) $9p^2q^2 = ...^2 \times p^2 \times q^2$
$= .... \times .... \times p \times p \times .... \times ....$
$= (3 \times p \times q) \times (.... \times .... \times ....)$
$= (3pq)^2$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கோவையையும் பெருக்கமாக விரித்து எழுதுக.

(i) $2a^2$ (ii) $3x^2y^2$ (iii) $-5p^2q$

(iv) $(-3)^5$ (v) $(ab)^3$ (vi) $x^4 \times y^4$

12.1 சமமான அடிகளை உடைய வலுக்களைப் பெருக்குதல்

2^3, 2^5 ஆகியன சமமான அடியை உடைய இரண்டு வலுக்களாகும்.

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ எனவும்

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ எனவும் விரித்து எழுதலாம்.

இந்த இரண்டு வலுக்களினதும் பெருக்கத்தைப் பெறுவோம்.

$$2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^8$$

2^3 இல் 2 ஆனது மீண்டும் மீண்டும் மூன்று தடவைகளும்

2^5 இல் 2 ஆனது மீண்டும் மீண்டும் ஐந்து தடவைகளும் பெருக்கப்படுவதால்

அவை இரண்டும் பெருக்கப்படும்போது 2 ஆனது மீண்டும் மீண்டும் $(3 + 5 =)$ 8 தடவைகள் பெருக்கப்படுகின்றது.

இதனை இவ்வாறு எழுதுலாம்.

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8.$$

அடிகள் சமனாகவுள்ள இரண்டு வலுக்கள் பெருக்கப்படும்போது அவற்றின் சுட்டிகள் கூட்டப்படும். அத்துடன் பெறப்படும் வலுவும் அதே அடியைக் கொண்டிருக்கும்.

இதற்கேற்ப $x^3 \times x^5$ இன் பெருக்கத்தைப் பெற்றுக் கொள்வோம்.
x^3, x^5 ஆகியன ஒரே அடியில் இருப்பதால் பெருக்கத்தைப் பெறுவதற்குச் சுட்டிகளைக் கூட்ட முடியும்.

$$\begin{aligned} x^3 \times x^5 &= x^{3+5} \\ &= x^8 \end{aligned}$$

இதனை ஒரு சுட்டி விதியாக இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

இவ்விதியை எத்தனை வலுக்களுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம். உதாரணமாக

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

கோவைகளைச் சுருக்கும்போது இவ்விதியைப் பயன்படுத்தும் முறையை உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக.

(i) $x^2 \times x^5 \times x$ (ii) $a^2 \times b^2 \times a^2 \times b^3$ (iii) $2x^2 \times 3x^5$

(i) $x^2 \times x^5 \times x = x^{2+5+1}$ ($x = x^1$ ஆகையால்)
$= x^8$

(ii) $$\begin{aligned} a^2 \times b^2 \times a^2 \times b^3 &= a^2 \times a^2 \times b^2 \times b^3 \\ &= a^{2+2} \times b^{2+3} \\ &= a^4 \times b^5 \\ &= a^4 b^5 \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} 2x^2 \times 3x^5 &= 2 \times x^2 \times 3 \times x^5 \\ &= 2 \times 3 \times x^2 \times x^5 \\ &= 6x^{2+5} \\ &= 6x^7 \end{aligned}$$

வலுக்களைப் பெருக்குவதற்கான சுட்டி விதியைப் பயன்படுத்திக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிகளில் ஈடுபடுக.

பயிற்சி 12.1

1. வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) $2^5 \times 2^2 = 2^{\cdots + \cdots}$
$= 2^{\cdots}$

(ii) $x^4 \times x^2 = x^{\cdots + \cdots}$
$= x^{\cdots}$

(iii) $a^3 \times a^4 \times a = a^{\cdots + \cdots + \cdots}$
$= a^{\cdots}$

(iv) $5p^3 \times 3p = 5 \times .... \times 3 \times ....$
$= 15p^{.... + ...}$
$=15....$

(v) $x^2 \times y^3 \times x^5 \times y^5 = x^{....} \times x^{....} \times y^{....} \times y^{....}$
$= x^{.... + ...} \times y^{.... + ...}$
$= x^{....} \; y^{....}$

2. நிரல் A இலுள்ள ஒவ்வொரு கோவையினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமான கோவையை நிரல் B இல் தெரிந்து இணைக்க.

A	B
$x^3 \times x^7$	x^7
$x^5 \times x^2 \times x$	x^8
$x^7 \times x$	x^9
$x^2 \times x^2 \times x^6$	x^{10}
$x^2 \times x^3 \times x^2 \times x$	

3. சுருக்கிப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $3^4 \times 3^3$ (ii) $7^2 \times 7^3 \times 7$

4. சுருக்குக.

(i) $x^3 \times x^6$ (ii) $x^2 \times x^2 \times x^2$
(iii) $a^3 \times a^2 \times a^4$ (iv) $2x^3 \times x^5$
(v) $5p^2 \times 2p^3$ (vi) $4x^2 \times 2x \times 3x^5$
(vii) $m^2 \times 2n^2 \times m \times n$ (viii) $2a^2 \times 3b^2 \times 5a \times 2b^3$

5. $x^m \times x^n = x^8$ என்னும் சமன்பாடு உண்மையாவதற்கு m, n ஆகியன எடுக்கத்தக்க ஓர் எண் பெறுமானச் சோடி 3, 5 ஆகும். இவ்வாறு அமையத்தக்க நேர் நிறைவெண் பெறுமானச் சோடிகள் அனைத்தையும் எழுதுக.

6. $a^2 + a^3 = a^5$ என்னும் கோவை பொய்யாகும் a இன் ஒரு பெறுமானத்தையும் மெய்யாகும் a இன் ஒரு பெறுமானத்தையும் தருக.

12.2 சமமான அடிகளை உடைய வலுக்களை வகுத்தல்

சமமான அடிகளையுடைய வலுக்களைப் பெருக்கும்போது உள்ளது போன்று வகுக்கும் போதும் சுட்டிகளுக்கிடையில் தொடர்பு ஒன்று உண்டா எனப் பார்ப்போம்.

$x^5 \div x^2$ என்பதை $\dfrac{x^5}{x^2}$ எனவும் எழுதலாம்.

அப்போது $\frac{x^5}{x^2} = \frac{x \times x \times x \times x \times x}{x \times x}$

$= x \times x \times x$
$= x^3$

$\therefore \ \frac{x^5}{x^2} = x^3$ ஆகும். தொகுதியில் உள்ள வலுவின் சுட்டி 5 ஆகவும் பகுதியில் உள்ள வலுவின் சுட்டி 2 ஆகவும் இருக்கும்போது வகுப்பதால் கிடைக்கும் விடையில் x இன் அடியின் சுட்டி $5 - 2 = 3$ ஆகும்.

எனவே $x^5 \div x^2 = x^{5-2}$
$= x^3$

என இலகுவில் சுருக்கலாம்.

அடிகள் சமனாகவுள்ள வலுக்களை வகுக்கும்போது சுட்டியானது வகுபடுமெண்ணின் சுட்டியிலிருந்து வகுக்கும் எண்ணின் சுட்டியைக் கழித்து பெறப்படும். அத்துடன் பெறப்படும் வலுவும் அதே அடியைக் கொண்டிருக்கும்.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

இதுவும் சுட்டிகள் பற்றிய ஒரு விதி என்பதை நினைவில் வைத்திருப்பது முக்கியமாகும். கோவைகளைச் சுருக்குவதற்காக அவ்விதியைப் பயன்படுத்தும் முறையை உதாரணங்களின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக.

(i) $x^5 \times x^2 \div x^3$ (ii) $4x^8 \div 2x^2$ (iii) $\frac{a^3 \times a^2}{a}$

(i) $(x^5 \times x^2) \div x^3 = x^{5+2} \div x^3$
$= x^{7-3}$
$= x^4$

(ii) $4x^8 \div 2x^2 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^8}{\underset{1}{\cancel{2}}x^2}$
$= 2x^{8-2}$
$= 2x^6$

(iii) $\frac{a^3 \times a^2}{a} = a^{3+2-1}$
$= a^4$

தற்போது இவை தொடர்பான பயிற்சியில் ஈடுபடுவோம்.

பயிற்சி 12.2

1. சுட்டி விதிகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

(i) $a^5 \div a^3$ (ii) $\frac{x^7}{x^2}$ (iii) $2x^8 \div x^3$ (iv) $4p^6 \div 2p^3$

(v) $\frac{10m^5}{2m^2}$ (vi) $\frac{x^2 \times x^4}{x^3}$ (vii) $n^5 \div (n^2 \times n)$ (viii) $\frac{2x^3 \times 2x}{4x}$

(ix) $\frac{x^5 \times x^2 \times 2x^6}{x^7 \times x^2}$ (x) $\frac{a^5 \times b^3}{a^2 \times b^2}$ (xi) $\frac{2p^4 \times 2q^3}{p \times q}$

2. $a^m \div a^n = a^8$ என்னும் சமன்பாடு உண்மையாவதற்கு m, n ஆகியவை எடுக்கத்தக்க நேர்நிறைவெண் பெறுமானச் சோடிகள் ஐந்தை எழுதுக.

3. நிரல் A இலுள்ள ஒவ்வொரு அட்சரகணிதக் கோவைக்கும் சமனாக உள்ள அட்சரகணிதக் கோவையை நிரல் B இலிருந்து தெரிந்தெடுத்து இரண்டு கோவைகளுக்குமிடையில் ' = ' அடையாளத்தை இட்டு மீண்டும் எழுதுக.

A	B
(i) $2a^5 \div 2a^2$	a
(ii) $a^6 \div a^4$	a^2
(iii) $\frac{a^7 \times a^2}{a^6}$	a^3
(iv) $\frac{a^3}{a}$	
(v) $\frac{4a^5 \times a}{4a^3}$	

12.3 மறைச் சுட்டி

$x^5 \div x^2 = x^3$ என இப்பாடத்தில் முன்னர் நாம் கற்றோம்.

அது $\frac{\cancel{x}^1 \times \cancel{x}^1 \times x \times x \times x}{\cancel{x}_1 \times \cancel{x}_1} = x^3$ என விரித்து எழுதுவதன் மூலமும் பெறப்படும் என்பதை அறிவோம்.

இம்முறையில்

$x^2 \div x^5$ ஐச் சுருக்குவோம்.

(i) விரித்து எழுதுவதன் மூலம்

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{\cancel{x}^1 \times \cancel{x}^1}{\cancel{x}^1 \times \cancel{x}^1 \times x \times x \times x}$$

$$= \frac{1}{x^3}$$

(ii) சுட்டி விதியின் மூலம்

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5}$$

$$= x^{-3}$$

$x^2 \div x^5$ இற்கு (i), (ii) ஆகிய இரண்டு முறைகளிலும் பெறப்பட்டுள்ள இரண்டு விடைகளும் சமனாக வேண்டும்.

எனவே $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ ஆக வேண்டும். இங்கு பகுதியிலுள்ள வலுவின் சுட்டியின் குறி மாறித் தொகுதிக்கு வந்துள்ளது என்பதையும் புரிந்து கொள்க.

இது சுட்டி தொடர்பான முக்கியமான ஒரு பண்பாகும். மறைச் சுட்டி வடிவத்தில் உள்ள வலு ஒன்றை நேர்ச் சுட்டியாக எழுதிக் கொள்வதற்கான தேவை ஏற்படும்போது இப்பண்பைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

இதே முறையில் $x^3 = \frac{1}{x^{-3}}$ எனவும் எழுதலாம். இவ்வாறு நடைபெறுவதற்கான காரணத்தை விளங்கிக் கொள்வதற்காக $\frac{x^5}{x^2}$ என்னும் இரு கோவைகளையும் மேற்குறித்த உதாரணத்திலுள்ளவாறு வெவ்வேறாகச் சுருக்கலாம்.

இவ்விதியை இவ்வாறு காட்டலாம்.

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

இதற்கேற்ப

- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $\frac{a^m}{1} = \frac{1}{a^{-m}}$
- $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^m}$ (இரண்டு வலுக்களுக்கும் மேற்குறித்த பண்பை ஒரே தடவையில் பிரயோகிப்பதால்)

அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்குச் சுட்டிகளின் இப்பண்பைப் பயன்படுத் தலாம். கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களின் மூலம் இதனைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) 2^{-5} (ii) $\frac{1}{5^{-2}}$

(i) $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$

$= \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= \frac{1}{32}$

(ii) $\frac{1}{5^{-2}} = 5^2$

$= 25$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{2x^{-2} \times 2x^3}{2x^{-4}}$

$\frac{2x^{-2} \times 2x^3}{2x^{-4}} = \frac{2 \times x^{-2} \times 2 \times x^3}{2 \times x^{-4}}$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times x^4 \times 2 \times x^3}{\underset{1}{\cancel{2}} \times x^2}$ ($x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{-4}} = x^4$ எனக் கொள்வதால்)

$= \frac{2x^7}{x^2}$

$= 2x^{7-2}$

$= 2x^5$

பயிற்சி 12.3

1. நேர்ச் சுட்டியில் எழுதுக.

(i) 3^{-4} (ii) x^{-5} (iii) $2x^{-1}$ (iv) $5a^{-2}$ (v) $5p^2q^{-2}$

(vi) $\frac{1}{x^{-5}}$ (vii) $\frac{3}{a^{-2}}$ (viii) $\frac{2x}{x^{-4}}$ (ix) $\frac{a}{2b^{-3}}$ (x) $\frac{m}{(2n)^{-2}}$

(xi) $\frac{t^{-2}}{m}$ (xii) $\frac{p}{q^{-2}}$ (xiii) $\frac{x^{-2}}{2y^{-2}}$ (xiv) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^{-2}$

2. பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) 2^{-2} (ii) $\frac{1}{4^{-2}}$ (iii) 2^{-7} (iv) $(-4)^{-3}$ (v) 3^{-2}

(vi) $\frac{5}{5^{-2}}$ (vii) 10^{-3} (viii) $\frac{3^{-2}}{4^{-2}}$

3. சுருக்கி விடையை நேர்ச் சுட்டியில் தருக.

(i) $a^{-2} \times a^{-3}$ (ii) $a^2 \times a^{-3}$ (iii) $\dfrac{a^2}{a^{-5}} \times a^{-8}$ (iv) $2a^{-4} \times 3a^2$

(v) $3x^{-2} \times 4x^{-2}$ (vi) $\dfrac{10x^{-5}}{5x^2}$ (vii) $\dfrac{4x^{-3} \times x^{-5}}{2x^2}$ (viii) $\dfrac{(2p)^{-2} \times (2p)^3}{(2p)^4}$

12.4 பூச்சியச் சுட்டி

சுட்டி 0 ஆகவுள்ள ஒரு வலு பூச்சியச் சுட்டியான வலு எனப்படும். 2^0 என்பது அவ்வாறன பூச்சியச் சுட்டியுடனான ஒரு வலுவாகும்.

$x^5 \div x^5$ ஐச் சுட்டி விதிக்கேற்பச் சுருக்கும்போது,

$$x^5 \div x^5 = x^{5-5} = x^0$$

அதனை விரித்தெழுதிச் சுருக்கும்போது $x^5 \div x^5 = \dfrac{x \times x \times x \times x \times x}{x \times x \times x \times x \times x}$

$= 1$

$x^5 \div x^5$ என்பதை இரண்டு முறைகளிலும் சுருக்கும்போது பெறப்படும் விடை சமனாக வேண்டும் என்பதால் $x^0 = 1$ ஆகும்.

x பூச்சியமல்லாதபோது $x^0 = 1$ ஆகும்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்கும்போது இது பயன்படுத்தப்படும்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக.

(i) $\dfrac{x^0 \times x^7}{x^2}$ (ii) $\left(\dfrac{x^5 \times x^2}{a}\right)^0$

(i) $\dfrac{x^0 \times x^7}{x^2} = 1 \times x^7 \div x^2$

$= 1 \times x^{7-2}$

$= x^5$

(ii) $\left(\dfrac{x^5 \times x^2}{a}\right)^0 = 1$

(அடைப்பினுள்ளே உள்ள முழுக் கோவையும் அடியாகக் கருதப்பட்டு அதன் சுட்டி 0 ஆக இருப்பதனால் அதன் பெறுமானம் 1 ஆகும்.)

பூச்சியச் சுட்டியான வலுக்களைக் கொண்ட கோவைகளைச் சுருக்குவதைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியின் மூலம் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வோம்.

பயிற்சி 12.4

1. சுருக்குக.

(i) $x^8 \div x^8$ (ii) $(2p)^4 \times (2p)^{-4}$ (iii) $\dfrac{a^2 \times a^3}{a \times a^4}$

(iv) $\dfrac{y^4 \times y^2}{y^6}$ (v) $\dfrac{p^3 \times p^5 \times p}{p^6 \times p^3}$ (vi) $\dfrac{x^{-2} \times x^{-4} \times x^6}{y^{-2} \times y^8 \times y^{-6}}$

2. பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $2^0 \times 3$ (ii) $(-4)^0$ (iii) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^0 + 1$ (iv) $\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^0$

(v) $5^0 + 1$ (vi) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ (vii) $(2ab)^0 - 2^0$ (viii) $(abc)^0$

12.6 வலுவின் வலு

$(x^2)^3$ என்பது x^2 என்னும் வலுவின் மூன்றாம் வலுவாகும். இவ்வாறான வலுக்கள் வலுவின் வலு என அழைக்கப்படும். இதனை, இவ்வாறு சுருக்கலாம்.

$$x^2 \times x^2 \times x^2 = (x \times x) \times (x \times x) \times (x \times x)$$
$$= x \times x \times x \times x \times x \times x$$
$$= x^6$$

எனவே $(x^2)^3 = x^6$ ஆகும்.

இந்த 6 பெறப்படுவது 2 கள் 3 இலிருந்து என்பதை அதாவது 2×3 இலிருந்து என்பதை அவதானிக்க. அதாவது

$(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6$ என எழுதலாம்.

வலுவின் வலுவாக உள்ள ஒரு கோவையைச் சுருக்கும்போது சுட்டிகளை ஒன்றோடொன்று பெருக்கலாம். இதுவும் ஒரு சுட்டி விதியாகக் கருதப்படுகின்றது.

அதாவது $\boxed{(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}}$

உதாரணம் 6

சுருக்குக.

(i) $(a^5)^2 \times a$ (ii) $(p^3)^4 \times (x^2)^0$ (iii) $(2x^2y^3)^2$

(i) $(a^5)^2 \times a = a^{5\times 2} \times a$
$= a^{10} \times a^1$
$= a^{10+1}$
$= a^{11}$

(ii) $(p^3)^4 \times (x^2)^0 = p^{3\times 4} \times (x^2)^{\times 0}$
$= p^{12} \times 1$
$= p^{12}$

(iii) $(2x^2y^3)^2 = (2 \times x^2 \times y^3)^2$
$= 2^2 \times x^4 \times y^6$
$= 4\,x^4\,y^6$

வலுவின் வலுவைக் கொண்டு கோவைகளைச் சுருக்குவதைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிகளின் மூலம் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வோம்.

பயிற்சி 12.5

1. பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $(2^4)^2$ (ii) $(3^2)^{-1}$ (iii) $(2^3)^2 + 2^0$

(iv) $(5^2)^{-1} + \frac{1}{5}$ (v) $(4^0)^2 \times 1$ (vi) $(10^2)^2$

2. விடையைச் சுருக்கி நேர்ச் சுட்டியுடன் தருக.

(i) $(x^3)^4$ (ii) $(p^{-2})^2$ (iii) $(a^2\,b^2)^2$ (iv) $(2x^2)^3$

(v) $\left(\frac{x^5}{x^2}\right)^3$ (vi) $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2$ (vii) $\left(\frac{m^3}{n^2}\right)^{-2}$ (viii) $(y^4)^{\frac{1}{2}}$

(ix) $(p^{-2})^{-4}$ (x) $(a^0)^2 \times a$

பலவினப் பயிற்சி

1. பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $5^3 \times 5^2$ (ii) $5^3 \div 5^2$ (iii) $5^3 \times 5^2$ (iv) $5^0 \times 5 \times 5^2$

(v) $(5^{-1})^2$ (vi) $(5^{-1})^0$ (vii) $\{(5^2)^3\}^4$ (viii) $\frac{5^3 \times 5^{-1}}{(5^2)^2}$

(ix) $5^2 \div 10^2$ (x) $5^2 \times 10^3 \times 5^{-1} \times 10^{-2}$

2. சுருக்குக.

(i) $(2x^5)^2$ (ii) $(2ab^2)^3$ (iii) $2x \times (3x^2)^2$

(iv) $\frac{(4p^2)^3}{(2p^2q)^2}$ (v) $\frac{(2p^2)^3}{3pq}$ (vi) $\frac{(2a^2)^2}{5b^3} \times \frac{(3b^2)^2}{2a}$

பொழிப்பு

இந்தப் பாடத்தில் கீழ்வரும் சுட்டி விதிகளைக் கற்றுள்ளோம்.

- அடிகள் சமனாகவுள்ள வலுக்கள் பெருக்கப்படும்போது சுட்டிகள் கூட்டப்படும்.
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

- அடிகள் சமானாகவுள்ள வலுக்கள் வகுக்கப்படும்போது சுட்டிகள் கழிக்கப்படும்.
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

- பூச்சியமல்லாத எந்தவோர் எண்ணினதும் பூச்சியச் சுட்டி 1 ஆகும்.

- வலு ஒன்றின் வலுவைக் காணும்போது சுட்டிகள் பெருக்கப்படும்.
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

- மறைச் சுட்டியை நேர்ச் சுட்டியாக மாற்றுவதற்கு அதன் நேர்மாறாக சுட்டியின் குறி மாற்றி எழுதப்படும்.
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

13 மட்டந்தட்டலும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடும்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

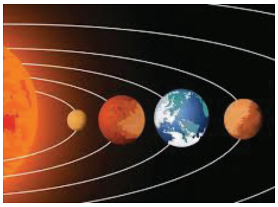
- விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீட்டை இனங்காண்பதற்கும் மில்லியன் வலயம் வரையுள்ள எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுவதற்கும்
- விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் காட்டப்பட்ட எண் ஒன்றைச் சாதாரண வடிவத்தில் மாற்றி எழுதுவதற்கும்
- எண் ஒன்றை மட்டந்தட்டும்போது பயன்படுத்தும் விதிமுறைகளை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- தரப்பட்ட எண் ஒன்றைக் கிட்டிய பத்துக்கு, கிட்டிய நூறுக்கு, கிட்டிய ஆயிரத்துக்கு, தரப்பட்ட கிட்டிய தசம எண் ஒன்றுக்கு மட்டந்தட்டுவதற்கும்
- மட்டந்தட்டல் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அறிமுகம்

- டைனசோர்கள் இற்றைக்கு 140 000 000 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் புவியில் வாழ்ந்ததாக விஞ்ஞானிகள் கருதுகின்றனர்.

- ஐதரசன் அணுவின் அணுவாரை 0.000 000 000 053 m ஆகும்.
- சூரியனிலிருந்து புவிக்கு உள்ள தூரம் ஏறக்குறைய 149 600 000 000 m ஆகும்.



- ஒளியின் வேகம் செக்கனுக்கு 299 790 000 m ஆகும்.

தகவல்களை வெளிப்படுத்துவதற்காக எண்களைப் பயன்படுத்தியுள்ள நான்கு சந்தர்ப்பங்கள் மேலே தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் இறுதித் தகவல்கள் இரண்டையும் கொண்டு சூரியனிலிருந்து ஒளிக்கதிர் புவியை அடைய எடுக்கும் காலத்தைக் கணிப்போம்.

அக்காலம் = 149 600 000 000 ÷ 299 790 000 செக்கன்கள் ஆகும்.

இவ்வொவ்வோர் எண்ணும் அதிக இலக்கங்களைக் கொண்டிருப்பதால் எண் வடிவம் நீண்டுள்ளது. எழுதுவதற்கு அதிக இடத்தைப் பிடிக்கின்றது. அத்தோடு எண்ணுவதும் சிரமமானதாகும். ஒரு கணிகருவியைப் பயன்படுத்தும்போதுகூட அதன் திரையில் காட்டக்கூடிய இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை குறைவானதான இருப்பதனால் இக்கணித்தலுக்காகச் சாதாரண கணிகருவி ஒன்றைப் பயன்படுத்துவது சிரமமானதாகும். எனவே இவ்வாறான எண்களை எழுதுவதற்கும் இவை அடங்கிய கணித்தல்களை இலகுவாக்குவதற்கும் இவற்றை வேறொரு முறையில் எழுதுவதற்கான தேவை ஏற்படுகின்றது.

இப்பாடத்தில் இவ்வெண்களைப் பயன்படுத்துவதற்கு இலகுவான முறையில் எழுதக்கூடிய ஒரு முறை பற்றிக் கற்போம். இதற்காக முன்னர் கற்றுள்ள அதற்கான விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியில் ஈடுபடுவோம்.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே உள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

எண்	10 இன் வலுவாக
1	$1 = 10^0$
10	$10 = 10^1$
100	$10 \times 10 = 10^{\cdots}$
1000	.... × .... ×......... = $10^{\cdots}$
10000	.... = $10^{\cdots}$
100000	.... = ...
....	.... = 10^6
....	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ ....

2. பின்வரும் எண்களைக் கீழே தரப்பட்ட அட்டவணையில் உள்ள அறிவுறுத்தல் களுக்கு ஏற்பப் பொருத்தமாக இடுக.

5.37, 87.5, 0.75, 4.02, 1.01, 10.1, 4575, 0.07, 9, 12.3, 2.7, 9.9

1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையில் உள்ள எண்கள்	
1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையில் அமையாத எண்கள்	

13.1 விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு

> இம்முறை க.பொ.த. (சா/த)ப் பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 7 00 000 ஐ விட அதிகமாக இருக்கும்.
>
> \- ஒரு செய்தி

இச்செய்தியில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள ஆறு இலக்கங்களைக் கொண்ட ஓர் எண்ணைப் பின்வரும் முறைகளில் எழுதலாம்.

(i) $700 \times 1000 \longrightarrow 700 \times 10^3$

(ii) $70 \times 10\,000 \longrightarrow 70 \times 10^4$

(iii) $\boxed{7 \times 100\,000 \longrightarrow 7 \times 10^5}$

இவற்றுள் இறுதியாக எழுதப்பட்ட முறையே பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப் படுகின்றது. இது இரண்டு பகுதிகளின் பெருக்கமாகும். அதன் முற்பகுதி 1 இலிருந்து 10 இற்கு இடைப்பட்ட ஓர் எண் ஆவதோடு இரண்டாம் பகுதி 10 இன் வலுவாகும்.

$$7 \times 10^5$$

1 அல்லது 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்   10 இன் வலு

இவ்வாறு 1 இலிருந்து 10 இற்கு இடைப்பட்ட எண் ஒன்றினதும் 10 இன் வலுவினதும் பெருக்கமாகக் காண்பிக்கும் முறை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு எனப்படும்.

> A என்பது 1 அல்லது 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணாகவும் n என்பது ஒரு நிறைவெண்ணாகவும் இருக்குமெனின், விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் $A \times 10^n$ என்னும் வடிவத்தில் குறிக்கலாம். (இங்கு $1 \leq A < 10$ ஆகும்.)

280 000 ஐ விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுவோம்.
280 000 இன் இலக்கங்களை உபயோகித்து இதனை 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணாக எழுதும்போது 2.8 பெறப்படும்.

$$\therefore\ 280\,000 = 2\ 80000.$$
$$= 2.8 \times 10\,0000$$
$$= 2.8 \times 10^5$$

ஆகவே 280 000 என்பது விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் 2.8×10^5 என எழுதப்படும்.

உதாரணம் 1

பின்வரும் எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.

(i) 20 000 (ii) 4240 (iii) ஒரு மில்லியன் (iv) 3.47
(v) 34.7 (vi) 6 (vii) 289.325 (viii) 2491.32

(i) $20\ 000 = 2.0 \times 10\ 000$
$= 2 \times 10^4$

(ii) $4240 = 4.24 \times 1000$
$= 4.24 \times 10^3$

(iii) ஒரு மில்லியன் $= 1000\ 000$
$= 1 \times 10^6$

(iv) $3.47 = 3.47 \times 1$
$= 3.47 \times 10^0$ ($1 = 10^0$ ஆகையால்)

(v) $34.7 = 3.47 \times 10$
$= 3.47 \times 10^1$

(vi) $6 = 6 \times 1$
$= 6 \times 10^0$

(vii) $289.325 = 2.89325 \times 100$
$= 2.89325 \times 10^2$

(viii) 2491.32
$2491.32 = 2.49132 \times 10^3$
தசமதானம் 3 இலக்கம் இடப் பக்கம் நகர்த்தப்படுதல் 2.49132×10^3 ஆகும்.

பயிற்சி 13.1

1. தரப்பட்ட உதாரணங்களுக்கேற்ப அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

எண்	1 அல்லது 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட எண் × 10 இன் ஒரு வலு	விஞ்ஞான முறைக் குறிப்பீடு
48	4.8×10	4.8×10^1
8 99 78		
548	5.48×100	5.48×10^2
999 401 111		
34 700	3.47×10000	3.47×10^4
54 200 49 40000 10 00000		

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எண்களையும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.

(i) 74300 (ii) 5290 (iii) 200 (iv) 4 340 000

(v) 6581200 (vi) 1010 (vii) 254 (viii) 18.5

(ix) 7.34 (x) 715.8

3. இலங்கை தொடர்பான சில முக்கிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அத்தகவல்களில் உள்ள எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுக.
- பீதுருதாலகால மலையின் உயரம் 2524 மீற்றர் ஆகும்.
- சிங்கராஜ வனத்தின் பரப்பளவு 9300 ஹெக்ரெயர் ஆகும்.
- மகாவலி கங்கையின் நீளம் 335 கிலோமீற்றர் ஆகும்.
- இலங்கையின் நிலப்பரப்பு 65610 சதுரக் கிலோமீற்றர் ஆகும்.

13.2 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடையிலுள்ள எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுதல்

பின்வரும் கோலத்தின் மீது கவனம் செலுத்துக.

$10\,000 = 10^4$

$1000 = 10^3$

$100 = 10^2$

$10 = 10^1$

$1 = 10^0$

$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$

$0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

$0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

0.1 என்பதை 10 இன் வலுவாக எழுதும்போது அதன் சுட்டி -1 உம்

0.01 என்பதை 10 இன் வலுவாக எழுதும்போது அதன் சுட்டி -2 உம்

0.001 என்பதை 10 இன் வலுவாக எழுதும்போது அதன் சுட்டி -3 உம் ஆகும் என்பது தெளிவாகும்.

0.75 என்பது 1 இலும் சிறிய ஓர் எண்ணாகும். அதனை 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணாக மாற்றி எழுதும்போது 7.5 என எழுதி 10 ஆல் வகுக்க வேண்டும். இதனைக் கணிதரீதியில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

$0.75 \times 10 = 7.5$ ஆகையால்

$$0.75 = \frac{7.5}{10}$$

$$= \frac{7.5}{10^1} \quad (10 = 10^1 \text{ ஆகையால்})$$

$$= 7.5 \times 10^{-1} \quad \left(\frac{1}{10^1} = 10^{-1} \text{ ஆகையால்}\right)$$

இதற்கேற்ப 0.75 என்னும் எண் 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணினதும் 10 இன் வலுவினதும் பெருக்கமாக எழுதப்பட்டுள்ளது.

$\therefore$ 0.75 என்பது விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் 7.5×10^{-1} என எழுதப்படும்.

இவ்விதமாக 0.0034 ஐயும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதுவோம்.

$0.0034 \times 1000 = 3.4$ என்பதால்

$$0.0034 = \frac{3.4}{1000}$$

$$= \frac{3.4}{10^3}$$

$$= 3.4 \times 10^{-3}$$

குறிப்பு

0 இற்கும் 1 இற்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதும்போது 10 இன் வலு மறைச் சுட்டியாக அமையும்.

உதாரணம் 1

பின்வரும் எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் தருக.

a. 0.8453 **b.** 0.047 **c.** 0.000017

a. $0.8453 = 8.453 \div 10$

$$= \frac{8.453}{10}$$

$$= \frac{8.453}{10^1}$$

$$= 8.453 \times 10^{-1}$$

b. $0.047 = 4.7 \div 100$

$$= \frac{4.7}{100}$$

$$= \frac{4.7}{10^2}$$

$$= 4.7 \times 10^{-2}$$

c. $0.000017 = 1.7 \div 100000$

$$= \frac{1.7}{10^5}$$

$$= \frac{1.7}{10^5}$$

$$= 1.7 \times 10^{-5}$$

பயிற்சி 13.2

1. பின்வரும் அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

	0 இற்கும் 1 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்	1 அல்லது 1 இற்கும் 10 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணாக எழுதும்போது	விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு
(i)	0.041	$\frac{4.1}{100} = \frac{4.1}{10^2}$	4.1×10^{-2}
(ii)	0.059		
(iii)	0.0049		
(iv)	0.000 135	$\frac{1.35}{10000} = \frac{1.35}{10^4}$	.... $\times 10^{-4}$
(v)	0.000 005		
(vi)	0.000 003 9		
(vii)	0.111345		

2. பின்வரும் எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் தருக.

(i) 0.543 (ii) 0.00095 (iii) 0.0019

(iv) 0.08 (v) 0.0004 (vi) 0.000 000 054

3. பின்வரும் எண்களை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் தருக.

(i) அணுவொன்றின் ஆரை 0.000 000 01 cm ஆகும்.

(ii) ஒரு கன சென்றிமீற்றரிலுள்ள வளியின் திணிவு 0.00129 g ஆகும்.

(iii) ஒரு கன சென்றிமீற்றரிலுள்ள ஐதரசனின் திணிவு 0. 000 088 9 g ஆகும்.

13.3 விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் உள்ள எண்களைச் சாதாரண வடிவத்தில் தருதல்

உதாரணமாக விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் 5.43×10^4 என எழுதப்பட்ட ஓர் எண்ணைச் சாதாரண வடிவத்தில் எழுதுவோம்.

முறை I

$$5.43 \times 10^4 = 5.43 \times 10000$$
$$= 54\,300$$
$$\therefore 5.43 \times 10^4 = 54\,300$$

முறை II

10^4 இனால் பெருக்கப்படுவதால் 4 தானங்கள் வலப்பக்கமாக தசமப் புள்ளி நகர்ந்து, 54300 பெறப்படும்.

54300.

இன்னுமொரு உதாரணம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அதில் 10 இன் வலு மறைச் சுட்டியாக அமைந்துள்ளது.
5.43×10^{-4} ஐச் சாதாரண வடிவத்தில் தருக.

முறை I

$$5.43 \times 10^{-4} = 5.43 \times \frac{1}{10^4}$$
$$= 5.43 \div 10000$$
$$= 0.000543$$

முறை II

10^4 இனால் வகுபடுவதால் 5.43 இன் தசமப் புள்ளி இடப்பக்கமாக 4 தானங்கள் நகர்த்தப்பட்டு 0.000543 எனப் பெறப்படும்.

.000543

உதாரணம் 1

விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் உள்ள எண்களைச் சாதாரண வடிவத்தில் தருக.

i. 8.9×10^3 **ii.** 8.9×10^{-3}

i. $8.9 \times 10^3 = 8.9 \times 1000$
$= 8900$ 8900.

ii. $8.9 \times 10^{-3} = 8.9 \times \frac{1}{10^3}$
$= 0.0089$ 0.0089

இங்கு உதாரணமாக 8.9×10^3 என்பதை நேரடியாக 8900 என எழுதலாம். 10 இன் வலு நேர் நிறைவெண்ணாக இருந்தால் அவ்வெண்ணுக்குச் சமனாகத் தசமப் புள்ளியை வலப் பக்கமாக நகர்த்த வேண்டும். (தேவையானபோது பூச்சியங்களை இணைக்க வேண்டும்.)

10 இன் வலு நேராக உள்ளபோது தசமம் வலப் பக்கமாகவும் 10 இன் வலு மறையாக உள்ளபோது தசமம் இடப் பக்கமாகவும் நகர்த்தப்படும்.

பயிற்சி 13.3

1. விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் தரப்பட்ட எண்களைச் சாதாரண வடிவத்தில் மாற்றுவதற்குக் கீறிட்ட இடங்களைப் பொருத்தமானவாறு நிரப்புக.

(i) $5.43 \times 10^3 = 5.43 \times$ ....
$=$ ....

(ii) $7.25 \times 10^5 =$ .... $\times$ ....
$=$ ....

(iii) $6.02 \times 10^1 =$ .... $\times$ ....
$=$ ....

(iv) $5.99 \times 10^{-2} = 5.99 \times \frac{1}{10^{\cdots}}$
$= \frac{5.99}{\cdots\cdots\cdots}$
$= 0.0599$

(v) $1.06 \times 10^{-6} = 1.06 \times$ ....
$= \frac{1.06}{\cdots\cdots\cdots}$
$=$ ....

2. பின்வரும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் தரப்பட்டுள்ள எண்களைச் சாதாரண வடிவத்தில் மாற்றியமைக்க.

(i) 8.9×10^{2} (ii) 1.05×10^{4} (iii) 7.994×10^{5} (iv) 8.02×10^{3}

(v) 9.99×10^{7} (vi) 7.2×10^{-1} (vii) 8.34×10^{-3} (viii) 5.97×10^{-4}

(ix) 9.12×10^{-5} (x) 5.00×10^{-6}

3. ஒவ்வோர் எண் சோடியிலிருந்தும் பெரிய எண்ணைத் தெரிக.

(i) 2.1×10^{4}, 3.7×10^{4} (ii) 2.1×10^{4}, 3.7×10^{3}

(iii) 2.1×10^{4}, 3.7×10^{5} (iv) 2.1×10^{4}, 2.1×10^{-4}

(v) 2.1×10^{4}, 3.7×10^{-3} (vi) 2.1×10^{-4}, 3.7×10^{-3}

4. பின்வரும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடுகளைச் சாதாரண வடிவத்தில் தருக.

- புவியின் நிலப் பரப்பளவு 1.488×10^{8} சதுரக் கிலோமீற்றர் ஆகும்.
- புவியின் கடல் நீர்ப் பரப்பளவு 3.613×10^{8} சதுரக் கிலோமீற்றர் ஆகும்.
- புவியின் முழு மேற்றளப் பரப்பளவு 5.101×10^{8} சதுரக் கிலோமீற்றர் ஆகும்.

எண்களை மட்டந்தட்டல்

கல்யாணி மண்டபத்தில் நடைபெற்ற புத்தகக் கண்காட்சியைப் பார்வையிடுவதற்கு வார இறுதியில் 2500 பேர் வருகை தந்தனர் என அறிக்கைகள் குறிப்பிடுகின்றன.

– ஒரு செய்தி

இச்செய்தியில் குறிப்பிடப்பட்ட கண்காட்சியைப் பார்வையிடுவதற்கு வார இறுதியில் வருகை தந்தவர்களுக்காக 2483 நுழைவுச் சீட்டுகள் விற்பனையாகின. எனவே கண் காட்சியைக் பார்வையிட்டவர்களின் உண்மையான எண்ணிக்கை 2483 ஆகும். செய்தியில் குறிப்பிடப்பட்ட 2500 என்னும் எண் 2483 இற்கு அண்மித்த ஒரு பெறுமானமாகும். இவ்வெண்ணை நினைவில் வைத்திருப்பது இலகுவாக இருப்பதோடு அதில் ஒரு சிறப்புத் தன்மையும் காணக்கூடியதாக இருக்கின்றது. இவ்வெண் தொடர்பாடலுக்கு இலகுவாக உள்ளது.

எண் ஒன்றை மட்டந்தட்டுதல் என்பது அவ்வெண் சார்ந்த பெறுமானத்தை அதற்கு மிகவும் அண்மித்த, அதனைவிடச் சுருக்கமான, அறிக்கையிட இலகுவான அல்லது சிறப்புத் தன்மையுள்ள வேறொரு பெறுமானமாகக் குறிப்பிடுதல் ஆகும். மட்டந் தட்டும் முறைகள் பல உள்ளன. அவற்றில் சிலவற்றை நோக்குவோம்.

13.4 கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டல்

ஓர் எண்ணை அதற்கு அண்மித்த 10 இன் மடங்காக எழுதும் முறை ''கிட்டிய பத்துக்கு மட்டந்தட்டல்'' எனப்படும்

மேற்குறிப்பிட்ட நிகழ்வில் உள்ள 2483 பேரை கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டுவோம். 2483 என்னும் எண் 2480 இற்கும் 2490 இற்கும் இடைப்பட்ட பத்தின் மடங்கில் அமைந்துள்ளது. இவ்வெண் 2480 என்னும் எண்ணையே அண்மித்துள்ளது. அதற்கேற்ப 2483 என்பதை கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 2480 பெறப்படும்.

இதனை மேலும் இவ்வாறு விளக்கலாம்.

2481, 2482, 2483, 2484 என்னும் எண்களைக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 2480 பெறப்படும். இவ்வனைத்து எண்களும் 10 இன் மடங்கான 2480 இற்கே அண்மையில் அமைந்துள்ளன. அவ்வாறே 2486, 2487, 2488, 2489 என்னும் எண்களைக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 2490 பெறப்படும். இதற்குக் காரணம் இவை 2490 ஐ அண்மித்து இருப்பதால் ஆகும். எஞ்சியுள்ள 2485 ஆனது 2480, 2490 ஆகிய எண்களுக்கு சமதூரத்தில் இருக்கும்போதிலும் அது கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது அதனைவிடப் பெறுமானம் கூடிய அண்மித்த 10 இன் மடங்கான 2490 என இணக்கம் கொள்ளப்படும். இறுதியாக 2480 ஐக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 2480 எனவும் 2490 ஐக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 2490 எனவும் பெறப்படும்.

உதாரணம் 1

(i) 273 (ii) 1428 (iii) 7196 ஆகிய பெறுமானங்களைக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டுக.

(i) 270 (ii) 1430 (iii) 7200

பயிற்சி 13.4

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் எண்ணையும் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டுக.

(i) 33	(ii) 247	(iii) 3 008
(iv) 59	(v) 309	(vi) 4 017
(vii) 85	(viii) 1 514	(ix) 1 895
(x) 12 345	(xi) 234 532	(xii) 997 287

2. பீதுருதாலகால மலையின் உயரம் 2524 m ஆகும். இவ்வெண்ணைக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டுக.

3. ஓர் எண்ணைக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டியபோது 140 பெறப்பட்டது. அவ்வெண்ணாக இருக்கத்தக்க சகல முழுவெண் பெறுமானங்களையும் எழுதுக.

4. ஓர் எண்ணைக் கிட்டிய பத்துக்கு மட்டந்தட்டியபோது 80 பெறப்பட்டது. அவ்வெண்ணாக இருக்கத்தக்க சகல முழுவெண் பெறுமானங்களையும் எழுதுக. மிகச் சிறிய முழுவெண் பெறுமானம் எது? மிகப் பெரிய முழுவெண் பெறுமானம் எது?

5. ஏதேனும் ஒரு முழுவெண்ணைக் கிட்டிய 10 இற்கு மட்டந்தட்டியபோது 260 எனப் பெறப்பட்டது. அவ்வெண்ணாக இருக்கத்தக்க மிகச் சிறிய எண்ணையும் மிகப் பெரிய எண்ணையும் தனித்தனியே எழுதுக.

13.5 கிட்டிய 100 இற்கு, கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டல்

எண்கள் கிட்டிய பத்துக்கு மட்டந்தட்டப்பட்ட விதத்திலேயே கிட்டிய 100 இற்கும் கிட்டிய 1000 இற்கும் மட்டந்தட்டப்படும்.

உதாரணமாக 7346 என்னும் எண் 100 இன் மடங்கான 7300 இற்கும் 7400 இற்கும் இடையில் அமைந்திருக்கிறது. அவ்வெண் 7300 ஐயே அண்மித்திருக்கின்றது. எனவே 7346 ஐக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 7300 பெறப்படுகின்றது. 7675 என்னும் எண்ணைக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 7700 பெறப்படும். 7300 இல் இருந்து 7349 வரையுள்ள (இவ்வெண்கள் அடங்கலாக) எண்களைக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 7300 பெறப்படும். அத்துடன் 7350 இல் இருந்து 7449 வரையுள்ள எண்களை (இவ்வெண்கள் அடங்கலாக) கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டும்போது 7400 பெறப்படும்.
அடுத்தாகக் கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டுவதைக் கருதுவோம். உதாரணமாக 41 873 என்னும் எண்ணைக் கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டுகையில் 42 000 பெறப்படும். இதற்குக் காரணம் 41 873 ஆனது 42 000 ஐ அண்மித்து இருப்பதாலாகும்.

இதனை மேலும் விரிவாகப் பார்ப்போம்.

- 2 435 ஐக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டல்

2435

இவ்வெண் 100 இன் மடங்காகிய 2 400 இற்கும் 2 500 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 2 435 ஆனது 2 400, 2 500 என்பவற்றின் நடு உறுப்பான 2 450 இலும் குறைவானதாகும்.

∴ 2 435 இற்கு மிகக் கிட்டியது 2 400 ஆகும்.

- 2 485 ஐக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டல்

2485

இவ்வெண் 100 இன் மடங்காகிய 2400 இற்கும் 2 500 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 2485 ஆனது 2 400, 2 500 என்பவற்றின் நடு உறுப்பான 2 450 இலும் அதிகமானதாகும்.

∴ 2 485 இற்கு மிகக் கிட்டியது 2 500 ஆகும்.

- 2 450 ஐக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டல்

2450

இவ்வெண் 100 இன் மடங்காகிய 2 400 இற்கும் 2 500 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 2 450 ஆனது இரண்டிற்கும் சம தூரத்தில் இருக்கும் போதிலும் மட்டந்தட்டும்போது அதனைவிடப் பெறுமானம் கூடிய அண்மித்த நூறிற்கு மட்டந்தட்டப்படும்.

∴ 2 450 இற்கு மிகக் கிட்டியது 2 500 ஆகும்.

- 2 485 ஐக் கிட்டிய 1 000 இற்கு மட்டந்தட்டல்

2485

இவ்வெண் 1000 இன் மடங்காகிய 2 000 இற்கும் 3 000 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 2485 ஆனது 2 000, 3 000 என்பவற்றின் நடு உறுப்பான 2 500 இலும் குறைவானதாகும்.

∴ 2 485 இற்கு மிகக் கிட்டியது 2 000 ஆகும்.

- 2 754 ஐக் கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டல்

2754

இவ்வெண் 1000 இன் மடங்காகிய 2000 இற்கும் 3000 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 2 454 ஆனது 2 000, 3 000 என்பவற்றின் நடு உறுப்பான 2 500 இலும் அதிகமானதாகும்.

∴ 2 754 இற்கு மிகக் கிட்டியது 3 000 ஆகும்.

- 12 500 ஐக் கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டல்
- 12 500

இவ்வெண் 1000 இன் மடங்காகிய 12 000 இற்கும் 13 000 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 12 500 ஆனது இரண்டிற்கும் சம தூரத்தில் இருக்கும் போதிலும் மட்டந்தட்டும்போது அதனைவிடப் பெறுமானம் கூடிய அண்மித்த ஆயிரத்திற்கு மட்டந்தட்டப்படும்.

∴ இதற்கேற்ப 12 574 இற்கு மிகக் கிட்டியது 13 000 ஆகும்.

உதாரணம் 1

(i) 5654 (ii) 8477 ஆகிய எண்களைக் கிட்டிய 100 இற்கும் கிட்டிய 1000 இற்கும் மட்டந் தட்டுக.

கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டல் (i) 5700 (ii) 8500

கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டல் (i) 6000 (ii) 8000

பயிற்சி 13.5

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் எண்ணையும் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டுக.
   (i) 54 (ii) 195 (iii) 1009 (iv) 2985 (v) 72324 (vi) 7550

2. பின்வரும் ஒவ்வோர் எண்ணையும் கிட்டிய 1000 இற்கு மட்டந்தட்டுக.
   (i) 1927 (ii) 2433 (iii) 19999 (iv) 45874 (v) 38000 (vi) 90500

3. ஒரு பாடசாலையில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 2059 ஆகும். இவ்வெண்ணை
   (i) கிட்டிய 10 இற்கு
   (ii) கிட்டிய 100 இற்கு
   (iii) கிட்டிய 1000 இற்கு
   மட்டந்தட்டுக.

4. ஓர் எண்ணைக் கிட்டிய 100 இற்கு மட்டந்தட்டியபோது 4500 எனப் பெறப்பட்டது. அவ்வெண்ணாக இருக்கத்தக்க
   (i) மிகச் சிறிய முழுவெண் யாது?
   (ii) மிகப் பெரிய முழுவெண் யாது?

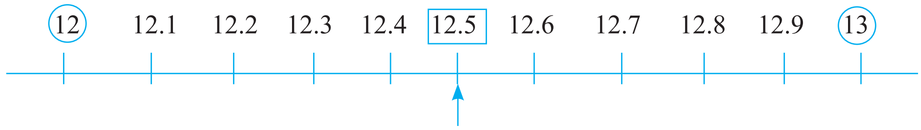
13.5 தசம எண்களை மட்டந்தட்டல்

ஐந்து வயதுள்ள குழந்தை ஒன்றின் திணிவு 12.824 kg எனக் குறிக்கப் பட்டிருந்தது. அது 12824 g ஆகும். திணிவை அளக்கப் பயன்படுத்திய தராசு கிட்டிய கிராமுக்கு அளவைக் காட்டுவதால் இப்பெறுமானம் பெறப்பட்டது. இருந்தபோதும் நடைமுறை நிகழ்வுகளில் கிட்டிய கிலோகிராமிற்கு அல்லது கிட்டிய கிலோகிராமின் பத்தின் பங்குகளுக்கு அல்லது கிட்டிய கிலோகிராமின் 100 இன் பங்குகளுக்குத் திணிவு அளந்து குறிக்கப்படும்.

இவ்வாறான தசம எண்களை கிட்டிய முழுவெண், கிட்டிய முதலாம் தசம தானம், கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானம், ... போன்ற சந்தர்ப்பங்களுக்கு மட்டந்தட்ட வேண்டிய தேவை ஏற்படும்.

இப்பாடத்தில் நாம் தசம எண்களை மட்டந்தட்டும் முறை பற்றிக் கற்போம். முதலில் ஒரு தசம தானத்தை உடைய ஓர் எண்ணைக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டும் முறையைக் கவனிப்போம்.

12.7 ஐக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டுவோம்.



12.7 இன் இரு பக்கங்களிலும் அமைந்த முழுவெண்கள் 12 உம் 13 உம் ஆகும்.

12.1, 12.2, 12.3, 12.4 என்னும் எண்கள் 12 ஐ அண்மித்துள்ளன. அவற்றைக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டும்போது 12 பெறப்படும். 12.6, 12.7, 12.8, 12.9 என்னும் எண்கள் 13 ஐ அண்மித்துள்ளன. எனவே அவற்றைக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டும்போது 13 பெறப்படும். முன்னர் குறிப்பிட்டது போல் 12.7 ஆனது கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு 13 என மட்டந்தட்டப்பட்டுள்ளது.

அவ்வாறே
12.3 ஐக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டும்போது 12 உம்
12.5 ஐக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டும்போது 13 உம்
பெறப்படும்.

தரப்பட்ட தசம தானத்திற்கு மட்டந்தட்டல்

- 3.74 ஐக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந்தட்டுக.

மட்டந்தட்டும் விதிகள் இங்கேயும் பொருந்தும். 3.71, 3.72, 3.73, 3.74 என்னும் எண்களுக்கு மிகவும் அண்மித்த ஒரு தசம தானத்தைக் கொண்ட எண் 3.7 ஆகையால் ஒவ்வொரு தசம எண்ணையும் முதலாம் தசமதானத்திற்கு மட்டந்தட்டும்போது 3.7 பெறப்படும். அவ்வாறே 3.75, 3.76, 3.77, 3.78, 3.79 என்னும் எண்களைக் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந்தட்டும்போது 3.8 பெறப்படும். இதற்கேற்ப 3.74 ஐ முதலாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந்தட்டும்போது 3.7 பெறப்படும். வேறு தசம தானங்களையும் இவ்விதிகளுக்கு அமைய மட்டந்தட்டலாம். பின்வரும் உதாரணத்தை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

(i) 3.784 (ii) 3.796 ஆகிய எண்களை இரண்டாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந் தட்டுக.

இரண்டாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந்தட்டும்போது மூன்றாம் தசம தானத்தின் இலக்கத்தைக் கவனத்திற் கொள்ள வேண்டும்.

(i) 3.784 இவ்வெண் 3.78 இற்கும் 3.79 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 3.784 ஆனது 3.78, 3.79 என்பவற்றின் நடு உறுப்பான 3.785 இலும் குறைவானதாகும். ஆகவே கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானம் 3.78 ஆகும்.

(ii) 3.796 இவ்வெண் 3.79 இற்கும் 3.80 இற்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது. 3.796 ஆனது 3.79, 3.80 என்பவற்றின் நடு உறுப்பான 3.795 இலும் கூடியதாகும். ஆகவே கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானம் 3.80 ஆகும்.

பயிற்சி 13.6

1. பின்வரும் எண்களைக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கும் கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கும் மட்டந்தட்டுக.

(i) 5.86	(ii) 12.75	(iii) 10.43	(iv) 123.79
(v) 8.04	(vi) 13.99	(vii) 101.98	(viii) 100.51

2. π இன் பெறுமானம் 3.14159... ஆகும். இப்பெறுமானத்தை

(i) கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு (ii) கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு
(iii) கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந்தட்டுக.

3. கோளம் ஒன்றின் விட்டம் 3.741 cm ஆகும். அப்பெறுமானத்தை

(i) கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு
(ii) கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானத்துக்கு
மட்டந்தட்டுக.

4. ஒரு காணியின் பரப்பளவு 0.785 ha என கிடைப்படம் ஒன்றில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. அப்பெறுமானத்தை

(i) கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு (ii) கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானத்துக்கு மட்டந்தட்டுக.

5. விலங்குப் பண்ணை ஒன்றில் சுகதேகியான பசு ஒன்றிலிருந்து தினமும் பெறப்படும் பாலின் இடைப் பெறுமானம் 5.25 l ஆகும். அங்கு அவ்வாறான 42 பசுக்கள் இருப்பின், நாள் ஒன்றில் பெறப்படும் பாலின் அளவை

(i) கிட்டிய லீற்றருக்கு
(ii) கிட்டிய முதலாம் தசம தானத்துக்கு
மட்டந்தட்டுக.

பலவினப் பயிற்சி

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு எண் தொகுதிகளையும் தனித்தனியே ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

(i) 3.10×10^2 , 3.10×10^{-4} , 3.10×10^0 , 3.10×10^5
(ii) 4.78×10^{-2} , 1.43×10^4 , 9.99×10^{-3} , 2.32×10^1
(iii) 7.85×10^0 , 7.85×10^{-4} , 7.85×10^2 , 7.85×10^{-2}

2. நாள் ஒன்றுக்கு ரூ. 1230 வீதம் கொடுப்பனவைப் பெறும் 250 தொழிலாளர்கள் தொழிற்சாலை ஒன்றில் பணி புரிகின்றனர்.

(i) அவர்களின் கொடுப்பனவுக்காக நாள் ஒன்றுக்குத் தேவைப்படும் பணம் எவ்வளவு ?
(ii) 1230 ஐயும் 250 ஐயும் விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் தருக.
(iii) மேலே (ii) இல் எழுதிய விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீட்டில் எழுதிய எண்களைக் கொண்டு நாள் ஒன்றுக்குத் தேவைப்படும் பணத்தின் தொகையைக் காண்க.
(iv) மேலே (i) இனதும் (ii) இனதும் விடைகளை ஒப்பிடுக.

3. தேயிலைத் தொழிற்சாலை ஒன்றில் நாள் ஒன்றில் உற்பத்திசெய்த தேயிலையின் அளவு 1500 kg ஆகும். ஒவ்வொரு மாதமும் 30 நாட்கள் தொழிற்சாலை இயங்குமாயின், மாதம் ஒன்றில் உற்பத்திசெய்த தேயிலையின் அளவு 4.5×10^4 kg எனக் காட்டுக.

4. பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

(*a*)

கோவை	கோவையில் உள்ள எண்களைக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு மட்டந்தட்டும்போது பெறப்படும் பெறுமானம்	மட்டந்தட்டிய பின்னர் கோவையின் பெறுமானம்
59.2×9.97	60×10	600
8.4×5.7	.... ×........	....
12.3×11.95	.... ×........	....
10.15×127.6	.... ×........	....
459.7×3.51	.... ×........	....
109.5×4.49	.... ×........	....

(*b*)

கோவை	மட்டந்தட்டாமல் பெருக்கம்	மட்டந் தட்டிய பின்னர் கோவையின் பெறுமானம்
59.2×9.97	590.224	590
8.4×5.7	....	....
12.3×11.95	....	....
10.15×127.6	....	....
459.7×3.51	....	....
109.5×4.49	....	....

பொழிப்பு

- கணப்பீடுகளை இலகுவாக்கிக் கொள்வதற்கு எண்களைச் சுருக்கி எழுதும் ஒரு முறை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு எனப்படும்.
- ஏதேனும் ஓர் எண் $1 \leq A < 10$ ஆகவும் $n \in \mathbb{Z}$ ஆகவும் இருக்கும்போது $A \times 10^n$ என எழுதும் முறை விஞ்ஞானமுறைக் குறிப்பீடு ஆகும்.
- எண்களை மட்டந்தட்டும்போது அவ்வெண்ணை மட்டந்தட்டுவதற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் தானத்துக்கு அடுத்துள்ள தானத்தின் இலக்கத்தைப் பரீட்சித்து அதற்கேற்ப மட்டந்தட்டல் செய்யப்படும்.

14 ஒழுக்குகளும் அமைப்புகளும்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- நான்கு அடிப்படை ஒழுக்குகளை இனங்காண்பதற்கும்
- ஒரு கோட்டிற்குச் செங்குத்தான ஒரு கோட்டினை அமைப்பதற்கும்
- ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்திற்குச் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைப் பதற்கும்
- கோணங்களை அமைப்பதற்கும் பிரதிசெய்வதற்கும்
- ஒழுக்குகளுடனும் அமைப்புகளுடனும் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

ஒழுக்குகள்

நீங்கள் அவதானிக்கத்தக்க சில இயக்கங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவை செல்லும் பாதைகள் தொடர்பாகக் கவனஞ் செலுத்துக.

1. *காற்றில் மிதக்கும் பஞ்சு*
2. *பறக்கும் பறவை*
3. *துடுப்பினால் அடிக்கப்பட்ட பந்து*
4. *மரத்திலிருந்து விழும் பழம்*
5. *தொழிற்படும் மணிக்கூட்டின் முள் ஒன்றின் நுனி*
6. *நிறுத்தாடுவளையில் (see - saw) இருக்கும் பிள்ளை*

மேலே 1, 2 ஆகியவற்றினால் காட்டப்படும் இயக்கங்கள் சிக்கலானவையாகவும் நிச்சயமற்றனவாகவும் இருக்கின்றபோதிலும் 3 தொடக்கம் 6 வரையுள்ள இயக்கங்கள் நிச்சயமானவையாக இருப்பதை அவதானிக்கலாம். இத்தகைய இயக்கங்களில் ஈடுபடுவன செல்லும் பாதைகள் பற்றி நல்ல விளக்கத்தைப் பெறுவதற்குக் கேத்திரகணித்தில் உள்ள ஒழுக்குகள் பற்றிக் கற்றல் முக்கியமானதாகும்.

ஒரு குறித்த நிபந்தனையை அல்லது சில நிபந்தனைகளைத் திருப்தியாக்குமாறு உள்ள புள்ளிகளின் தொடையானது ஒழுக்கு எனப்படும்.

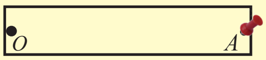
14.1 அடிப்படை ஒழுக்குகள்

இப்போது நாம் அடிப்படை ஒழுக்குகளில் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

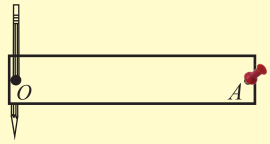
1. ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு

செயற்பாடு 1

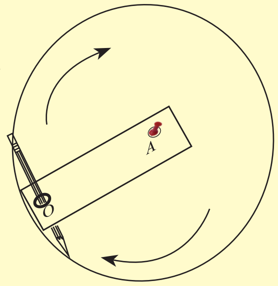
படி 1 : ஏறத்தாழ 5 cm நீளமுள்ள ஓர் அட்டைத்தாள் கீற்றில் இரு அந்தங்களுக்கும் அருகில் இரு புள்ளிகளைக் குறித்து O, A எனப் பெயரிடுக.



படி 2: ஒரு கடதாசி மீது மேற்குறித்த அட்டைத்தாள் கீற்றை வைத்து புள்ளி A இல் வரைதல் ஊசியைப் பொருத்தி நிலையாக வைத்துக்கொள்க.



படி 3: O இல் உள்ள புள்ளியினூடாக ஒரு பென்சிற் கூரைச் செலுத்திப் பிடித்துக்கொண்டு பென்சிற் கூரை இயக்கி அது செல்லும் பாதையைக் குறிக்க.



படி 4: செயற்பாட்டிலிருந்து ஒழுக்கு ஒன்றை இனங்காண்க.

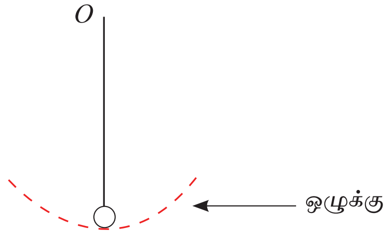
மேற்குறித்த செயற்பாட்டிலிருந்து நீங்கள் வட்டமாகச் செல்லும் பாதையைப் பெறுவீர்கள். இதற்கேற்ப

ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமாகும்.

உதாரணம் 1

ஒரு தொழிற்படும் கடிகாரத்தின் ஊசற் குண்டின் ஆகவும் கீழேயுள்ள புள்ளியின் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.

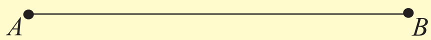
இவ்வியக்கத்துக்குரிய ஒழுக்கானது ஊசற் குண்டு தொங்க விடப்பட்டுள்ள புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட கோலின் நீளத்தை ஆரையாகக் கொண்ட வட்டத்தின் பகுதியாகும்.



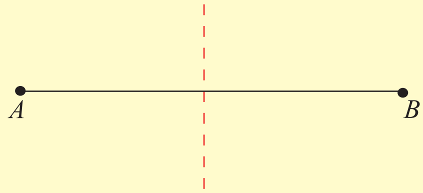
2. இரு நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு

செயற்பாடு 2

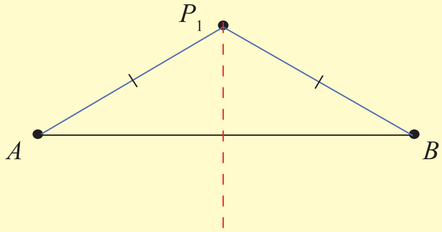
படி 1 : ஓர் எண்ணெய்த் தாளில்/திசுத் தாளில் ஏறத்தாழ 10 cm நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை AB எனப் பெயரிடுக.



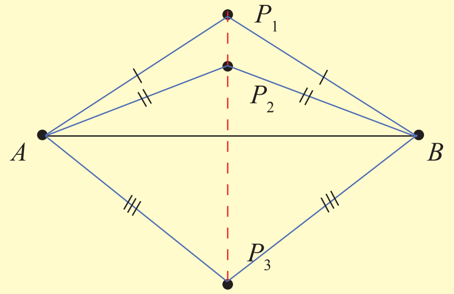
படி 2 : A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளும் பொருந்துமாறு திசுத் தாளை மடிப்பதன் மூலம் கோடு AB இன் சமச்சீரச்சை இனங்கண்டு அதனை ஒரு முறிந்த கோட்டினால் குறிக்க.



படி 3 : முறிந்த கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளியை P_1 எனக் குறித்து P_1A, P_1B ஆகிய கோடுகளை வரைந்து அவற்றின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.



படி 4 : முறிந்த கோட்டின் மீது வேறு சில புள்ளிகளைக் குறித்து அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தூரங்களை அளந்து எழுதுக.



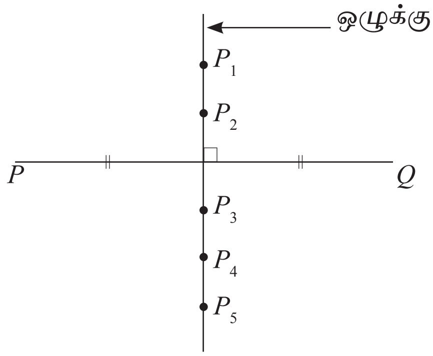
படி 5 : A, B ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து முறிந்த கோட்டின் மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளிக்கு உள்ள தூரங்கள் சமமா எனச் சோதித்துப் பார்த்து முடிபை எழுதுக.

மேலே A, B ஆகியன பொருந்துமாறு தாளை மடிக்கும்போது கிடைக்கும் மடிப்புக் கோடானது கோடு AB இற்குச் செங்குத்தானது என்பதையும் அது AB இன் நடுப் புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றது என்பதையும் விளங்கிக்கொள்க. இக்கோடானது கோட்டுத் துண்டம் AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி எனப்படும். AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி மீது நீங்கள் தெரிந்தெடுத்த புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலு மிருந்தும் A இற்கும் B இற்கும் உள்ள தூரங்கள் சமம் என்பதை அவதானிக்க.

நிலைத்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரங்களில் உள்ள புள்ளியின் ஒழுக்கு அவ்விரு புள்ளிகளையும் தொடுக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியாகும்.

உதாரணம் 2

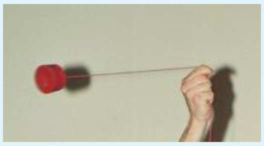
தரப்பட்டுள்ள P, Q என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் அமைவைக் காட்டும் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக. அதன் மீது உள்ள புள்ளிகளை P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 எனப் பெயரிடுக.



பயிற்சி 14.1

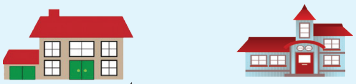
1. பின்வரும் இயக்கங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய ஒழுக்கை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.

(i) 50 cm நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் ஒரு நுனியில் மரக் குற்றி ஒன்றைக் கட்டி, கயிற்றின் மற்றைய நுனியைப் பிடித்து கயிறு இழுக்கப்பட்டிருக்குமாறு சுற்றும்போது மரக் குற்றி செல்லும் பாதை.



(ii) ஒரு தொழிற்படும் கடிகாரத்தின் ஒரு நிமிட முள்ளின் அந்தம் செல்லும் பாதை.

(iii) உருவில் உள்ள கிடைப்படத்தில் A, B என்னும் இரண்டு வீடுகள் 50 m இடைத்தூரத்தில் காணப்படுகின்றன. இவ்வீடுகளிலிருந்து சம தூரத்தில் மதில் ஒன்றை அமைக்க வேண்டும். அம்மதில் அமையும் இடம்.



A B

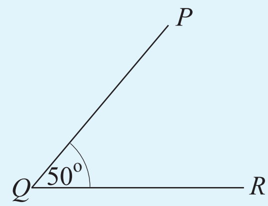
(iv) ஓர் ஊர்வலத்தில் தீப்பந்தைச் சுழற்றுபவரின் பந்தத்தில் உள்ள தீப்பிழம்பு செல்லும் பாதை. (பந்தத்தைப் பிடிப்பவர் அசையாமல் இருக்கும் போது)

(v) ஓர் இராட்டினத்தில் இருப்பவர் செல்லும் பாதை.

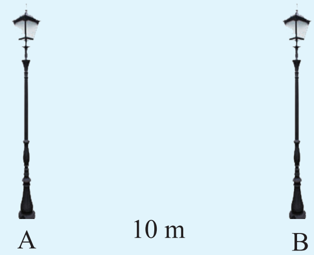
(vi) நிறுத்தாடுவளையிலே ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் அதன் குறுக்குத் தண்டின் இரு அந்தங்களிலும் அமர்ந் திருக்கும் பிள்ளைகள் செல்லும் பாதை.

2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் P, Q ஆகியன கிடைத் தரையில் ஒன்றிலிருந்தொன்று 25 m தூரத்தில் உள்ள இரு மரங்களாகும். ஒவ்வொரு மரத்திலிருந்தும் 15 m தூரத்தில் ஒரு நீர்த் திருகுபிடியைப் பொருத்தவேண்டி உள்ளது. ஒழுக்குகள் பற்றிய அறிவிற்கேற்பத் திருகுபிடி பொருத்தப்படத்தக்க இடங்களைக் காணும் விதத்தை ஒரு பருமட்டு உருவைக் கொண்டு காட்டுக.

3. உருவில் உள்ளவாறு ஓர் 50^{o} கோணத்தை வரைந்து அதனை PQR எனப் பெயரிடுக. Q, R என்பவற்றிலிருந்து சம தூரங்களில் புயம் PQ மீது உள்ள புள்ளி காணப்படும் விதத்தை ஒழுக்குகள் பற்றிய உங்கள் அறிவைப் பயன்படுத்திக் காண்க. இவற்றை ஒரு பருமட்டு உருவில் குறித்து அப்புள்ளியை S எனப் பெயரிடுக.



4. A, B ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று 10 m தூரத்தில் இருக்கும் இரு விளக்குக் கம்பங் களாகும்.



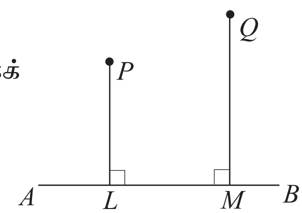
(i) A இலிருந்து 6 m தூரத்திலும் B இலிருந்து 8 m தூரத்திலும் இருக்குமாறு ஒரு கம்பம் C ஐ நடுதல் வேண்டும். ஓர் உகந்த பருமட்டு உருவில் கம்பம் C இன் அமைவைக் குறிக்க.

(i) A, B இற்கு நடுவில் இன்னுமொரு விளக்குக் கம்பம் வர வேண்டும் எனின், ஒழுக்கு பற்றிய அறிவைக் கொண்டு அக்கம்பம் வரவேண்டிய இடத்தைப் பருமட்டிப் படம் ஒன்றில் குறித்துக் காட்டுக. அதை D எனக் குறிக்க.

14.2 அடிப்படை ஒழுக்குகள் (மேலும்)

3. ஒரு நிலைத்த கோட்டிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு

ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கோட்டிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் அக்கோட்டிற்கு உள்ள தூரமாகக் கருதப்படும்.



இதற்கேற்பக் கோடு AB இற்கு

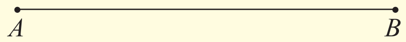
P இலிருந்து உள்ள தூரம் PL ஆகும்.

Q இலிருந்து உள்ள தூரம் QM ஆகும்.

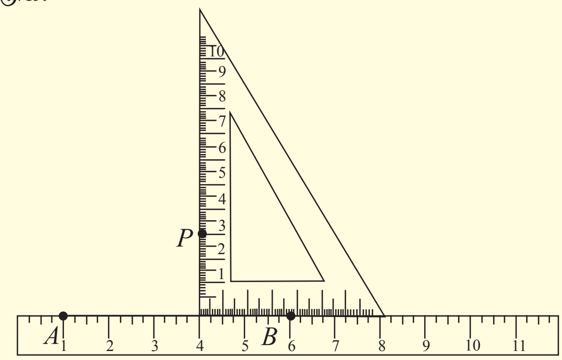
இப்போது நாம் ஒரு கோட்டிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

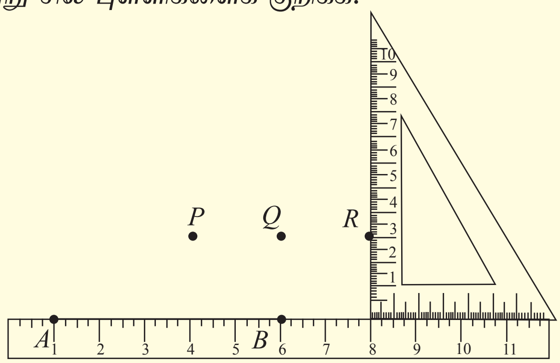
படி 1: பயிற்சிப் புத்தகத்தில் ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை AB எனப் பெயரிடுக.



படி 2: கோடு AB மீது நேர் விளிம்பை வைத்து அதனைத் தொடுமாறு ஒரு மூலைமட்டத்தின் ஒரு விளிம்பைப் பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு வைக்க. AB இலிருந்து 3 cm தூரத்தில் உள்ள புள்ளியைக் குறித்து அதனை P எனப் பெயரிடுக.



படி 3: மூலைமட்டத்தின் அமைவை மாற்றி AB இலிருந்து 3 cm தூரத்தில் உள்ள வேறு சில புள்ளிகளைக் குறிக்க.



படி 4: மேலே குறித்த P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளை ஒரு நேர்விளிம்பைப் பயன்படுத்தித் தொடுக்க.

படி 5: கோடு AB இலிருந்து 3 cm தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு யாதென விளக்குக. அத்தகைய வேறோர் ஒழுக்கை AB இல் P இருக்கும் பக்கத்திற்கு எதிரான பக்கத்திலும் வரையமுடியும் என்பதை அவதானிக்க.

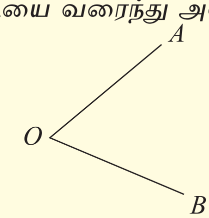
மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்பக் கோடு AB இலிருந்து 3 cm தூரத்தில் இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கானது AB இலிருந்து 3 cm தூரத்தில் உள்ள AB இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோடு என்பது தெளிவாகும். அவ்வாறே கோடு AB இன் இரு பக்கங்களிலும் இத்தகைய இரு ஒழுக்குகளை வரையலாம்.

ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கானது அந்நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக அம்மாறாத் தூரத்தில் நேர்கோட்டின் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கும் இரு நேர்கோடுகளாகும்.

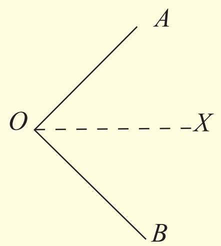
4. இரு இடைவெட்டும் நேர்கோடுகளிலிருந்து சம தூரத்தில் இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு

செயற்பாடு 2

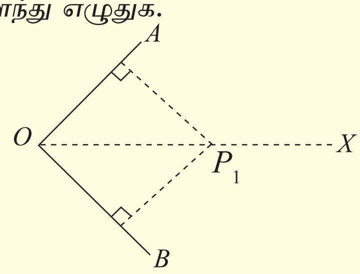
படி 1: ஓர் ஊடுகாட்டும் தாளில் (எண்ணெய்த் தாள்) உருவில் உள்ளவாறு ஒரு நேர்கோட்டுச் சோடியை வரைந்து அவற்றை OA, OB எனப் பெயரிடுக.



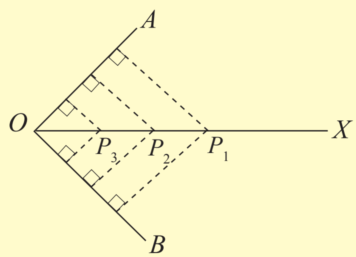
படி 2: OA, OB ஆகிய கோடுகள் பொருந்துமாறு திசுத் தாளை மடித்து மடிப்புக் கோட்டினை ஒரு முறிந்த கோட்டினால் குறிக்க. அதனை OX எனப் பெயரிடுக.



படி 3: மேலே வரைந்த முறிந்த கோடு மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை P_1 எனப் பெயரிடுக. மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்தி P_1 இலிருந்து OA இற்கும் OB இற்கும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைந்து அச்செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.



படி 4: கோடு OX மீது மேலும் சில புள்ளிகளைப் பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு குறித்து அவற்றை P_2, P_3, ... எனப் பெயரிடுக. அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் OA இற்கும் OB இற்கும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைந்து அவற்றின் நீளங்களையும் அளந்து எழுதுக.



படி 5: $A\hat{O}X$, $B\hat{O}X$ ஆகியவற்றை அளந்து கோடு தொடர்பாகப் பெறத்தக்க முடிபையும் எழுதுக.

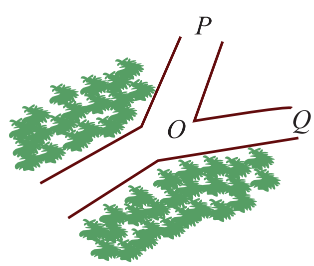
மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப $A\hat{O}B$ ஐ இருசமகோணங்களாக வேறுபடுத்தும் கோடு OX என்பதும் கோடு OX மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து OA இற்கும் OB இற்கும் உள்ள தூரங்கள் சமம் என்பதும் தெளிவாகும்.

மேலும் OA, OB ஆகிய கோடுகள் பொருந்துமாறு தாள் மடிக்கப்படுகின்றமையால் $A\hat{O}X$, $B\hat{O}X$ ஆகிய கோணங்கள் சமமாகும்.
கோடு OX ஆனது $A\hat{O}B$ இன் கோண இருசமகூறாக்கி எனப்படும்.

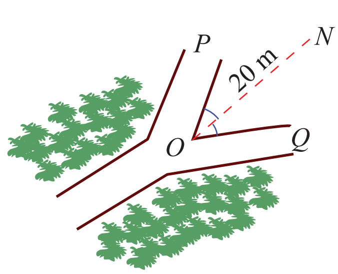
ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரு நேர்கோடுகளிலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு அவ்விரு கோடுகளும் இடைவெட்டுவதால் உண்டாகும் கோணத்தின் இருசமகூறாக்கியாகும்.

உதாரணம் 1

OP, OQ ஆகியன சந்தி O இலிருந்து இரு பக்கங்களுக்கும் செல்லும் இரு பாதைகளாகும். அவ்விரு பாதைகளிலிருந்தும் சம தூரத்தில் சந்தி O இலிருந்து 20 m தூரத்தில் ஓர் அறிவிப்புப் பலகையைப் பொருத்த வேண்டியுள்ளது. ஒழுக்குகள் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி, அறிவிப்புப் பலகை பொருத்தப்பட வேண்டிய இடத்தைக் காணும் விதத்தை ஓர் உருவில் காட்டுக.

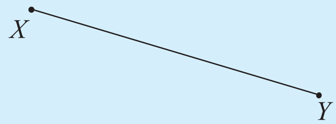


இங்கு $Q\hat{O}P$ இன் இருகூறாக்கி மீது புள்ளி N இருக்க வேண்டும். $ON = 20$ m ஆகையால் O இலிருந்து 20 m தூரத்தில் இருசமகூறாக்கி மீது புள்ளி N இருக்கும்.

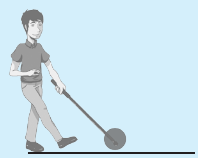


பயிற்சி 14.2

1. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து XY எனப் பெயரிடுக. இதிலிருந்து 4 cm தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.



2. ஒரு மாணவன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் கைப்பிடி பொருத்தப்பட்ட 20 cm விட்டமுள்ள ஒரு சில்லை உருட்டிக் கொண்டு செல்கின்றான். சில்லின் மையத்தின் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.

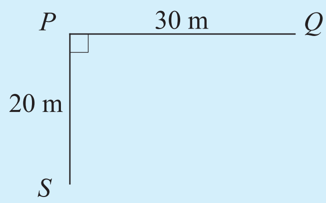


3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள கடிகாரத்தில் நிமிட முள்ளுக்கும் மணி முள்ளுக்கும் சம தூரத்தில் செக்கன் முள் காணப்படுகின்றது எனின், செக்கன் முள்ளின் அமைவை ஒழுக்கைப் பயன்படுத்தி ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக. (விரிகோணம், பின்வளை கோணம் ஆகிய இரு சந்தர்ப்பங்களுக்கும் வரைக.)

4. ஒரு காணியில் இருக்கும் 50 மீற்றர் நீளமுள்ள ஒரு வடிகால் PQ ஆனது உருவில் காணப்படுகின்றது. வடிகால் PQ இலிருந்து 10 மீற்றர் தூரத்திலும் P, Q ஆகிய இரு அந்தங்களிலிருந்தும் சம தூரத்திலும் ஒரு நீர்த் திருகுபிடி பொருத்தப்பட வேண்டியுள்ளது. நீரித் திருகுபிடி பொருத்தப்பட வேண்டிய இடத்தை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.

5. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள கேக் துண்டை ஒழுக்கைப் பயன்படுத்தி இரண்டு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கக்கூடிய முறையை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.

6. ஒரு செவ்வகக் காணியின் இரு எல்லைகள் PQ, PS ஆகும். எல்லை PQ இலிருந்து 8 மீற்றர் தூரத்திலும் எல்லை PS இலிருந்து 5 மீற்றர் தூரத்திலும் இருக்குமாறு காணியினுள்ளே ஒரு மரத்தை நட வேண்டியுள்ளது. மரம் நடப்பட வேண்டிய இடத்தை ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டி அதனை T எனப் பெயரிடுக.



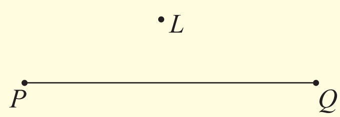
14.3 தரப்பட்ட நேர்கோடு ஒன்றிற்குச் செங்குத்துக் கோடுகளை அமைத்தல்

அமைப்புகளில் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் இரு சொற்களை விளக்குவோம். கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டங்களை வரைகையில் "யாதாயினும் ஒரு புள்ளியை மையமாகக் கொண்டும்", "ஒரு குறித்த தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்டும்" என்னும் பதங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. உதாரணமாகப் புள்ளி A ஐ மையமாகக் கொண்டு என்பது கவராயத்தின் முனையைப் புள்ளி A மீது வைத்து வட்டத்தை அல்லது வில்லை வரைய வேண்டும் என்பதைக் கருதுகின்றது. "AB ஐ ஆரையாகக் கொண்டு" என்பது கவராயத்தின் முனைக்கும் பென்சிலுக்கும் இடையில் உள்ள நீளம் AB இற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும் என்பதைக் கருதுகின்றது.

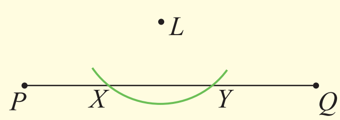
1. ஒரு கோட்டிற்கு வெளியே இருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டிற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைத்தல்

செயற்பாடு 1

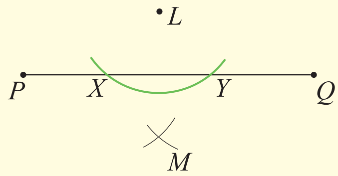
படி 1 : பயிற்சிப் புத்தகத்தில் ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை PQ எனப் பெயரிடுக. PQ இற்குப் புறத்தே ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை L எனப் பெயரிடுக.



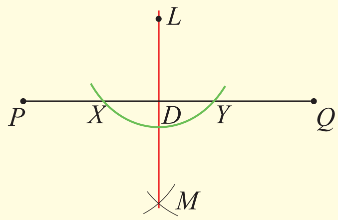
படி 2: L இலிருந்து PQ இற்கு உள்ள தூரத்திலும் பார்க்கக் கூடிய தூரத்தை ஆரையாகவும் L ஐ மையமாகவும் கொண்டு கோடு PQ ஐ இடைவெட்டுமாறு ஒரு வில்லை வரைக. வெட்டுப் புள்ளிகளை X, Y எனப் பெயரிடுக.



படி 3: X, Y ஆகிய புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும் மையமாகக் கொண்டு ஒரே ஆரையுடன் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுமாறு வேறு இரு விற்களை உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வரைக. வெட்டுப் புள்ளியை M எனப் பெயரிடுக.



படி 4: L, M ஆகிய புள்ளிகளைத் தொடுத்துக் கோடு LM ஆனது கோடு PQ ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை D எனப் பெயரிடுக. $L\hat{D}P$ இன் பெறுமானத்தை அளந்து எழுதுக.

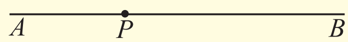


மேற்குறித்த அமைப்பின் இறுதியில் $L\hat{D}P = 90^{\circ}$ எனப் பெறுவீர்கள். அதாவது LD ஆனது கோடு PQ இற்குப் புள்ளி L இலிருந்து வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தாகும்.

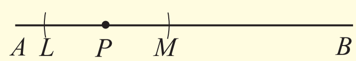
2. கோட்டின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டிற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைத்தல்

செயற்பாடு 2

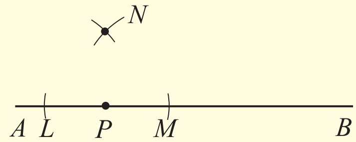
படி 1 : ஒரு கோட்டினை வரைந்து அதனை AB எனப் பெயரிடுக. அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை P எனப் பெயரிடுக.



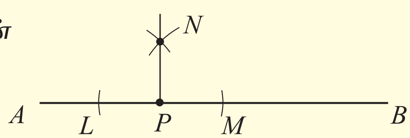
படி 2 : கவராயத்தில் PA இலும் பார்க்கக் குறைந்த ஓர் ஆரையை எடுத்து P ஐ மையமாகக் கொண்டு PA, PB ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களை வெட்டுமாறு இரு விற்களை வரைக. வெட்டுப் புள்ளிகளை L, M எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : கவராயத்தில் படி 2 இல் எடுத்த ஆரையிலும் பார்க்கக் கூடிய ஓர் ஆரையை எடுத்து L, M ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று வெட்டுமாறு இரு விற்களை வரைக. வெட்டுப் புள்ளியை N எனப் பெயரிடுக.



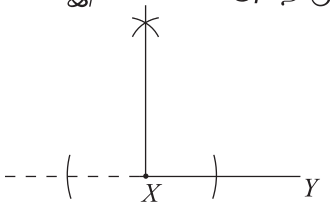
படி 4 : NP ஐ இணைத்து $N\hat{P}A$ இன் பெறுமானத்தை அளந்து எழுதுக.



மேற்குறித்த அமைப்பின் இறுதியில் $N\hat{P}A = 90^{\circ}$ எனப் பெறுவீர்கள். அதாவது கோடு AB இற்கு P இல் வரைந்த செங்குத்துக் கோடு PN ஆகும்.

3. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் ஒரு முனைப் புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டிற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைத்தல்

கோட்டுத் துண்டம் XY இற்கு X இல் ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க வேண்டி உள்ளதெனக் கொள்வோம்.
கோடு YX ஐ நீட்டி மேலே இனங்கண்ட அதே முறையில் இவ்வமைப்பைச் செய்க.



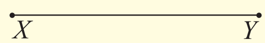
4. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைத்தல்

நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் நடுப் புள்ளியினூடாக அக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோடு செங்குத்து இருசமகூறாக்கியாகும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

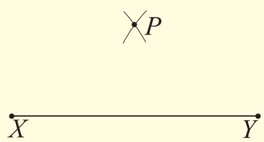
கோடு ஒன்றின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைப்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 3

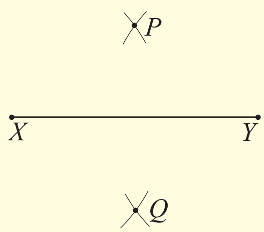
படி 1 : ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை XY எனப் பெயரிடுக.



படி 2 : நீளம் XY இன் அரைவாசியிலும் கூடிய ஒரு தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்டு ஆரையை மாற்றாமல் X, Y ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுமாறு இரு விற்களை வரைக. வெட்டுப் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.

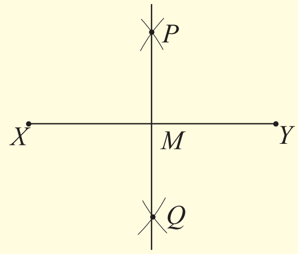


படி 3 : மேலே உள்ளவாறு X, Y ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்டு மேலும் இரு விற்களை ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுமாறு வரைந்து வெட்டுப் புள்ளியை Q எனப் பெயரிடுக. இது XY இலிருந்து P இருக்கும் பக்கத்திற்கு எதிர்ப் பக்கத்தில் பெறப்படும்.



குறிப்பு : இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஆரைகளைச் சமமாக எடுத்தல் அவசியமன்று.

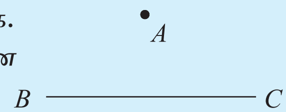
படி 3 : கோடு PQ ஐ வரைந்து அது XY ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை M எனப் பெயரிடுக. $XM, MY, X\hat{M}P$ ஆகியவற்றை அளந்து எழுதுக. PQ பற்றிப் பெறத்தக்க முடிபுகள் யாவை?



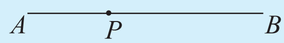
மேற்குறித்த அமைப்புக்கேற்ப $XM = MY$ என்பதையும் $X\hat{M}P = 90^{\circ}$ என்பதையும் நீங்கள் இனங்காண்பீர்கள். அதற்கேற்ப PQ ஆனது கோடு XY ஐச் செங்குத்தாக இருகூறிடும் கோடாகும். அதாவது XY இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியாகும்.

பயிற்சி 14.3

1. உருவில் உள்ளவாறு BC என்னும் நேர்கோட்டினை வரைக. புள்ளி A இலிருந்து BC இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க.



2. $AB = 7$ cm ஆக இருக்குமாறு கோடு AB ஐ வரைக. $AP = 3$ cm ஆக இருக்குமாறு AB மீது புள்ளி P ஐக் குறித்து P இலிருந்து AB இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க.



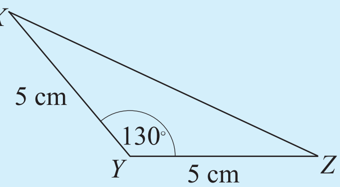
3. யாதாயினும் ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியை வரைந்து அதனை PQR எனப் பெயரிடுக.

(i) P இலிருந்து கோடு QR இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க.

(ii) Q இலிருந்து கோடு PR இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க.

(iii) R இலிருந்து கோடு PQ இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க.

4. (i) உருவில் உள்ளவாறு பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி 130° கோணத்தை வரையுங்கள். அதன் புயங்கள் இரண்டும் 5 cm ஆக இருக்கத்தக்கதாக ΔXYZ ஐப் பூரணப்படுத்துக.



(ii) Y இலிருந்து கோடு XZ இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைத்து அது XZ ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை D எனப் பெயரிடுக.

(iii) XD ஐயும் ZD ஐயும் அளந்து எழுதுக.

5. 6 cm நீளமும் 4 cm அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தை அமைக்க.

6. (i) $PQ = 10$ cm ஆக இருக்குமாறு ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டம் PQ ஐ வரைக.

(ii) $PB = 2$ cm ஆக இருக்குமாறு கோடு PQ மீது புள்ளி B ஐக் குறிக்க.

(iii) B இலிருந்து PQ இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க.

(iv) மேலே வரைந்த செங்குத்துக் கோடு மீது $BA = 6$ cm ஆக இருக்குமாறு புள்ளி A ஐக் குறித்து முக்கோணி ABQ ஐப் பூரணப்படுத்துக.

(v) கோடு BQ இன் செங்குத்து இருகூறாக்கியை அமைத்து அது AQ ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.

(vi) புள்ளி O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆரை OA ஐ ஆரையாக உடைய வட்டத்தை வரைக.

14.4 கோணங்களுடன் தொடர்புபட்ட அமைப்புகள்

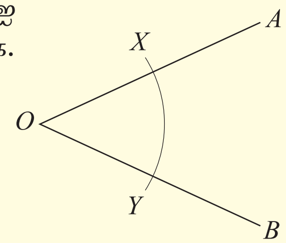
கோண இருசமகூறாக்கியை அமைத்தல்

ஒரு தரப்பட்ட கோணத்தை இரு சம கோணங்களாக வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்கு வரையப்படும் கோடு **கோண இருசமகூறாக்கி** எனப்படும்.

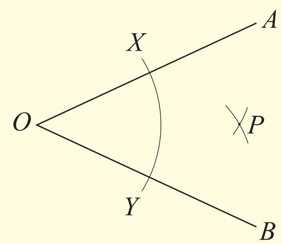
யாதாயினும் ஒரு கோணத்தை வரைந்து அதனை $A\hat{O}B$ எனப் பெயரிடுக. இக் கோணத்தின் இருசமகூறாக்கியை வரைவதற்குப் பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றுக.

செயற்பாடு 1

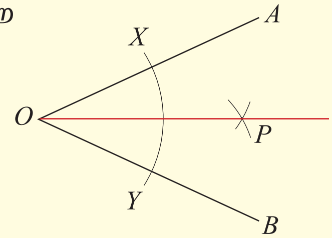
படி 1 : OA, OB ஆகிய புயங்களை வெட்டுமாறு O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வில்லை வரைக. வெட்டுப் புள்ளிகளை X, Y எனப் பெயரிடுக.



படி 2 : கவராயத்தில் ஓர் உகந்த ஆரையை எடுத்து X, Y ஆகிய புள்ளிகளை மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுமாறு இரு விற்களை உருவில் உள்ளவாறு வரைக. வெட்டுப் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : OP ஐத் தொடுக்க. $A\hat{O}P$, $B\hat{O}P$ ஆகியவற்றை அளந்து அவை சமமா எனப் பரீட்சிக்க.

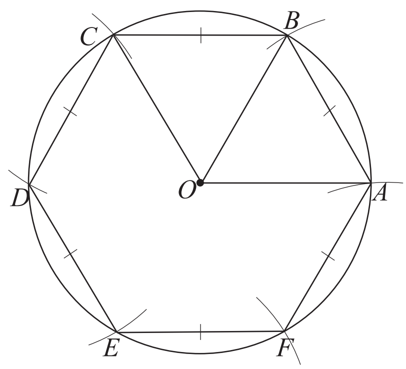


மேற்குறித்த செயற்பாட்டின் இறுதியில் உங்களுக்கு $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ என்பது தெளிவாகும். அதாவது OP ஆனது $A\hat{O}B$ இன் கோண இருசமகூறாக்கியாகும்.

14.5 கோணங்களை அமைத்தல்

பாகைமானியைப் பயன்படுத்திப் பல்வேறு கோணங்களை வரைதல் பற்றி நாம் கற்றோம். எனினும் நேர்விளிம்பையும் கவராயத்தையும் மாத்திரம் பயன்படுத்திச் சில விசேட கோணங்களை அமைக்கலாம். தரம் 8 இல் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியை அமைத்த விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

இங்கு வரையத் தேவையான அறுகோணியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்திற்குச் சமமான ஒரு தூரத்தை ஆரையாகக் கொண்டு ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மீது மேற்குறித்த அதே ஆரையுடன் விற்கள் வரையப்பட்டன. அப்போது உருவாகும் ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் ஒரு கோணம் 60^{o} ஆகும்.



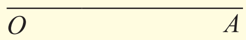
மேலும், $A\hat{O}B = 60^{o}$, $A\hat{O}C = 120^{o}$. கோணங்களை அமைப்பதற்கு இவ்வமைப்பில் பயன்படுத்திய கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

1. 60° கோணத்தை அமைத்தல்

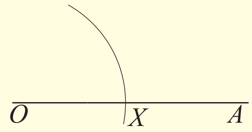
செயற்பாடு 1

OA ஒரு புயமாக இருக்குமாறு O இல் ஓர் 60° கோணத்தை அமைக்க வேண்டியுள்ளதெனக் கொள்வோம்.

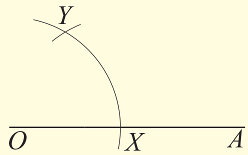
படி 1 : ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தைப் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் வரைந்து அதனை OA எனப் பெயரிடுக.



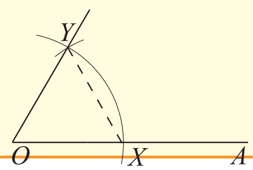
படி 2: O ஐ மையமாகக் கொண்டு பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு OA ஐ இடைவெட்டுமாறு ஒரு வில்லை வரைக. வெட்டுப் புள்ளியை X எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : கவராயத்தில் மேற்குறித்த ஆரையை மாற்றாமல் X ஐ மையமாகக் கொண்டு முதல் வில்லை வெட்டுமாறு மேலும் ஒரு வில்லை வரைக. அவ்வெட்டுப் புள்ளியை Y எனப் பெயரிடுக.



படி 4 : O ஐயும் Y ஐயும் தொடுத்துத் தேவைக்கேற்ப நீட்டுக. $A\hat{O}Y$ ஐ அளந்து அது 60° ஆக உள்ளதா எனப் பரீட்சிக்க.



மேற்குறித்த அமைப்பில் கிடைத்த ΔOXY ஆனது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். அதற்குரிய காரணத்தைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

OX, OY ஆகியன O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஆரைகள் ஆகையால் $OX = OY$ ஆகும்.

அவ்வாறே XO, XY ஆகியன X ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஆரைகள் ஆகையால் $XO = XY$.

இதற்கேற்ப $OX = XY = OY$ ஆகும்.

அதாவது ΔOXY ஆனது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும்.

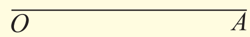
எனவே அதன் ஒவ்வொரு கோணமும் 60° ஆகும்.

ஆகவே $X\hat{O}Y = 60^{\circ}$ ஆகும்.

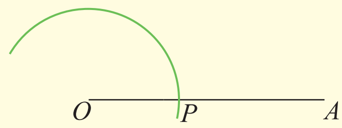
2. 120° கோணத்தை அமைத்தல்

செயற்பாடு 2

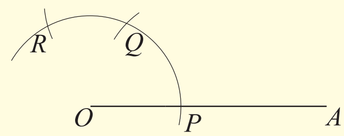
படி 1: ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து OA எனப் பெயரிடுக.



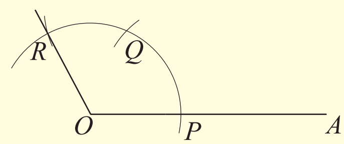
படி 2 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு OA ஐ இடை வெட்டுமாறு ஒரு வில்லை வரைக. வெட்டுப் புள்ளியை P எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : கவராயத்தில் மேற்குறித்த ஆரையை மாற்றாமல் P ஐ மையமாகக் கொண்டு உருவில் உள்ளவாறு முதல் வில்லை இடைவெட்டுமாறு ஒரு சிறிய வில்லை வரைந்து அவ்வெட்டுப் புள்ளியை Q எனப் பெயரிடுக. Q ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆரையை மாற்றாமல் மேலும் ஒரு சிறிய வில்லை முதல் வில்லை இடைவெட்டுமாறு வரைந்து, வெட்டுப் புள்ளியை R எனப் பெயரிடுக.



படி 4 : OR ஐத் தொடுத்துத் தேவைக்கேற்ப நீட்டுக. $A\hat{O}R$ ஐ அளந்து பார்க்க.



இங்கு $A\hat{O}R = 120^{o}$ ஆக இருப்பதற்குரிய காரணம் பின்வருமாறாகும். மேலே ஆராய்ந்துள்ளவாறு $A\hat{O}Q = 60^{o}$ ஆகும். மேலும் QOR உம் ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். ஆகவே $Q\hat{O}R = 60^{o}$ ஆகும். இதற்கேற்ப

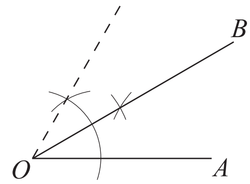
$$\begin{aligned} A\hat{O}R &= A\hat{O}Q + Q\hat{O}R \\ &= 60^{o} + 60^{o} \\ &= 120^{o} \end{aligned}$$

3. 30°, 90°, 45° கோணங்களை அமைத்தல்

உகந்தவாறு கோண இருகூறாக்கிகளை அமைப்பதன் மூலம் 30°, 90°, 45° கோணங்களை அமைக்கலாம். பின்வரும் தகவல்களையும் உருக்களையும் அவதானிப்பதன் மூலம் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களை அமைக்க.

30^{o} கோணம்

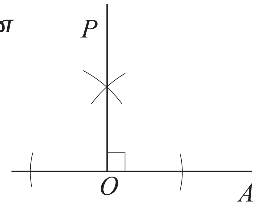
60^{o} கோணத்தை அமைத்துக் கோண இருசமகூறாக்கியை அமைக்க. $A\hat{O}B = 30^{o}$.



90^{o} கோணம்

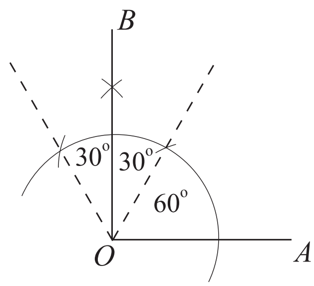
முறை I

கோட்டுத் துண்டம் AO இற்கு O இல் ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைக்க. $A\hat{O}P = 90^{o}$.



முறை II

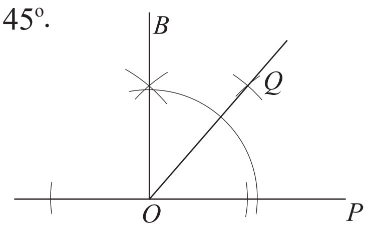
ஒரு 120^{o} கோணத்தை வரைந்து அதிலிருந்து ஓர் 60^{o} கோணத்தை இருகூறிடுக. $A\hat{O}B = 90^{o}$.



45^{o}கோணத்தை அமைத்தல்

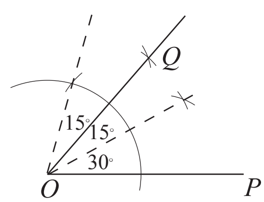
முறை I

ஒரு 90^{o} கோணத்தை வரைந்து இருசமகூறிடுக. $P\hat{O}Q = 45^{o}$.



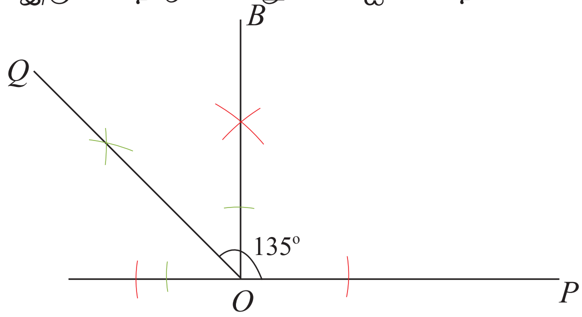
முறை II

60^{o} கோணத்தை வரைந்து அதனை இருசமகூறிடுக. அப்போது கிடைக்கும் ஒரு 30^{o} கோணத்தை மறுபடியும் இருசமகூறிடுக.
$P\hat{O}Q = 30^{o} + 15^{o} = 45^{o}$



உதாரணம் 1

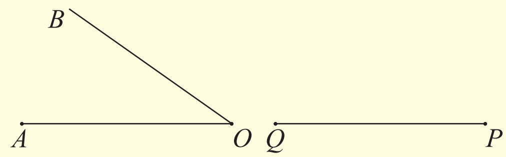
135° கோணத்தைப் பாகைமானியைப் பயன்படுத்தாமல் வரைக.
$135^{\circ} = 90^{\circ} + 45^{\circ}$ என எழுதலாம்.
ஒரு 90° பாகையை இருசமகூறிடும்போது 135° ஐப் பெறலாம்.
$P\hat{O}Q$ 135° ஆகும்



ஒரு தரப்பட்ட கோணத்தைப் பிரதிசெய்தல்

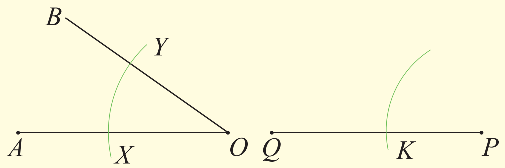
தரப்பட்டுள்ள $A\hat{O}B$ இற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைத் தரப்பட்டுள்ள புயம் PQ மீது P இல் பிரதிசெய்ய வேண்டி உள்ளதெனக் கொள்வோம். அதற்காகப் பின்வருமாறு செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 3



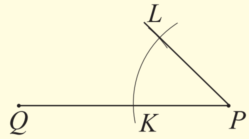
படி 1 : யாதாயினும் ஒரு கோணத்தை வரைந்து $A\hat{O}B$ எனப் பெயரிடுக. $A\hat{O}B$ ஐப் பிரதிசெய்ய வேண்டிய புயம் PQ ஐயும் வரைக.

படி 2 : O ஐ மையமாகக் கொண்டு உருவில் உள்ளவாறு OA, OB ஆகிய இரு புயங்களையும் இடைவெட்டுமாறு ஒரு வில்லை வரைந்து புயங்களை இடைவெட்டும் புள்ளிகளை X, Y எனப் பெயரிடுக. அதே ஆரையுடன் P ஐ மையமாகக் கொண்டு PQ ஐ இடைவெட்டுமாறு மேற்குறித்த XY வில்லின் அளவிலும் பார்க்க நீளங் கூடிய ஒரு வில்லை வரைக. அவ்வில்லினால் PQ இடைவெட்டப்படும் புள்ளியை K எனப் பெயரிடுக.



படி 3 : கவராயத்தில் XY ஐ ஆரையாக எடுத்து K ஐ மையமாகக் கொண்டு முதல் வில்லை இடைவெட்டுமாறு ஒரு சிறிய வில்லை வரைந்து வெட்டுப் புள்ளியை L எனப் பெயரிடுக.

படி 4 : PL ஐத் தொடுத்துத் தேவைக்கேற்ப நீட்டுக. பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி (அல்லது வேறுவிதமாக) $A\hat{O}B$ உம் $Q\hat{P}L$ உம் சமமாக உள்ளனவா எனப் பரீட்சிக்க.



பயிற்சி 14.4

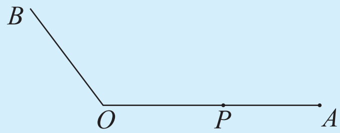
1. (i) 8 cm நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை PQ எனப் பெயரிடுக.
(ii) PQ ஒரு புயமாக இருக்குமாறு P இல் ஓர் 60^{o} கோணத்தை அமைக்க.
(iii) QP ஒரு புயமாக இருக்குமாறு Q இல் ஓர் 60^{o} கோணத்தை அமைக்க.

2. (i) 6.5 cm நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை AB எனப் பெயரிடுக.
(ii) AB ஒரு புயமாக இருக்குமாறு A இல் ஒரு 90^{o} கோணத்தை அமைக்க.
(iii) BA ஒரு புயமாக இருக்குமாறு B இல் ஒரு 30^{o} கோணத்தை அமைக்க.
(iv) அமைப்புக் கோடுகளை உகந்தவாறு நீட்டுவதன் மூலம் அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியை C எனப் பெயரிட்டு முக்கோணி ABC ஐப் பூரணப்படுத்துக.

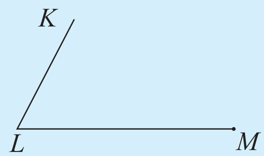
3. பாகைமானியைப் பயன்படுத்தாமல் 15^{o}, 75^{o} என்னும் பருமனுள்ள இரு கோணங்களை அமைக்க.

4. உருவில் உள்ளவாறு முக்கோணியை அமைப்பதற்குப் பின்வரும் அமைப்பைச் செய்க.
(i) 7 cm நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைந்து அதனை PQ எனப் பெயரிடுக.
(ii) PQ ஒரு புயமாக இருக்குமாறு P இல் ஒரு 30^{o} கோணத்தை அமைக்க.
(iii) QP ஒரு புயமாக இருக்குமாறு Q இல் ஒரு 45^{o} கோணத்தை அமைக்க.
(iv) முக்கோணி PQR ஐப் பூரணப்படுத்தி $P\hat{R}Q$ இன் பெறுமானத்தை அளந்து எழுதுக.

5. (i) 10 cm நீளமுள்ள நேர்கோட்டுத் துண்டம் OA ஐ வரைக.
(ii) $A\hat{O}B$ ஆனது விரிகோணமாக இருக்குமாறு ஒரு புயம் BO ஐ வரைக.
(iii) $OP = 7$ cm ஆக இருக்குமாறு OA மீது புள்ளி P ஐக் குறிக்க.
(iv) $A\hat{P}C = A\hat{O}B$ ஆக இருக்குமாறு OA இலிருந்து B இருக்கும் அதே பக்கத்தில் C இருக்குமாறு ஒரு கோட்டுத் துண்டம் PC ஐ அமைக்க.

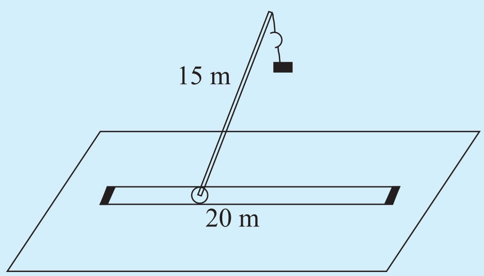


6. (i) யாதாயினும் ஒரு கூர்ங்கோணத்தை வரைந்து அதனை KLM எனப் பெயரிடுக.
(ii) $K\hat{L}M = L\hat{M}N$ ஆகுமாறு புள்ளி N ஆனது K இருக்கும் அதே பக்கத்தில் இருக்குமாறு $\hat{L}$ இற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தை M இல் பிரதிசெய்க.
(iii) KL, MN ஆகிய கோடுகள் (அவசியமெனின் நீட்டுக) இடைவெட்டும் புள்ளியை P எனப் பெயரிட்டு, PL, PM ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.



பலவினப் பயிற்சி

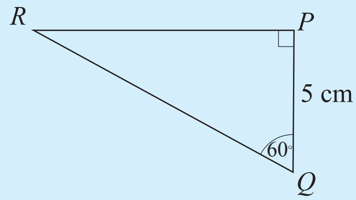
1. ஒரு தொழிற்சாலையில் இருக்கும் 20 மீற்றர் நீளமுள்ள ஒரு தண்டவாளத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு கிரேனின் புயத்தின் நீளம் 15 மீற்றர் ஆகும். அது தண்டவாளத்தின் வழியே இங்கும் அங்கும் கொண்டு செல்லப்படத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அது தண்டவாளத்தில் பொருத்தப்பட்டிருக்கும் புள்ளியைப் பற்றி ஒரு கிடைத் தளத்தில் சுழலத்தக்கதாகும். இக்கிரேனின் மூலம் பொருள்கள் பரிமாற்றப்படத்தக்க கிடைத் தளத்திலான பிரதேசத்தை அளவீடுகளுடன் ஒரு பரும்படி உருவில் காட்டுக.



2. உருவில் உள்ள முக்கோணியை அமைப்பதற்குப் பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றுக.
(i) $PQ = 5$ cm ஆக இருக்குமாறு ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டம் PQ ஐ நிலைக்குத்தாக வரைக.
(ii) P இல் ஒரு 90° கோணத்தை அமைக்க.

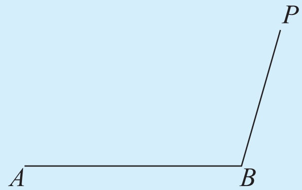
(iii) Q இல் ஓர் 60° கோணத்தை அமைக்க.

(iv) முக்கோணி PQR ஐப் பூரணப்படுத்தி $\hat{R}$ ஐ அளந்து எழுதுக.



3. (i) உருவில் உள்ளவாறு ஒரு விரிகோணம் ABP ஐ வரைக.

(ii) $A\hat{B}P = B\hat{P}K$ ஆகவும் அக்கோணங்கள் ஓர் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியாகவும் இருக்குமாறு உள்ள ஒரு புள்ளி K ஐக் கண்டு PK ஐத் தொடுக்க.

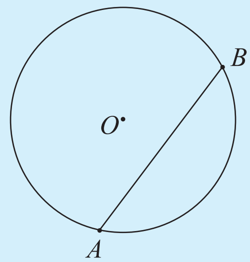


4. (i) 4 ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மையத்தை O எனப் பெயரிடுக.

(ii) வட்டத்தின் மீது ஒன்றிலிருந்தொன்று 6 cm தூரத்தில் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளைக் குறித்து கோடு AB ஐ வரைக.

(iii) புள்ளி O இலிருந்து AB இற்கு ஒரு செங்குத்துக் கோட்டினை அமைத்து அது AB ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியை N எனப் பெயரிடுக.

(iv) AN, BN ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளந்து எழுதுக.



பொழிப்பு

- ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமாகும்.
- இரு நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரங்களில் உள்ள புள்ளியின் ஒழுக்கு அவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியாகும்.
- ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து மாறாத் தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கானது அந்நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக அம்மாறாத் தூரத்தில் நேர்கோட்டின் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கும் இரு நேர்கோடுகளாகும்.
- ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரு நேர்கோடுகளிலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு அவ்விரு கோடுகளும் இடைவெட்டுவதால் உண்டாகும் கோணத்தின் இருசமகூறாக்கியாகும்.

15 சமன்பாடுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- அடைப்புகளைக் கொண்ட எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்
- பின்னங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்
- ஒரு தெரியாக் கணியத்தின் குணகம் சமனாகவுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

எளிய சமன்பாடுகள்

எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது தொடர்பாக இதற்கு முன்னர் நீங்கள் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $x + 12 = 20$	(ii) $x - 7 = 2$	(iii) $5 + m = 8$
(iv) $2x = 16$	(v) $-3x = 6$	(vi) $2p + 1 = 5$
(vii) $3b - 7 = 2$	(viii) $\frac{x}{2} = 3$	(ix) $\frac{2p}{3} = 5$
(x) $\frac{m}{5} - 1 = 8$	(xi) $2(x + 3) = 11$	(xii) $3(1 - x) = 9$

15.1 இரண்டு அடைப்புகளுடனான சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

மீட்டற் பயிற்சியில் இருந்த சில சமன்பாடுகளில் அடைப்புக்குறிகளும் அடங்கியிருந்தன. இரண்டு அடைப்புகளுடனான எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் விதத்தை இவ்வலகில் கற்கவுள்ளோம்.

இப்போது பல அடைப்புகளுடனான எளிய சமன்பாடு ஒன்றை உருவாக்கித் தீர்க்கும் விதத்தை நோக்குவோம்.

குறிப்பு

அடைப்புகளைப் பிரயோகிக்கும்போது பயன்படுத்தும் அடைப்பு வகைகள்

( )	{ }	[ ]
↑	↑	↑
எளிய அடைப்பு	சங்கிலி அடைப்பு	இரட்டை அடைப்பு

அடைப்புக்குறிகளை இடும்போது முதலில் எளிய அடைப்பையும் இரண்டாவதாகச் சங்கிலி அடைப்பையும் மூன்றாவதாக இரட்டை அடைப்பையும் இடுவது வழக்கம்.

''யாதாயினுமோர் எண்ணுடன் 3 ஐக் கூட்டி அதன் இரு மடங்கிலிருந்து 1 ஐக் கழித்துப் பெறப்படும் எண்ணின் ஐந்து மடங்குடன் 2 ஐக் கூட்டும்போது வரும் விடை 47 இற்குச் சமனாகும்'' எனத் தரப்பட்ட தரவிற்குச் சமன்பாடு ஒன்றை உருவாக்கித் தீர்க்கும் விதத்தை நோக்குவோம்.
அவ்வெண் x எனின்,
அவ்வெண்ணுடன் 3 ஐக் கூட்டப்படும்போது $x + 3$ எனப் பெறப்படும்.

அவ்வெண்ணின் இரு மடங்கை $2\,(x + 3)$ என எழுதலாம்.

இக்கோவையிலிருந்து 1 ஐக் கழிக்கும்போது $2\,(x + 3) - 1$ எனப் பெறப்படும்.

இக்கோவையின் ஐந்து மடங்கைப் பெறுவதற்குச் சங்கிலி அடைப்பைப் பயன்படுத்தலாம். அப்போது $5\{2\,(x + 3) - 1\}$ என எழுதப்படும்.

அதனுடன் 2 ஐக் கூட்டும்போது $5\{2\,(x + 3) - 1\} + 2$ ஆகும்.

இது 47 இற்குச் சமன் என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால்,
$5\{2\,(x + 3) - 1\} + 2 = 47$ என்று எழுதப்படும்.

இனி இச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து x இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

முதலில் எளிய அடைப்பை நீக்குவோம்.

$5\{2\,(x + 3) - 1\} + 2 = 47$ எனப் பெறப்படும்.

$$5\{2x + 5\} + 2 = 47$$

சங்கிலி அடைப்பை நீக்குவதனால்

$$10x + 25 + 2 = 47$$

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 27 ஐக் கழிக்கும்போது

$10x + 27 - 27 = 47 - 27$ எனப் பெறப்படும்
அதாவது $10x = 20$ எனப் பெறப்படும்.

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் 10 ஆல் வகுக்கும்போது

$$\frac{10x}{10} = \frac{20}{10}$$

$x = 2$ எனப் பெறப்படும்.
ஆகவே அவ்வெண் 2 ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்குக் குறிப்பிட்ட ஒரு முறையைப் பின்பற்ற வேண்டும் என்ற கட்டாயமில்லை. இலகுவான முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கலாம்.

அடைப்புகளுடனான சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் விதத்தை மேலும் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வதற்குச் சில உதாரணங்களைக் கற்போம்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க. $2\{3\ (2x - 1) + 4\} = 38$

$$2\{3\ (2x - 1) + 4\} = 38$$

இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுத்தல்

$$3(2x - 1) + 4 = 19$$

இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 4 ஐக் கழித்தல்

$$3(2x - 1) + 4 - 4 = 19 - 4$$

$$3(2x - 1) = 15$$

இரு பக்கங்களையும் 3 ஆல் வகுத்தல்

$$2x - 1 = 5$$

இரு பக்கங்களுக்கும் 1 ஐக் கூட்டல்

$$2x - 1 + 1 = 5 + 1$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$ (இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுப்பதனால்)

$$x = 3$$

உதாரணம் 2

தீர்க்க. $5\{4\ (x + 3) - 2\ (x - 1)\} = 72$

$$5\{4\ (x + 3) - 2\ (x - 1)\} = 72$$

$$5\{4x + 12 - 2x + 2\} = 72$$ (எளிய அடைப்பை நீக்குதல்)

$$5\{2x + 14\} = 72$$

$$10x + 70 = 72$$ (சங்கிலி அடைப்பை நீக்குதல்)

$$10x + 70 - 70 = 72 - 70$$ (இரு பக்கங்களில் இருந்தும் 70 ஐக் கழித்தல்)

$$\frac{10x}{10} = \frac{2}{10}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

பயிற்சி 15.1

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $3\{2\ (x - 1) + 2\} = 18$

(ii) $5\{3\ (x + 2) - 2\ (x - 1)\} = 60$

(iii) $6 + 2\ \{x + 3\ (x + 2)\} = 58$

(iv) $5\{2 + 3\ (x + 2)\} = 10$

(v) $2\ \{3\ (y - 1) - 2y\} = 2$

(vi) $7x + 5\ \{4 - (x + 1)\} = 17$

15.2 பின்னங்களைக் கொண்ட எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

இனி நாங்கள் பின்னங்களைக் கொண்ட எளிய சமன்பாடு ஒன்றை உருவாக்கித் தீர்க்கும் விதத்தை நோக்குவோம்.

குறித்தவொரு வியாபாரி விற்பனை செய்வதற்காகக் கொண்டு வந்த ஒரு தொகை மாம்பழங்களில் 10 பழுதடைந்துவிட்டதால் அவை அகற்றப்பட்டுவிட்டன. எஞ்சியவை 5 வீதம் கொண்ட 12 குவியல்களாக வகுக்கப்பட்டன.

இத்தரவுகளைக் குறிப்பதற்குச் சமன்பாடு ஒன்றை உருவாக்குக. வியாபாரி விற்பனைக்குக் கொண்டு வந்த மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கையை x எனக் கொள்வோம் எனவே பழுதடைந்த 10 ஐ அகற்றியபோது அக்கோவை $x-10$ ஆகும். எஞ்சியவற்றை 5 வீதம் கொண்ட குவியல்களாக்கும்போது $\frac{x-10}{5}$ எனக் கிடைக்கும்.

குவியல்களாக வேறாக்கும்போது 12 குவியல்கள் கிடைக்கின்றன.

$$\therefore \frac{x-10}{5} = 12 \text{ என எழுதலாம்.}$$

தற்போது சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் மூலம் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம்.

$$\frac{x-10}{5} = 12$$

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் 5 ஆல் பெருக்கும்போது

$$5 \times \frac{x-10}{5} = 12 \times 5$$

$$x - 10 = 60 \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களுடனும் 10 ஐக் கூட்டும்போது

$$x - 10 + 10 = 60 + 10$$

$$x = 70 \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

இதற்கேற்ப வியாபாரி 70 மாம்பழங்களை விற்பனைக்காகக் கொண்டு வந்தார்.
பின்னங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் விதத்தை மேலும் உறுதிப் படுத்திக்கொள்வதற்கு மேலும் சில உதாரணங்களைக் கற்போம்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க. $\dfrac{x+3}{2} = 15$

$$2 \times \frac{x+3}{2} = 2 \times 15 \text{ (இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் பெருக்குதல்)}$$

$$x + 3 = 30$$

$$x + 3 - 3 = 30 - 3 \text{ (இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 3 ஐக் கழித்தல்)}$$

$$x = 27$$

உதாரணம் 2

தீர்க்க. $\dfrac{y}{2} - \dfrac{y}{3} = 9$

$$\frac{y}{2} - \frac{y}{3} = 9$$

$$6 \times \frac{y}{2} - 6 \times \frac{y}{3} = 9 \times 6$$ (2, 3 ஆகிய எண்களின் பொ.ம. சி ஆகிய 6 இனால் இரு பக்கங்களையும் பெருக்குதல்)

$$3y - 2y = 54$$

$$y = 54$$

உதாரணம் 3

தீர்க்க. $2\left(\dfrac{m}{3} - 1\right) = 10$

$$2\left(\frac{m}{3} - 1\right) = 10$$

$$\frac{2}{2}\left(\frac{m}{3} - 1\right) = \frac{10}{2} \text{ (இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுத்தல்)}$$

$$\frac{m}{3} - 1 = 5$$

$$\frac{m}{3} - 1 + 1 = 5 + 1 \text{ (இரு பக்கங்கடனும் 1 ஐக் கூட்டுதல்)}$$

$$\frac{m}{3} = 6$$

$$3 \times \frac{m}{3} = 6 \times 3 \text{ (இரு பக்கங்களையும் 3 ஆல் பெருக்குதல்)}$$

$$m = 18$$

குறிப்பு

சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது ஒவ்வொரு படிமுறையின் செயற்பாடுகளையும் விவரித்து எழுத வேண்டியதில்லை.

பயிற்சி 15.2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\frac{x-2}{5}=4$ (ii) $\frac{y+8}{3}=5$ (iii) $\frac{2a}{3}+1=7$

(iv) $\frac{5b}{2}-3=2$ (v) $\frac{p+3}{2}=5$ (vi) $\frac{3m-2}{7}=4$

(vii) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{4}=7$ (viii) $\frac{2m}{3}-\frac{3m}{5}=1$ (ix) $4\left(\frac{3x}{2}-1\right)=12$

(x) $\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{3}-3\right)=2$ (xi) $\frac{m-3}{2}+1=4$ (xii) $\frac{x+1}{2}+\frac{x}{3}=8$

(xiii) $\frac{y+1}{2}+\frac{y-3}{4}=\frac{1}{2}$ (xiv) $\frac{x+3}{2}-\frac{x+1}{3}=2$

15.3 ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

ஒரு தெரியாக் கணியத்தை மட்டும் கொண்ட சமன்பாடுகளை எளிய சமன்பாடுகள் எனக் கற்றுள்ளோம். இதற்கு முன்னைய தரங்களிலும் இப்பாட ஆரம்பத்திலும் எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகளைக் கற்றோம்.

இரு தெரியாக் கணியங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதை இனி நோக்குவோம். அதற்காகப் பின்வரும் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 6 எனக் கொள்வோம்.
அவ்விரு எண்களையும் x, y எனக் கொள்வோம் எனின், கிடைக்கும் சமன்பாடு $x + y = 6$ ஆகும்.
x, y என்பவற்றின் பெறுமானங்களை நிச்சயித்துக் கூற முடியாததால் x, y ஆகியவற்றுக்குப் பொருத்தமான சில பெறுமானங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 15.1

x	y	$x+y$
– 1	7	6
0	6	6
1	5	6
2	4	6
3	3	6
4	2	6
5	1	6
6	0	6

மேலேயுள்ள அட்டவணையை அவதானிப்பதால் x, y ஆகியவற்றுக்குரிய பெறுமானங்கள் **எண்ணற்றவையாக** இருப்பதைக் காணக்கூடியதாக இருக்கின்றது. x, y ஆகியவற்றுக்கு இடையில் இன்னொரு தொடர்பைப் பெற்றுக் கொண்ட பின்னர் அவ்விரு சமன்பாடுகளையும் ஒன்றாகத் தீர்ப்பதன் மூலம் x, y ஆகியவற்றுக்குரிய பெறுமானங்களைப் பெற்றுகொள்ளலாம்.

பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழிக்கும்போது கிடைப்பது 2 எனின், அச்சந்தர்ப்பத்தில் உள்ள பெரிய எண்ணை x எனக் கொண்டு $x - y = 2$ என்னும் சமன்பாட்டை உருவாக்கலாம். அச்சமன்பாட்டையும் தனியாகக் கருதும்போது அதற்குரிய பெறுமானங்களும் எண்ணற்றவையாகக் காணப்படுகின்றன என்பதைப் பின்வரும் அட்டவணை உணர்த்துகிறது.

அட்டவணை 15.2

x	y	$x - y$
6	4	2
5	3	2
4	2	2
3	1	2
2	0	2
1	–1	2

அட்டவணைகள் 15.1 ஐயும் 15.2 ஐயும் அவதானிக்கும்போது $x + y = 6$, $x - y = 2$ என்னும் இரு சமன்பாடுகளையும் திருப்திப்படுத்தும் ஒரு சோடி பெறுமானங்கள் மாத்திரம் உள்ளதை அறிகிறோம். அதிலிருந்து $x = 4$, $y = 2$ ஆகிய பெறுமானங்கள் பெறப்படுகின்றன. எனவே இவை அவ்விரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாகின்றன.

இரு தெரியாக் கணியங்களைக் கொண்ட இவ்வாறான இரு சமன்பாடுகள் **ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்** எனப்படுகின்றன. ஒரே தடவையில் நடைபெறுவது **''ஒருங்கமை''** யின் பொருளாகும். ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் இலகுவான முறைகள் சிலவற்றைப் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் கற்றறிவோம்.

உதாரணம் 1

தீர்க்க.

$x + y = 6$

$x - y = 2$

தீர்த்தலை இலகுவாக்குகிக் கொள்வதற்காகச் சமன்பாடுகளை 1, 2 எனக் குறிப்போம்.

$x + y = 6$ ______ ①

$x - y = 2$ ______ ②

முறை 1

இது ***''பிரதியிடல் முறை''*** மூலம் தீர்த்தல் எனப்படும்.

சமன்பாடு ② இல் x ஐ எழுவாயாக மாற்றும்போது x இல் ஒரு சமன்பாடு பெறப்படும்.

$x = 2 + y$ கிடைக்கும்.

இங்குள்ள x இற்குப் பெற்ற கோவையைச் சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடுவதால் $2 + y + y = 6$ எனக் கிடைக்கும்.

இது ஓர் எளிய சமன்பாடாகும். இதனைத் தீர்த்து y இன் பெறுமானத்தைப் பெறலாம்.

$$2 - 2 + 2y = 6 - 2$$
$$2y = 4$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{4}{2}$$
$$y = 2$$

$y = 2$ ஐ $x = 2 + y$ இல் பிரதியிடும்போது x இன் பெறுமானத்தைப் பெறலாம்.

$$x = 2 + 2$$
$$x = 4$$

முறை 2

இது ***''ஒரு மாறியை அகற்றும் முறை''*** எனப்படும்.

$x + y = 6$ ______ ①

$x - y = 2$ ______ ②

சமன்பாடு ① இல் y உம் சமன்பாடு ② இல் $-y$ உம் உள்ளதை அவதானிக்கலாம். இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

① + ② $x + y + x - y = 6 + 2$ எனப் பெறப்படும்.

இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டுதல் என்பது, ''சமனான கணியங்களுடன் சமனான கணியங்களைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் கணியங்களும் சமனாகும்'' என்னும் வெளிப்படையுண்மையைப் பிரயோகித்தலாகும். இப்போது $+y$, $-y$ ஆகியன அகற்றப்பட்டு x ஐ மாத்திரம் கொண்ட எளிய சமன்பாடு ஒன்று பெறப்படும். இதனைத் தீர்த்து x இன் பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

$$2x = 8$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

$x = 4$ ஐச் சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடுவதன் மூலம் y இன் பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

$$4 + y = 6$$
$$4 - 4 + y = 6 - 4$$
$$y = 2$$

மேலுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் சோடியில் y இன் குணகங்கள் 1, -1 ஆக அமைந்துள்ளன. அதாவது குணகங்களின் எண்ரீதியிலான பெறுமானங்கள் சமனானவை (குறிகளைக் கருதாது). மேலும் சில உதாரணங்களை நோக்குவோம். இங்கே முறை 2 ஐப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் விதத்தை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 2

தீர்க்க. $2m + n = 10$

$m - n = 2$

$2m + n = 10$ ______ ①

$m - n = 2$ ______ ②

① + ②, $2m + n + m - n = 10 + 2$

$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3}$$

$$m = 4$$

இதனைச் சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடும் போது

$$2 \times 4 + n = 10$$

$$8 + n = 10$$

$$n = 10 - 8$$

$$n = 2$$

உதாரணம் 3

தீர்க்க. $2a + 3b = 7$

$a + 3b = 4$

$2a + 3b = 7$ ______ ①

$a + 3b = 4$ ______ ②

இங்கு தெரியாக் கணியம் b இன் குணகங்கள் சமனாகின்றன. எனவே b அகற்றப்படும் விதத்தில் ஒன்றிலிருந்து மற்றைய சமன்பாட்டைக் கழிப்போம்.

① − ②, $2a + 3b - (a + 3b) = 7 - 4$ (b இன் குணகங்கள் சமனாகின்றன. b அகற்றப்படுமாறு சமன்பாடுகள் இரண்டையும் கழிப்போம்.)

$$2a + 3b - a - 3b = 3$$

$$a = 3$$

$a = 3$ ஐச் சமன்பாடு ② இல் பிரதியிடும்போது

$$3 + 3b = 4$$

$$3b = 4 - 3$$

$$b = \frac{1}{3}$$

உதாரணம் 4

தீர்க்க. $x + 2y = 11$
$x - 4y = 5$

$x + 2y = 11$ ______ 1
$x - 4y = 5$ ______ 2

x இன் குணகங்கள் சமனாகின்றன. எனவே ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து மற்றையதைக் கழிப்பதனால் x ஐ நீக்கலாம்.

1 – 2, $x + 2y - (x - 4y) = 11 - 5$

$$x + 2y - x + 4y = 6$$

$$\frac{6y}{6} = \frac{6}{6}$$

$$y = 1$$

$y = 1$ ஐச் சமன்பாடு 1 இல் பிரதியிடும்போது

$$x + 2 \times 1 = 11$$

$$x + 2 = 11$$

$$x + 2 - 2 = 11 - 2$$

$$x = 9$$

பயிற்சி 15.3

1. பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடிகளைத் தீர்க்க.

(i) $a + b = 5$
$a - b = 1$

(ii) $x + y = 8$
$2x + y = 2$

(iii) $m + 2n = 7$
$m - n = 1$

(iv) $4c - b = 7$
$4c - 2b = 2$

(v) $2a + 3b = 16$
$4a + 3b = 26$

(vi) $3k + 4l = 4$
$3k - 2l = 16$

(vii) $x + 3y = 12$
$-x + y = 8$

(viii) $3m - 2n = 10$
$-3m + n = -14$

2. இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 10 ஆகவும் அவற்றின் வித்தியாசம் 2 ஆகவும் இருப்பின், அவ்விரு எண்களையும் x, y எனக் கொண்டு ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியை உருவாக்கி அவ்வெண்களைக் காண்க.

3. இரு பேனாக்களையும் ஒரு பென்சிலையும் வாங்குவதற்கு ரூ. 40 உம் இரு பேனாக்களையும் மூன்று பென்சில்களையும் வாங்குவதற்கு ரூ. 60 உம் செலவாகின்றன. பேனா ஒன்றின் விலை ரூ. q எனவும் பென்சில் ஒன்றின் விலை ரூ. p எனவும் கொண்டு ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடிகளை அமைத்துப் பேனா ஒன்றினதும் பென்சில் ஒன்றினதும் விலைகளைத் தனித்தனியே காண்க.

16 முக்கோணியின் கோணங்கள்

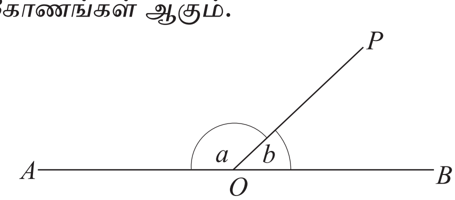
இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோணங்கள் மூன்றினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- முக்கோணி ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டுவதால் உருவாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

நேர்கோடுகள் தொடர்பாக நீங்கள் கற்றுள்ள கேத்திரகணிதப் பேறுகள் சிலவற்றை நினைவுகூர்வோம்.

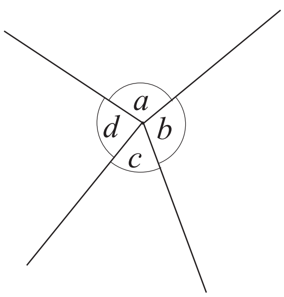
- நேர்கோடு ஒன்றின் மீது அமைந்துள்ள அடுத்துள்ள இரண்டு கோணங்கள் மிகைநிரப்பு கோணங்கள் ஆகும்.



AOB ஒரு நேர்கோடு

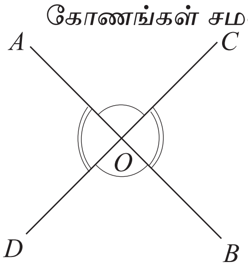
$\therefore\ a + b = 180^{\circ}$

- புள்ளி ஒன்றைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.



$a + b + c + d = 360^{\circ}$

- இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதால் உருவாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும்.

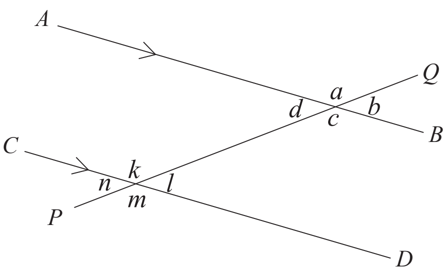


நேர்கோடுகள் AB, CD ஆகியன ஒன்றையொன்று O இல் இடைவெட்டுகின்றன.

$A\hat{O}C = B\hat{O}D$

$A\hat{O}D = C\hat{O}B$

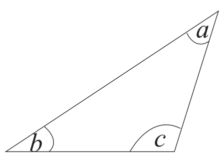
- சமாந்தர நேர்கோடுகளை குறுக்கோடி ஒன்று வெட்டும்போது உண்டாகும்



– ஒத்த கோணங்கள் சமன்
  $a = k,\ b = l,\ c = m,\ d = n$
– ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமன்
  $c = k,\ d = l$
– நேயக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.
  $d + k = 180^{\circ},\ c + l = 180^{\circ}$

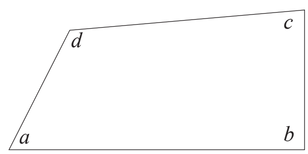
- மேலும் தரம் 8 இல் முக்கோணிகளும் நாற்பக்கல்களும் என்ற பாடத்தின் கீழ் முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோணங்கள் மூன்றினதும் கூட்டுத்தொகை 180° எனவும் நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக் கோணங்கள் நான்கினதும் கூட்டுத்தொகை 360° எனவும் கற்றுள்ளீர்கள்.
  கீழே உருக்களில் உள்ள தரவுகளுக்கு ஏற்ப,

(i)



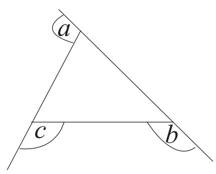
$a + b + c = 180^{\circ}$

(ii)

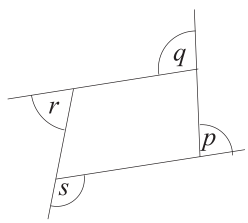


$a + b + c + d = 360^{\circ}$

- முக்கோணி ஒன்றினதும் நாற்பக்கல் ஒன்றினதும் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.



$a + b + c = 360^{\circ}$



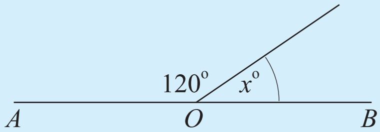
$p + q + r + s = 360^{\circ}$

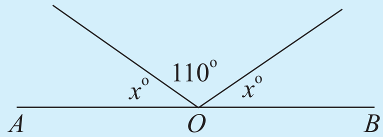
மேலே அறிந்துகொண்ட விடயங்களை மேலும் உறுதிசெய்து கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

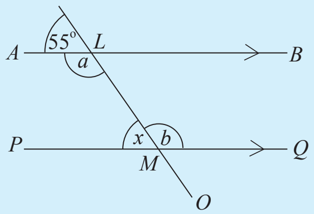
a. AOB ஒரு நேர்கோடாகும். x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) (ii)

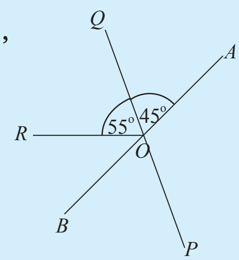




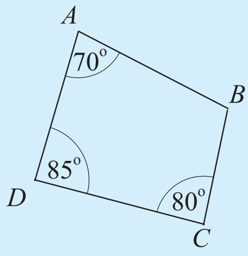
b. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப a, b, x எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



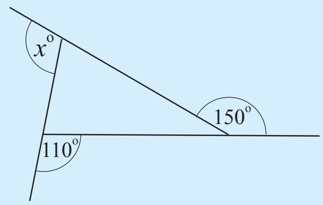
c. AOB, POQ என்பன நேர்கோடுகள் ஆகும். $P\hat{O}B$, $B\hat{O}R$, $A\hat{O}P$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



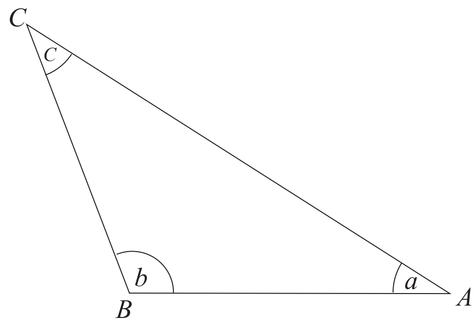
d. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



e. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



16.1 முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்கள்



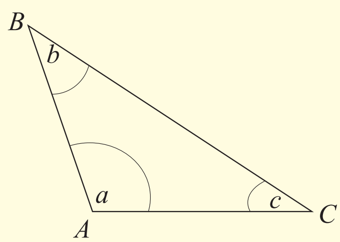
உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் a, b, c என்பவற்றால் காட்டப்பட்டுள்ள கோணங்கள் முக்கோணியின் அகக்கோணங்கள் ஆகும்.
முக்கோணியின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^{\circ}.$$

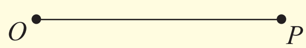
இத்தொடர்பினை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்க.

செயற்பாடு 1

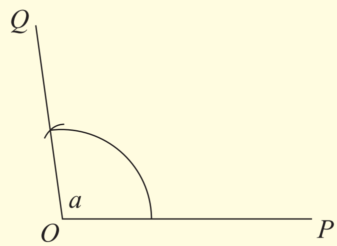
படி 1 : பயிற்சிப் புத்தகத்தில் யாதேனும் ஒரு முக்கோணியை வரைந்து அதனை ABC எனப் பெயரிடுக. (அதன் அகக்கோணங்கள் a, b, c எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.)



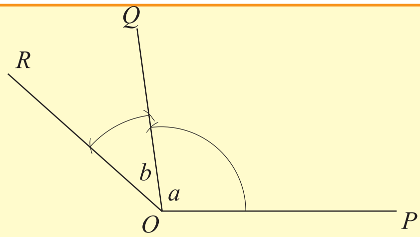
படி 2 : பயிற்சிப் புத்தகத்தில் வேறோர் இடத்தில் நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றை வரைந்து அதனை OP எனப் பெயரிடுக.



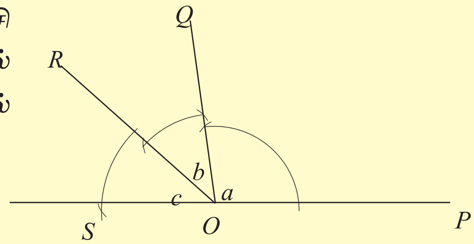
படி 3 : OP ஐ ஒரு புயமாகவும் O ஐ உச்சியாகவும் கொண்டு கவராயத்தையும் நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்தி $C\hat{A}B$ ஐ O இல் பிரதிசெய்க. (அது $P\hat{O}Q$ என உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)



படி 4: OQ ஐ ஒரு புயமாகவும் O ஐ உச்சியாகவும் கொண்டு $A\hat{B}C$ ஐ முன்பு போல் O இல் பிரதிசெய்க. (அது $Q\hat{O}R$ என உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)



படி 5: OR ஐ ஒரு புயமாகவும் O ஐ உச்சி யாகவும் கொண்டு $A\hat{C}B$ ஐ O இல் பிரதிசெய்க. (அது $R\hat{O}S$ என உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)



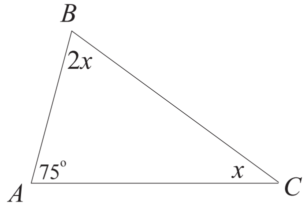
மேலே கோணம் $P\hat{O}S$ ஐ அளந்து பார்ப்பதன் மூலம் $P\hat{O}S = 180^\circ$ எனப் பெற்றிருப்பீர்கள். ஆகவே முக்கோணி ABC இன் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

தேற்றம்: முக்கோணி ஒன்றின் மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

தற்போது இதைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்ப்பது தொடர்பான உதாரணங் களைப் பார்போம்.

உதாரணம் 1

உருவில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப முக்கோணி ABC இன் $A\hat{C}B$, $A\hat{B}C$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$$75^\circ + 2x + x = 180^\circ$$
$$3x = 180^\circ - 75^\circ$$
$$3x = 105^\circ$$
$$x = \frac{105^\circ}{3}$$
$$= 35^\circ$$
$$\therefore A\hat{C}B = x = 35^\circ$$
$$A\hat{B}C = 2x = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$$

உதாரணம் 2

முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்கள் $2 : 3 : 4$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அம்மூன்று அகக்கோணங்களையும் கண்டு, அது எவ்வகையான முக்கோணி எனக் காரணங்களுடன் எழுதுக.

கோணங்களுக்கு இடையிலான விகிதம் $= 2 : 3 : 4$

$\therefore$ கோணங்களுக்கு உரிய பின்னங்கள் $= \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}$

மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை $= 180^\circ$

$\therefore$ சிறிய கோணம் $= \overset{20}{\cancel{180^\circ}} \times \frac{2}{\underset{1}{\cancel{9}}} = 40^\circ$

நடுத்தர அளவிலான கோணம் $= 180^\circ \times \frac{3}{9} = 60^\circ$

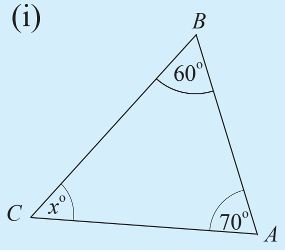
பெரிய கோணம் $= 180^\circ \times \frac{4}{9} = 80^\circ$

எனவே முக்கோணிகளின் மூன்று கோணங்களும் 40°, 60°, 80° ஆகும். மூன்று கோணங்களும் 90° இலும் குறைவு என்பதால் இது கூர்ங்கோண முக்கோணி ஆகும்.

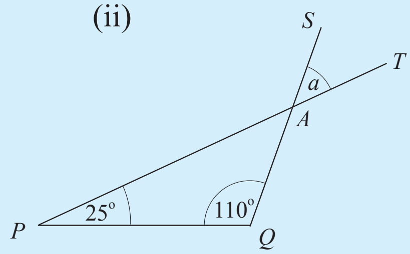
பயிற்சி 16.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துகளால் காட்டப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங் களைக் காண்க.

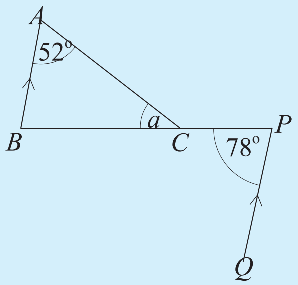
(i)



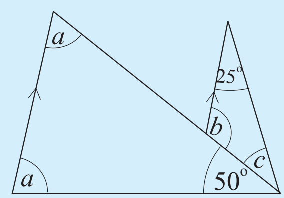
(ii)



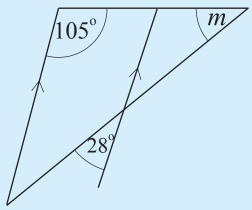
(iii)



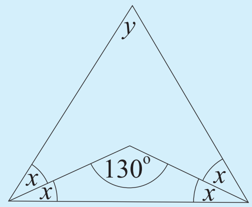
(iv)



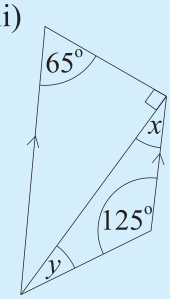
(v)



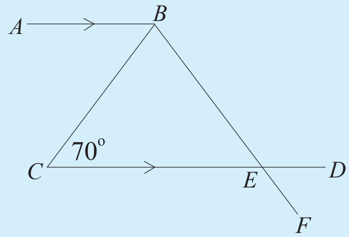
(vi)



(vii)



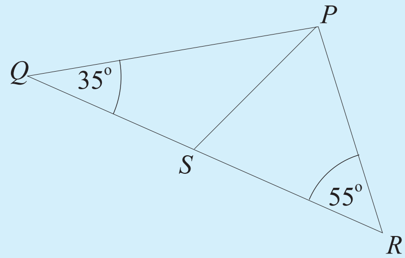
2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $A\hat{B}C = C\hat{B}E$, $B\hat{C}E = 70^{\circ}$ ஆகும். $D\hat{E}F$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



3. முக்கோணி PQR இல் QR என்ற பக்கத்தின் மீது S என்னும் புள்ளியானது $Q\hat{P}S = R\hat{P}S$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது.
$P\hat{Q}S = 35^{\circ}$, $P\hat{R}S = 55^{\circ}$ ஆகும்.

(i) $Q\hat{P}R$ இன் பருமனைக் காண்க.

(ii) $P\hat{S}R$ இன் பருமனைக் காண்க.

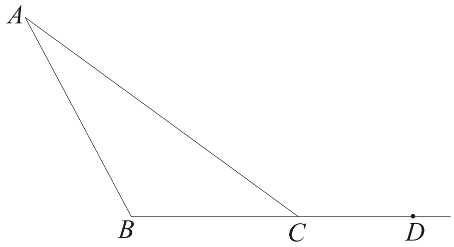


4. முக்கோணி XYZ இல் $\hat{X} + \hat{Y} = 115^{\circ}$, $\hat{Y} + \hat{Z} = 100^{\circ}$ ஆகும். $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ என்பவற்றின் பருமனைக் காண்க.

5. முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களுக்குகிடையே உள்ள விகிதம் 1 : 2 : 3 ஆகும். அதன் ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் கண்டு, கோணங்களுக்கு ஏற்ப அது எவ்வகை முக்கோணி எனக் காரணத்துடன் எழுதுக.

6. முக்கோணி ஒன்றின் ஓர் அகக்கோணம் 75° ஆகும். எஞ்சிய இரண்டு கோணங்களினதும் விகிதம் 1 : 2 ஆகும். அவ்விரண்டு கோணங்களினதும் பருமனைக் காண்க.

16.2 முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்கள்

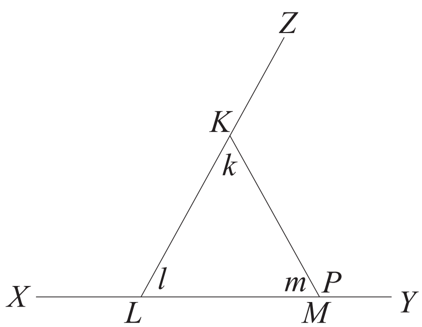


உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் நீட்டப்பட்டுள்ள பக்கம் BC யில் புள்ளி D குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது முக்கோணிக்குப் புறத்தே உருவாகியுள்ள $A\hat{C}D$ என்னும் கோணம் முக்கோணியின் ஒரு **புறக்கோணம்** எனப்படும்.

புறக்கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு அடுத்துள்ள கோணம் $A\hat{C}B$ ஆகும். முக்கோணியின் உள்ளிருக்கும் அடுத்த இரண்டு கோணங்களும் புறக்கோணம் $A\hat{C}D$ தொடர்பான **அகத்தெதிர்க் கோணங்கள்** எனப்படும்.

$C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ என்பன புறக்கோணம் $A\hat{C}D$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் ஆகும்.

இப்போது மற்றுமொரு சந்தர்ப்பத்தைப் பார்ப்போம்.



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி KLM இன் அகக் கோணங்கள் k, l, m ஆகும். அதன் பக்கங்கள் நீட்டப்பட்டு மூன்று புறக்கோணங்கள் பெறப்பட்டுள்ளன.

புறக்கோணம் $K\hat{M}Y$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் k, l ஆகும்.

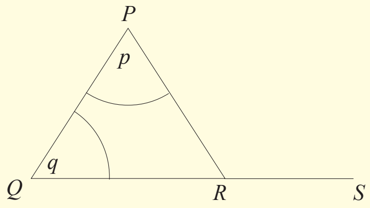
புறக்கோணம் $M\hat{K}Z$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் l, m ஆகும்.

புறக்கோணம் $X\hat{L}K$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் k, m ஆகும்.

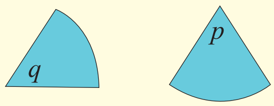
இப்போது முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் ஒன்றிற்கும் அகத்தெதிர்க் கோணங்களுக்குமிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பைப் பெறுவோம்.

செயற்பாடு 1

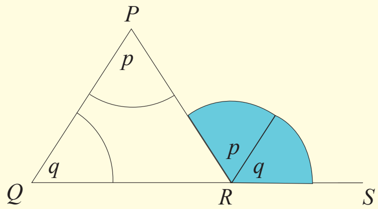
படி 1: பிறிஸ்டல் அட்டைத் துண்டு ஒன்றின் மீது அதாவது ஓரளவு தடித்த அட்டைத் துண்டு ஒன்றின் மீது உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு முக்கோணி ஒன்றை வரைக. அதன் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப் புறக்கோணம் ஒன்றைப் பெற்றுக் கொண்டு அவற்றுடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டையும் நிழற்றுக. (உருவில் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் p, q எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.)



படி 2: மேலே குறிப்பிட்ட அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டையும் வெட்டி அடர்களாக வேறாக்குக.



படி 3: வெட்டி வேறாக்கிய அகத்தெதிர்க் கோணங்களான அடர்கள் இரண்டையும் புறக்கோணத்துடன் பொருந்துமாறு வைத்துக் கொள்க.

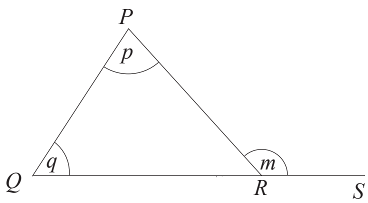


நீர் பெற்றுக் கொண்ட இப்பேற்றை வகுப்பில் உள்ள மற்றவர்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க. இச்செயற்பாட்டிலிருந்து பெறக்கூடிய முடிபை எழுதுக.

மேலே உள்ள செயற்பாட்டினூடாக முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும் என்பது புலனாகின்றது.

உங்களது பயிற்சிப் புத்தகத்தில் கூர்ங்கோண முக்கோணி, செங்கோண முக்கோணி, விரிகோண முக்கோணி என்னும் ஒவ்வொரு வகைக்கும் ஒரு முக்கோணி வீதம் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் வரைந்து, அவை ஒவ்வொன்றினதும் புறக்கோணம் ஒன்றை வரைந்து பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி அப்புறக்கோணத்தையும் அதனுடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்களையும் அளந்து புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்பதை உறுதிசெய்க.

இப்பேறினைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.



$m = p + q$ ஆகும்.

அதாவது $P\hat{R}S = R\hat{P}Q + P\hat{Q}R$ ஆகும்.

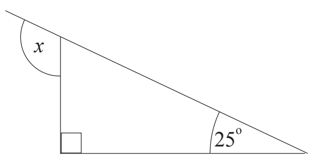
அதாவது,

தேற்றம்: முக்கோணி ஒன்றின் பக்கம் ஒன்றை நீட்டுவதனால் உண்டாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனாகும்.

இப்போது இப்பேறினைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் முறைகளை உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

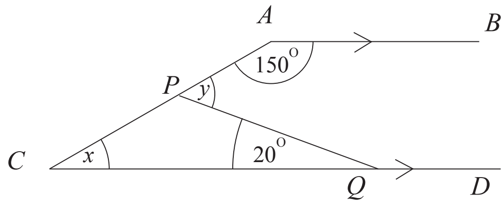
தரப்பட்டுள்ள உருவில் x இனால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணத்தின் பருமனைக் காண்க.



$$x = 90^\circ + 25^\circ$$
$$= 115^\circ$$

உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள உருவில் x, y எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



$x + 150^{\circ} = 180^{\circ}$ (AB // CD ; நேயக் கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்களாகும்)

$x = 180^{\circ} - 150^{\circ}$

$= 30^{\circ}$

$y = x + 20^{\circ}$ (Δ PCQ இன் புறக்கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

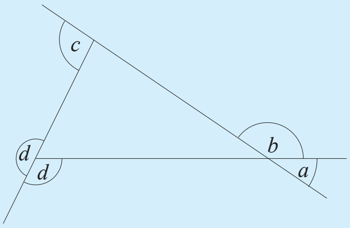
$y = 30^{\circ} + 20^{\circ}$

$= 50^{\circ}$

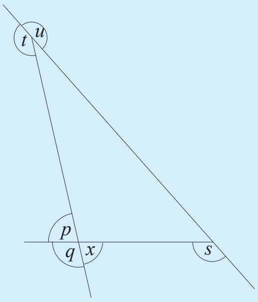
பயிற்சி 16.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணங்களில் முக்கோணியின் புறக்கோணங்களைத் தெரிவுசெய்க.

(i)

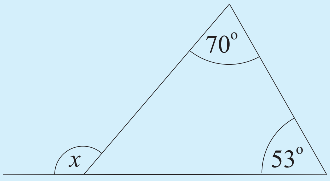


(ii)

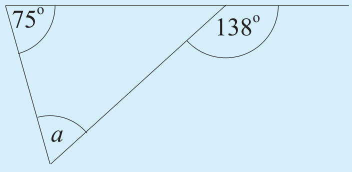


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிகளில் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துகள் குறிக்கும் கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

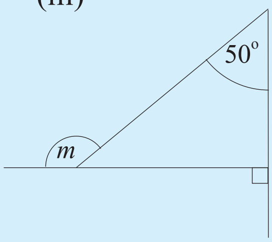
(i)



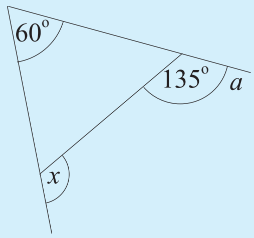
(ii)



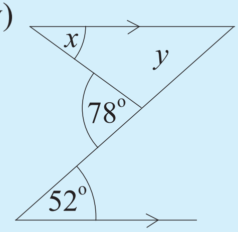
(iii)



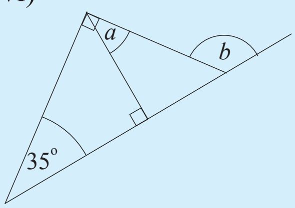
(iv)



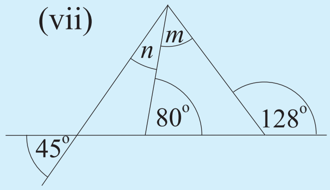
(v)



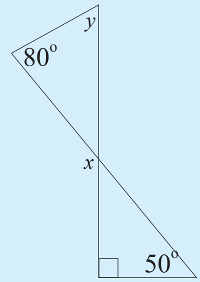
(vi)



(vii)

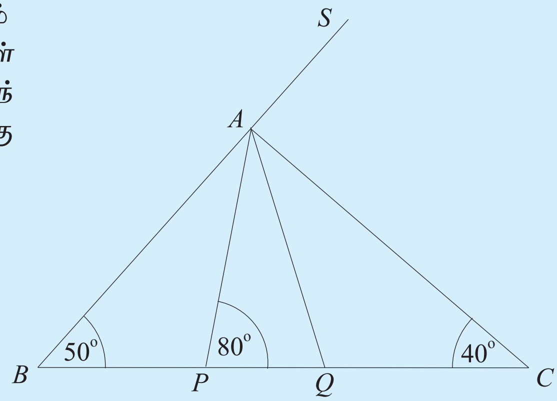


(viii)

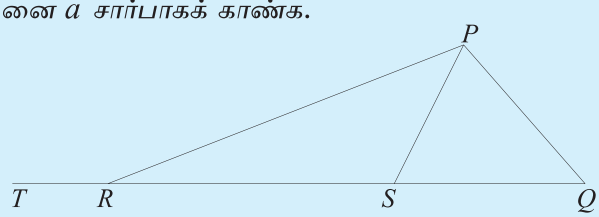


3. உருவில் முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC இன் மீது P, Q ஆகிய புள்ளிகள் $B\hat{A}P = C\hat{A}Q$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. பக்கம் BA ஆனது S இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

(i) $B\hat{A}P$ ஐக் காண்க.
(ii) $A\hat{Q}P$ ஐக் காண்க.
(iii) $S\hat{A}Q$ ஐக் காண்க.

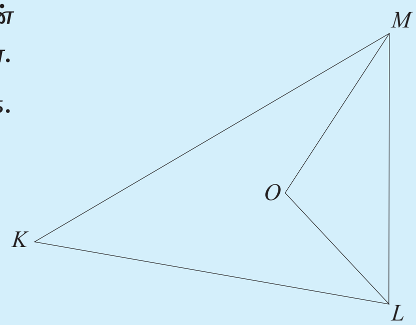


4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி PQR இல் $\hat{P}$ இன் இருசமகூறாக்கி PS ஆனது QR ஐ S இல் சந்திக்கின்றது. $S\hat{P}Q = S\hat{Q}P$ ஆகும். $S\hat{Q}P = a^{\circ}$ எனின், $P\hat{R}T$ இன் பருமனை a சார்பாகக் காண்க.

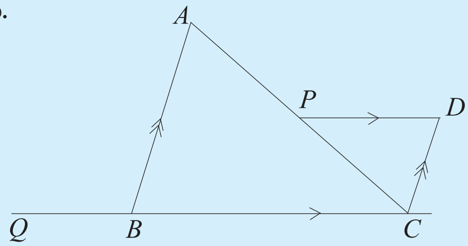


பலவினப் பயிற்சி

1. முக்கோணி KLM இல் $\hat{M}$, $\hat{L}$ ஆகிய கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் O இல் சந்திக்கின்றன. $\hat{K} = 70^{\circ}$ ஆகும். $L\hat{O}M$ இன் பருமனைக் காண்க.



2. உருவில் $A\hat{P}D = 140^{\circ}$, $P\hat{D}C = 85^{\circ}$ ஆகும். $A\hat{B}Q$ ஐக் காண்க.



பொழிப்பு

- முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.
- முக்கோணியின் பக்கம் ஒன்றை நீட்டுவதனால் உண்டாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

17 சூத்திரங்கள்

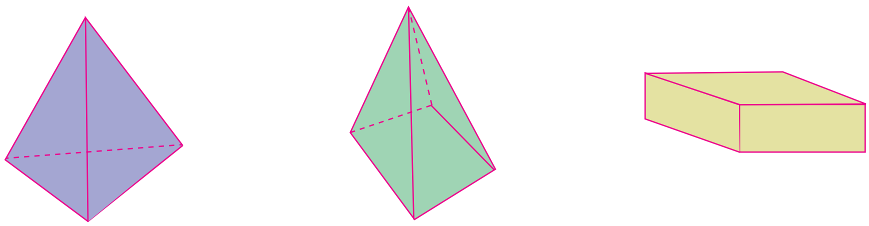
இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு சூத்திரத்தில் உள்ள எந்தவோர் உறுப்பையும் எழுவாயாக மாற்றுவதற்கும்
- ஒரு சூத்திரத்தில் உள்ள ஒரு மாறி தவிர்ந்த ஏனைய மாறிகளின் பெறுமானங்கள் தரப்படும்போது பெறுமானம் தெரியாத மாறியின் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

சூத்திரங்களின் அறிமுகம்

ஒரு திண்மப் பொருளில் உள்ள விளிம்புகள், உச்சிகள், முகங்கள் ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைகள் தொடர்பாக உள்ள ஒயிலரின் தொடர்பை ஒரு சமன்பாடாகத் தரம் 8 இல் நீங்கள் கற்றீர்கள்.



அத்தொடர்பு பின்வருமாறாகும்.

விளிம்புகளின் எண்ணிக்கை = உச்சிகளின் எண்ணிக்கை + முகங்களின் எண்ணிக்கை − 2

விளிம்புகளின் எண்ணிக்கை E எனவும் உச்சிகளின் எண்ணிக்கை V எனவும் முகங்களின் எண்ணிக்கை F எனவும் குறிப்பிட்டு அச்சமன்பாட்டை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$E = V + F - 2$$

இவ்வாறு ஒன்றுடனொன்று தொடர்புபட்ட பல மாறிகளுக்கிடையே (இரண்டு அல்லது அதிலும் கூடிய எண்ணிக்கை) உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் சமன்பாடுகள் **சூத்திரங்கள்** எனப்படும்.

சூத்திரத்தில் உள்ள கணியங்கள் மாறிகள் எனப்படும். ஒரு சூத்திரத்தில் சமன் அடையாளத்தின் ஒரு பக்கத்தில் (பொதுவாக இடப் பக்கம்) பெரும்பாலும் ஓர் உறுப்பு (மாறி) மாத்திரம் இருக்குமாறும் மற்றைய உறுப்புகள் மறுபக்கத்தில் இருக்குமாறும் எழுதப்படும். இவ்வாறு ஒரு சூத்திரத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள இத்தனி உறுப்பானது அச்சமன்பாட்டின் **எழுவாய்** எனப்படும். இதற்கேற்ப, மேற்குறித்த $E = V + F - 2$ என்ற சமன்பாட்டில் எழுவாய் E ஆகும்.

இன்னொரு சூத்திரத்தைக் கவனிப்போம். வெப்பத்தை அளக்கும்போது வெப்பத்தை செல்சியஸ் பாகை $(°C)$, பரனைற்று பாகை $(°F)$ ஆகிய அலகுகளில் எடுத்துரைக்கலாம். வெப்பத்தை அளக்கும் இரண்டு வகையான அலகுகளுக்கிடையிலான தொடர்பு பின்வருமாறாகும்.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

இங்கு F இன் மூலம் வெப்பநிலை பரனைற்றுகளிலும் C இன் மூலம் அது செல்சியஸிலும் தரப்படுகின்றது. இச்சூத்திரத்தின் எழுவாய் F ஆகும்.

கணிதம், விஞ்ஞானம் ஆகிய பாடங்களில் பயன்படுத்தப்படும் சில சூத்திரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$$p = 2(a + b)$$
$$v = u + at$$
$$s = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$y = mx + c$$
$$C = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$

ஒரு சூத்திரத்தில் உள்ள ஓர் உறுப்பை எழுவாயாக மாற்றுதல்

$E = V + F - 2$ என்னும் சூத்திரத்தின் எழுவாய் E ஆகும். எமக்குத் தேவையாயின், V ஐ அல்லது F ஐ இச்சூத்திரத்தின் எழுவாயாக மாற்றலாம். பொதுவாக வெளிப்படை யுண்மைகளைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையில் இதனைச் செய்யலாம். உதாரணமாக $E = V + F - 2$ இல் V ஐ எழுவாயாக மாற்றக்கூடிய முறையை ஆராய்வோம்.

V ஆனது சமன்பாட்டின் வலது பக்கத்தில் உள்ளது. V உடன் சேர்ந்து வலது பக்கத்தில் F உம் -2 உம் உள்ளன. F ஐயும் -2 ஐயும் வலது பக்கத்திலிருந்து நீக்குமாறு சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களுடன் $-F$ ஐயும் $+2$ ஐயும் கூட்டலாம். அப்போது $E + (-F) + 2 = V + F - 2 + (-F) + 2$ எனப் பெறப்படும்.

இதனைச் சுருக்கிப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.
$E - F + 2 = V$ $\quad (F + (-F) = 0,\ -2 + 2 = 0$ ஆகையால்)

இங்கு வலது பக்கத்தில் V எழுவாயாக உள்ளது. பொதுவாக எழுவாயை இடது பக்கத்தில் எழுதுவதால் அச்சமன்பாட்டை V ஐ எழுவாயாகக் கொண்டு பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$V = E - F + 2$

கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களின் மூலம் வெவ்வேறு விதங்களிலான சமன்பாடுகளில் எழுவாய் மாற்றப்படும் முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 1

$v = u + at$ என்னும் சூத்திரத்தில் a ஐ எழுவாயாக்குக.

இங்கு மாறி a ஆனது வேறொரு மாறியினால் (t இனால்) பெருக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு முதலில் at ஐ எழுவாயாக மாற்ற வேண்டும்.

$v = u + at$

இரு பக்கங்களிலிருந்தும் u ஐக் கழிக்கும்போது

$$v - u = u + at - u$$
$$v - u = at$$

இரு பக்கங்களையும் t இனால் வகுக்கும்போது

$$\frac{v-u}{t} = \frac{at}{t}$$

$a = \dfrac{v-u}{t}$ என a ஐ எழுவாயாகக் கொண்ட சூத்திரம் பெறப்படும்.

உதாரணம் 2

$S = \dfrac{n}{2}(a + l)$ என்னும் சூத்திரத்தில் n ஐ எழுவாயாக்குக.

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

இங்கு எழுவாயாக்க வேண்டிய மாறி n ஆனது 2 ஆல் வகுக்கப்பட்டுள்ளதுடன் $(a + l)$ இனால் பெருக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் பெருக்கி $(a + l)$ இனால் வகுக்க வேண்டும்.

இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் பெருக்கும்போது

$$2S = \cancel{2}^{1} \times \frac{n}{\cancel{2}_{1}} \times (a + l)$$

$$2S = n(a + l)$$

இரு பக்கங்களையும் $(a + l)$ இனால் வகுக்கும்போது

$$\frac{2S}{a+l} = \frac{n\,\cancel{(a+l)}^{1}}{\cancel{(a+l)}_{1}}$$

$$\frac{2S}{a+l} = n$$

$$n = \frac{2S}{a+l}$$

உதாரணம் 3

$l = a + (n-1)d$ என்னும் சூத்திரத்தில் n ஐ எழுவாயாக்குக.

$l = a + (n-1)\,d$

இங்கு எழுவாயாக்க வேண்டிய மாறியாகிய n இன் மீது கவனத்தைச் செலுத்துக. n இலிருந்து 1 ஐக் கழித்து $(n-1)$ ஐயும் $(n-1)$ ஐ d இனால் பெருக்கி $(n-1)\,d$ ஐயும் இறுதியில் $(n-1)\,d$ உடன் a ஐக் கூட்டி $a + (n-1)\,d$ ஐயும் பெற்று வலப் பக்கத்தில் உள்ள கோவை உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.

n ஐ எழுவாயாக்குவதற்கு மேலே குறிப்பிட்ட கணிதச் செய்கைகளின் மறுதலைகளை (அதாவது கழித்தலின் மறுதலை கூட்டலாகவும் பெருக்கலின் மறுதலை வகுத்தலாகவும்) பின்னிருந்து முன்னாகச் செய்ய வேண்டும். வேறொரு விதமாகக் கூறுவதாயின் பொருத்தமானவாறு வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்தி n ஐ எழுவாயாக்க வேண்டும்.

இதற்கேற்ப, முதலில் சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களிலிருந்தும் a ஐக் கழித்துச் சுருக்குவோம்.

$$l - a = a + (n-1)d - a$$
$$l - a = (n-1)d$$

இப்போது இரு பக்கங்களுடனும் d இனால் வகுத்துச் சுருக்குவோம்.

$$\frac{l-a}{d} = \frac{(n-1)\cancel{d}^{1}}{\cancel{d}_{1}}$$
$$\frac{l-a}{d} = n - 1$$

இறுதியாக இருபக்கங்களுடனும் 1 ஐக் கூட்டிச் சுருக்குவோம்.

$$\frac{l-a}{d} + 1 = n - 1 + 1$$
$$\frac{l-a}{d} + 1 = n$$
$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

தேவையாயின் இச்சூத்திரத்தின் இடது பக்கத்தை ஒரு பொதுப் பகுதியெண் கிடைக்குமாறு சுருக்க முடியுமாயினும் அவ்வாறு செய்வது கட்டாயமானதல்ல.

பயிற்சி 17.1

1. $C = 2\pi r$ என்னும் சூத்திரத்தில் r ஐ எழுவாயாக்குக.

2. $a = b - 2c$ என்னும் சூத்திரத்தில் c ஐ எழுவாயாக்குக.

3. $v = u + at$ என்னும் சூத்திரத்தில் t ஐ எழுவாயாக்குக.

4. $y = mx + c$ என்னும் சூத்திரத்தில்
   (i) c ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) m ஐ எழுவாயாக்குக.

5. $a = 2(b + c)$ என்னும் சூத்திரத்தில் c ஐ எழுவாயாக்குக.

6. $F = \frac{9}{5}C + 32$ என்னும் சூத்திரத்தில் C ஐ எழுவாயாக்குக.

7. $l = a + (n - 1)d$ என்னும் சூத்திரத்தில்
   (i) a ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) d ஐ எழுவாயாக்குக.

8. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்னும் சூத்திரத்தில் y ஐ எழுவாயாக்குக.

9. $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ என்னும் சூத்திரத்தில் r_2 ஐ எழுவாயாக்குக.

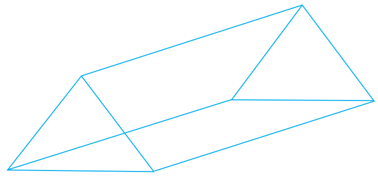
10. $ax = m(x - t)$ என்னும் சூத்திரத்தில் x ஐ எழுவாயாக்குக.

11. $P = \frac{at}{a - t}$ என்னும் சூத்திரத்தில் a ஐ எழுவாயாக்குக.

17.2 பிரதியீடு

ஒரு சூத்திரத்தில் ஒரு மாறியைத் தவிர மற்றைய மாறிகளின் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளபோது அப்பெறுமானங்களைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடுவதன் மூலம் பெறுமானம் தெரியாத மாறியின் பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

ஆறு உச்சிகளையும் ஐந்து முகங்களையும் நேர் விளிம்புகளையும் மாத்திரம் கொண்டுள்ள ஒரு திண்மப் பொருளின் விளிம்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.



உதாரணமாக மேலே உள்ள உருவைக் கருத்தில் கொண்டு,

$E = V + F - 2$

என்னும் சூத்திரத்தில் V, F ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் முறையே 6, 5 ஆயின் (உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோண அரியம் இச்சந்தர்ப்பத்துக்கான உதாரணம் ஆகும்), அப்போது E ஐக் காணலாம். V, F ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடும்போது $E = 6 + 5 - 2$

$= 9$

எனப் பெறப்படும்.

இதற்கேற்ப ஒரு முக்கோண வடிவ அரியத்தில் உள்ள விளிம்புகளின் எண்ணிக்கை 9 ஆகும்.

மேலும் சில உதாரணங்களைக் கவனத்தில் கொள்வோம்.

ஒரு சூத்திரத்தில் உள்ள தெரியாக் கணியங்களுக்குத் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டுத் தெரியாக் கணியத்தின் பெறுமானத்தைக் காணும்போது பின்பற்ற வேண்டிய இரண்டு முறைகள் உள்ளன. சூத்திரத்தில் உள்ளவாறே அதனை வைத்துக் கொண்டு தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதல் முதலாவது முறையாகும். பெறுமானம் காணப்படவேண்டிய மாறியை எழுவாயாக்கி அதன் பின்னர் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டுப் பெறுமானத்தைக் காணல் இரண்டாவது முறையாகும். இரண்டு முறைகளினாலும் ஒரு சூத்திரத்தில் உள்ள மாறியின் பெறுமானத்தைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

7 முகங்களையும் 12 விளிம்புகளையும் கொண்ட ஒரு திண்மப் பொருளில் உள்ள உச்சி களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. விளிம்புகளின் எண்ணிக்கை E எனவும் உச்சிகளின் எண்ணிக்கை V எனவும் முகங்களின் எண்ணிக்கை F எனவும் கொள்வோம்.

இங்கு பயன்படுத்த வேண்டிய சூத்திரம் $E = V + F - 2$ ஆகும். இச்சூத்திரத்தில் F, E ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. V இன் பெறுமானம் காணப்படவேண்டியதாகும். V இன் பெறுமானத்தை இரண்டு முறைகளில் காணலாம். $E = V + F - 2$ இல் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் சமன்பாட்டை V இற்காகத் தீர்ப்பது ஒரு முறையாகும். சூத்திரத்தில் V ஐ முதலில் எழுவாயாக்கிப் பின்னர் E, F ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்குவது மற்றைய முறையாகும். இரண்டு முறைகளையும் கவனிப்போம்.

முறை (i)

$E = V + F - 2$ என்னும் சூத்திரத்தில் $E = 12,\quad F = 7$ என்பவற்றைப் பிரதியிடும்போது

$$\begin{aligned} 12 &= V + 7 - 2 \\ 12 &= V + 5 \\ 12 - 5 &= V \\ 7 &= V \\ V &= 7 \end{aligned}$$

$\therefore$ உச்சிகளின் எண்ணிக்கை 7 ஆகும்.

முறை (ii)

V ஐ எழுவாக்கிய பின்னர் பெறுமானங்களைப் பிரதியிடல்

$$\begin{aligned} E &= V + F - 2 \\ E + 2 &= V + F \\ E + 2 - F &= V \\ V &= E + 2 - F \\ V &= 12 + 2 - 7 \\ V &= 7 \end{aligned}$$

$\therefore$ உச்சிகளின் எண்ணிக்கை 7 ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு சூத்திரத்தில் எழுவாயை மாற்றுவதன் ஒரு நோக்கம் அச்சூத்திரத்தில் உள்ள மாறிகளின் பெறுமானங்களை நேரடியாகப் பிரதியிட்டுப் பெறுமானம் தெரியாத மாறியின் பெறுமானத்தை இலகுவில் கண்டுகொள்வதை இலகுவாக்கிக் கொள்வதற்காகும்.

உதாரணம் 2

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $35^{\circ} C$ என்பதைப் பரனைற்றுகளில் காண்க.

இங்கு C இன் மூலம் செல்சியஸ் வெப்பநிலையும் F இன் மூலம் பரனைற்று வெப்பநிலையும் தரப்பட்டுள்ளன எனக் கருதுக.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ இல் $C = 35$ ஐப் பிரதியிடும்போது

$$\begin{aligned} 35 &= \frac{5}{9}(F - 32) \\ 35 \times 9 &= 5(F - 32) \\ \frac{{}^{7}\cancel{35} \times 9}{\cancel{5}_{1}} &= F - 32 \\ 63 &= F - 32 \\ 63 + 32 &= F \\ 95 &= F \\ F &= 95 \end{aligned}$$

$\therefore$ தரப்பட்டுள்ள வெப்பநிலை $95^{\circ} F$ ஆகும்

பயிற்சி 17.2

1. $a = (b + c) -2$ என்னும் சூத்திரத்தில் $b = 7$, $c = 6$ எனின், a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ என்னும் சூத்திரத்தில் $F = 104$ ஆயின், C இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. $y = mx + c$ என்னும் சூத்திரத்தில் $y = 11$, $x = 5$, $c = -4$ எனின், m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $C = 2\pi r$ என்னும் சூத்திரத்தில் $C = 88$, $\pi = \frac{22}{7}$ எனின், r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. $l = a + (n - 1)d$ என்னும் சூத்திரத்தில் $l = 22$, $a = -5$, $n = 10$ எனின், d இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. $S = \frac{n}{2}(a + l)$ என்னும் சூத்திரத்தில் $S = -330$, $a = 15$, $l = -48$ எனின், n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. $P = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ என்னும் சூத்திரத்தில்
   (i) r ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) $P = 495$, $C = 450$ எனின், r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. $\frac{y - c}{x} = m$ என்னும் சூத்திரத்தில்
   (i) x ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) $y = 20$, $c = -4$, $m = 3$ எனின், x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. $ax = bx - c$ என்னும் சூத்திரத்தில்
   (i) x ஐ எழுவாயாக்குக.
   (ii) $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$ எனின், x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $a = \dfrac{bx + c}{b}$ என்னும் சூத்திரத்தில்

   (i) b ஐ எழுவாயாக்குக.

   (ii) $a = 4, c = 5, x = 3$ எனின், b இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. $\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f}$ என்னும் சூத்திரத்தில் $v = 20, u = 5$ எனின், f இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ என்னும் சூத்திரத்தில் $a = 6, p = 3, q = 4$ எனின், b இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. $S = \dfrac{n}{2}\ (a + l)$ என்னும் சூத்திரத்தில்

   (i) l ஐ எழுவாயாக்குக.

   (ii) $S = 198, n = 12, a = 8$ எனின், l இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. $y = mx + c$ என்னும் சூத்திரத்தில்

   (i) m ஐ எழுவாயாக்குக.

   (ii) $y = 8, x = 9, c = 2$ எனின், m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பொழிப்பு

- அட்சரகணிதக் கோவைகளைக் கொண்ட சமன்பாடு சூத்திரம் எனப்படும்.
- ஒரு சூத்திரத்தின் ஒரு பக்கத்தில் ஓர் உறுப்பை மாத்திரம் கொண்டிருந்தால் அவ்வுறுப்பு அதன் எழுவாய் எனப்படும்.
- வெளிப்படையுண்மைகளைப் பயன்படுத்திச் சூத்திரத்தின் மாறிகளை எழுவாயாக மாற்றலாம்.
- சூத்திரத்தின் ஒரு மாறியைத் தவிர மற்றைய மாறிகள் தெரியும்போது அம்மாறியின் பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

18 ஒரு வட்டத்தின் பரிதி

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பல்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தைக் காண்பதற்கும்
- சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு வட்டத்தின் பரிதியையும் ஓர் அரைவட்டத்தின் சுற்றளவையும் காண்பதற்கும்
- ஒரு வட்டத்தின் பரிதியுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வட்டங்களைப் பற்றி நீங்கள் கற்றுள்ள விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

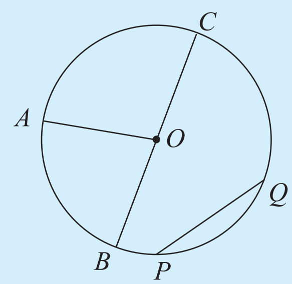
1. (a) பொருத்தமான சொற்களைப் பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து ஒரு மாறாத் தூரத்தில் இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு .... ஆகும்.

(ii) ஒரு வட்டத்தின் நடுவில் உள்ள புள்ளி அதன் .... எனப்படும்.

(b) A, B ஆகிய கூட்டங்களைப் பிரதிசெய்து தரப்பட்டுள்ள உருவைக் கொண்டு பொருத்தமான சோடிகளை இணைக்க.

A	B
புள்ளி O	ஆரை
OA	விட்டம்
BC	நாண்
OB	மையம்
PQ	



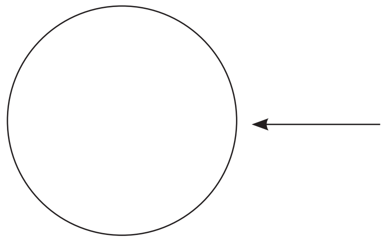
2. (i) 5 cm ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் நீளம் யாது?

(ii) 7 cm விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் ஆரை யாது?

(iii) ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் d எனின், d இற்கும் r இற்குமிடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் சமன்பாட்டை எழுதுக.

18.1 ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தையும் பரிதியையும் அளத்தல்

ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு அதன் பரிதி எனப்படும்.



25 cm நீளமுள்ள ஒரு கம்பியை உருகிணைத்துச் செய்யப்பட்டுள்ள ஒரு வட்ட வளையம் உருவில் காணப்படுகின்றது. கம்பியின் நீளம் 25 cm ஆகையால் வளையத்தின் சுற்றளவு அல்லது வட்டத்தின் பரிதி 25 cm ஆகும்.

இவ்வளையத்தின் விட்டம் எவ்வளவென ஒரே தடவையில் தீர்மானிக்க முடியாது. தரப்பட்டுள்ள ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தைக் காணத்தக்க பல்வேறு முறைகளையும் இனங்காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1

(*a*) cm/mm அளவிடை உள்ள ஒரு வரைகோலைப் பயன்படுத்தி விட்டத்தை அளத்தல்.

படி 1 : கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு விருப்பமான ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மையத்தைக் குறிக்க.

படி 2 : வட்டத்தில் ஒரு விட்டத்தை வரைந்து cm/mm அளவிடையுள்ள ஒரு வரைகோலைப் பயன்படுத்தி அதன் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

(*b*) ஒரு வட்ட அடரின் சமச்சீரச்சைப் பெற்று அதனை அளத்தல்

படி 1 : வளையல், நாணயம் போன்ற ஒரு வட்டவடிவப் பொருளைப் பயன்படுத்தி ஒரு தாளின் மீது ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதனை வெட்டி வேறுபடுத்துக.

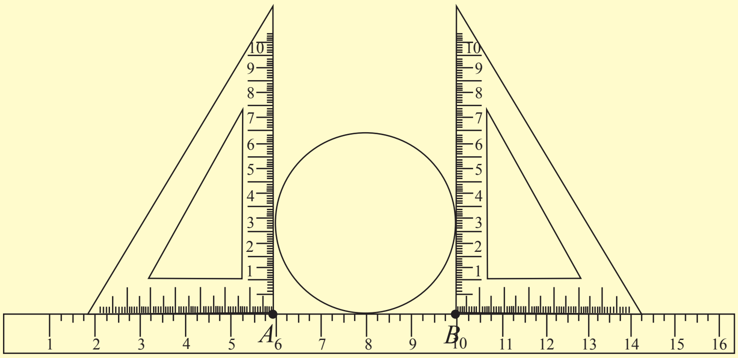
படி 2 : வேறுபடுத்திய வட்ட அடரை இரண்டாக மடிப்பதன் மூலம் (இரு பகுதிகளும் பொருந்துமாறு) அதன் சமச்சீரச்சை குறிக்க.

படி 3 : சமச்சீர் அச்சு வட்டத்தின் ஒரு விட்டம் ஆகையால் அதன் நீளத்தை அளப்பதன் மூலம் வட்டத்தின் விட்டத்தைப் பெறுக.

(c) - மூலைமட்டங்களைப் பயன்படுத்தி விட்டத்தை அளத்தல்

படி 1: ஒரு நாணயம், ஒரு வளையம், ஒரு உருளைத் தகரப் பேணி, இரு மூலைமட்டங்கள், ஒரு வரைகோல் ஆகியவற்றைப் பெறுக.

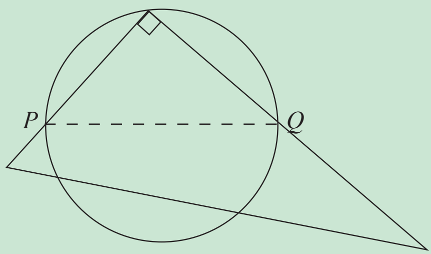
படி 2 : உருவில் உள்ளவாறு வரைகோலைத் தொடுமாறு வளையத்தையும் இரு மூலைமட்டங்களையும் வைத்து A, B எனக் காட்டப்பட்டுள்ள வாசிப்புகளைக் கொண்டு வட்டத்தின் விட்டத்தைக் காண்க.



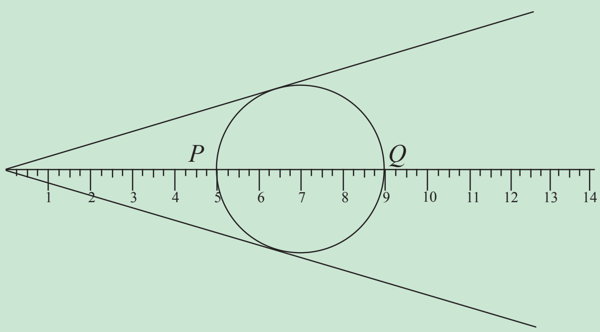
படி 3 : எஞ்சியுள்ள பொருள்களுக்காகவும் மேற்குறித்தவாறு செயற்பாட்டில் ஈடுபட்டு, வட்ட முகங்களின் விட்டங்களைக் கண்டு பயிற்சிப் புத்தகத்தில் எழுதுக.

விட்டத்தைக் காண்பதற்கான மேலதிக முறைகள்

1. ஒரு தாளில் ஒரு செங்கோண மூலையை அமைத்து அதனை உருவில் உள்ளவாறு வட்டத்தின் மீது வைக்கும்போது 90° கோணத்தின் புயங்கள் வட்டத்தைச் சந்திக்கும் இரு புள்ளிகளுக்கும் (P உம் Q உம்) இடையே உள்ள தூரம் அவ்வட்டத்தின் விட்டமாகும்.



2. ஒரு பிறிஸ்ரல் அட்டையில் ஒரு கோணத்தை வரைந்து, அதன் கோண இருசமகூறாக்கியையும் வரைந்து கோண இருசம கூறாக்கியின் உச்சியிலிருந்து அளவு கோல் ஒன்றினைப் பயன் படுத்தியும் உருவில் காட்டப் பட்டுள்ளவாறு ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தைப் பெறலாம்.

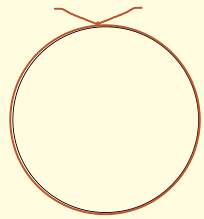


ஒரு வட்டத்தின் பரிதியை அளத்தல்

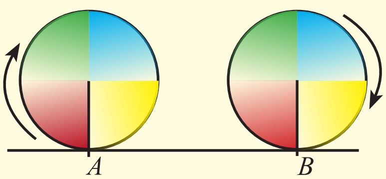
நாணயம் போன்ற ஒரு வட்ட அடரின் பரிதியைக் காண்பதற்குப் பயன்படுத்தத்தக்க முறைகள் பற்றிய விளக்கத்தைப் பெறுவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 2

1. ஒரு நூல் துண்டில் ஒரு குறியை இட்டு அவ்விடத்திலிருந்து தொடங்கி அந்நூலை வட்ட வடிவ இரண்டு ரூபாய் நாணயத்தைச் சுற்றி இழுத்து ஒரு சுற்றை அமைக்க. சுற்று முடிவடைந்த இடத்திலும் நூலின் ஒரு குறியை இட்டு, இரு குறிகளுக்குமிடையே உள்ள தூரத்தை அளவு நாடாவைப் பயன்படுத்தி அளப்பதன் மூலம் பரிதியைப் பெறுக.



2. ஒரு தாளின் மீது ஒரு நேர்கோட்டினை வரைக. வட்ட தட்டின் மீது ஒரு குறியை இடுக. நேர்கோடு மீதும் ஒரு குறியை இடுக. இரு குறிகளும் பொருந்துமாறு வைத்து வட்ட தட்டை நேர்கோடு வழியே ஒரு முழுச் சுற்றுக்குச் சுற்றுக. வட்டத் தட்டு முன்னோக்கிச் சென்ற தூரத்தை அளப்பதன் மூலம் அதன் பரிதியைப் பெறுக.



வட்டத்தின் பரிதிக்கான சூத்திரத்தை உருவாக்கல்

ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்திற்கும் அதன் பரிதிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பை இனங்காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 3

வட்ட முகம் உள்ள சில பொருள்களைப் பெற்று மேலே இனங்கண்ட முறைகளைப் பயன்படுத்திப் பரிதியையும் விட்டத்தையும் அளந்து பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

பொருள்	விட்டம் (d)	பரிதி c (c)	$\frac{c}{d}$ மூன்று தசம தானங்களுக்கு
1. அட்டைத் தாளிலிருந்து வெட்டி எடுத்த ஒரு வட்ட அடர்			
2. 2 ரூபாய் நாணயம்			
3. ஒரு தகரப் பேணியின் மூடி			
4. இறுவட்டு (CD)			

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் $\frac{c}{d}$ இற்குப் பெற்ற பெறுமானங்களை நண்பர்களின் விடையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து உங்கள் முடிபை எழுதுக.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் நீங்கள் அமைத்த எல்லா வட்டங்களுக்கும் $\frac{c}{d}$ இன் பெறுமானமாக 3.14 அல்லது அதற்குக் கிட்டிய ஒரு பெறுமானத்தைப் பெற்றிருப்பீர்கள். இப்பெறுமானம் எந்தவொரு வட்டத்திற்கும் பொருந்துமெனக் கணித அறிஞர்கள் கண்டுபிடித்துள்ளனர். இதற்கேற்ப ஒரு வட்டத்திற்கும் இந்த விகிதம் $\frac{c}{d}$ ஒரு மாறாப் பெறுமானமாக இருக்கும் அதே வேளை அது π என்னும் குறியீட்டினால் காட்டப்படுகின்றது. அப்பெறுமானம் இரண்டு தசமதானங்களுக்கு அண்ணளவாக 3.14 எனவும் அது ஒரு பின்ன எண்ணாகிய $\frac{22}{7}$ இற்கு அண்ணளவாகச் சமம் எனவும் நிறுவப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{c}{d} = \pi$$

அதாவது

$$c = \pi d$$

எனவும் ஒரு சமன்பாடாக எழுதிக் காட்டலாம். இது ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்திற்கும் பரிதிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் சமன்பாடாகும். அவ்வாறே ஆரைக்கும் பரிதிக்குமிடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டும் சமன்பாட்டையும் இவ்வாறு பெறலாம்.

$$d = 2r \text{ ஆகையால் } c = \pi \times 2r$$

அதாவது

$$c = 2\pi r$$

ஒரு வட்டத்தின் பரிதி c ஆகவும் விட்டம் d ஆகவும் ஆரை r ஆகவும் இருக்கும்போது

$$\boxed{c = \pi d}$$

அல்லது $\boxed{c = 2\pi r}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

7 cm ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதியைக் காண்க. $\pi = \frac{22}{7}$ எனப் பயன்படுத்துக.

பரிதி $c = 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{7}^1$

$= 44$

$\therefore$ பரிதி 44 cm ஆகும்.

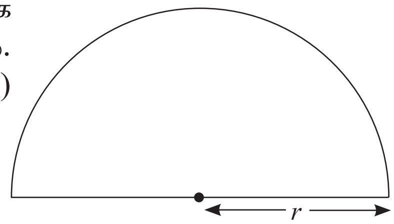
பயிற்சி 18.1

1. பின்வரும் அளவுகளை ஆரையாக/விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் பரிதியைக் காண்க. π இன் பெறுமதி $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

(i) ஆரை 7 cm
(ii) ஆரை 21 m
(iii) ஆரை 10.5 cm
(iv) ஆரை $17\frac{1}{2}$ m
(v) விட்டம் $\frac{7}{2}$ m
(vi) விட்டம் 28 cm
(vii) விட்டம் 15.4 cm
(viii) விட்டம் $3\frac{1}{9}$ m

18.2 அரை வட்ட அடர் ஒன்றின் சுற்றளவு

வட்ட அடர் ஒன்றை விட்டத்தினூடாக இரண்டாக வேறுபடுத்தும்போது இரு சம பகுதிகள் கிடைக்கும். அந்த ஒரு பகுதி அரைவட்ட அடர் (அரைவட்டம்) எனப்படும்.



ஓர் அரைவட்டத்தின் வளைந்த கோட்டின் நீளம் வில்லின் நீளம் எனப்படும். அது வட்டத்தின் பரிதியில் அரைவாசியாகும். அதற்கேற்ப

அரைவட்ட வில்லின் நீளம் $= \frac{1}{\cancel{2}} \times (\cancel{2}^{1}\pi r)$

$= \pi r$

ஓர் அரைவட்டத்தின் சுற்றளவைக் காண்பதற்கு இவ்வில் நீளத்துடன் விட்டத்தைக் கூட்ட வேண்டும் என்பது உருவிற்கேற்ப தெளிவாகும். இதற்கமைய

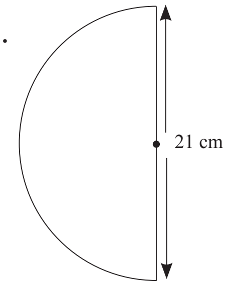
அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு $= \pi r + d$

$= \pi r + 2r$ ($\because$ $d = 2r$ என்பதால்)

$\therefore$ அரைவட்டத்தின் சுற்றளவு $= \pi r + 2r$

உதாரணம் 1

உருவில் காணப்படும் அரைவட்டத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.



$$\text{விட்டம் } d \text{ ஆகவுள்ள அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் } = \frac{1}{2}\pi d$$

$$\therefore \text{ விட்டம் } 21 \text{ cm ஆகவுள்ள அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் } = \frac{1}{\cancel{2}_1} \times \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{7}_1} \times \cancel{21}^3$$

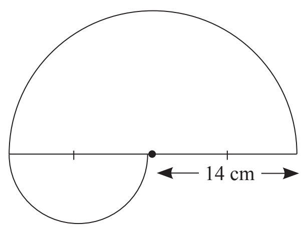
$$= 33$$

$$\therefore \text{ உருவத்தின் சுற்றளவு } = 33 + 21$$

$$= 54 \text{ cm}$$

உதாரணம் 2

14 cm ஆரையும் 14 cm விட்டமும் உள்ள இரு அரைவட்டங்களைக் கொண்ட ஒரு கூட்டுரு இங்கு காணப்படுகின்றது. அதன் சுற்றளவைக் காண்க.



ஆரை r ஐ உடைய அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ } 14 \text{ cm ஆரையுள்ள அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் } = \frac{1}{{}_1\cancel{2}} \times \cancel{2}^1 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{14}^2 \text{ cm}$$

$$= 44 \text{ cm}$$

$$\text{விட்டம் } d \text{ ஐ உடைய அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம்} = \frac{1}{2}\pi d$$

$$\therefore 14 \text{ cm விட்டமுள்ள அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளம் } = \frac{1}{{}_1\cancel{2}} \times \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{7}_1} \times \cancel{14}^2 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{ உருவத்தின் சுற்றளவு} = 44 + 22 + 14$$

$$= 80 \text{ cm}$$

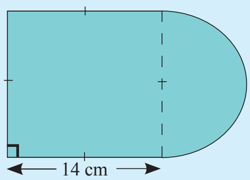
பயிற்சி 18.2

1. பின்வரும் அளவுகளை உடைய அரைவட்ட அடர்களின் சுற்றளவுகளைக் காண்க. π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

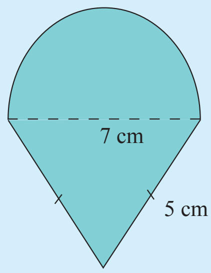
   (i) ஆரை 14 cm (ii) விட்டம் 7 cm

2. பின்வரும் தள உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க. π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

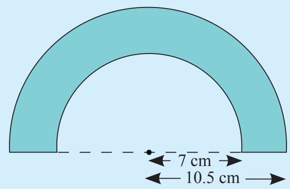
i.



ii.



iii.



18.4 வட்டத்தின் பரிதியுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்கள்

உதாரணம் 1

35 cm ஆரையுள்ள ஒரு சில்லு ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் சுழல்கின்றது.

(i) சில்லு 1 சுற்று சுழலும்போது அது முன்னோக்கிச் செல்லும் தூரத்தை மீற்றரில் காண்க.

(ii) 100 சுற்றுகள் சுழலும்போது எத்தனை மீற்றர் செல்லும்?

(iii) 1.1 km தூரம் செல்வதற்குச் சில்லு குறைந்தபட்சம் எத்தனை முழுச் சுற்றுகள் சுழல வேண்டும்?

(i) சில்லு ஒரு முழு சுற்றுக்குச் சுழலும்போது அதன் பரிதிக்குச் சமமான தூரத்திற்கு முன்னோக்கிச் செல்கின்றது.

$$\text{பரிதி} = 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_{1}} \times \cancel{35}^{5} \text{ cm} = 220 \text{ cm}$$

$\therefore$ அது 1 சுற்றில் செல்லும் தூரம் $= 2.2$ m

(ii) 100 சுற்றுகளில் செல்லும் தூரம் $= 2.2 \text{ m} \times 100$

$$= 220 \text{ m}$$

(iii) சில்லு முன்னோக்கிச் செல்லும் தூரம் $= 1.1$ km

$= 1100$ m

1 சுற்றில் செல்லும் தூரம் $= 2.2$ m

$\therefore$ சுற்றுகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{1100}{2.2}$

$= 500$

1.1 km தூரம் செல்வதற்கு 500 முழுச் சுற்றுகள் சுழல வேண்டும்.

உதாரணம் 2

66 cm நீளமுள்ள ஒரு கம்பியின் இரு நுனிகளையும் உருகிணைப்பதன் மூலம் ஒரு வட்ட வடிவமான வளையம் செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரையைக் காண்க.

ஆரை r எனின்,

$c = 2\pi r$ ஆகையால்

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 66$$

$$r = \overset{3}{\cancel{66}} \times \frac{7}{\underset{1}{\cancel{22}}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{21}{2}$$

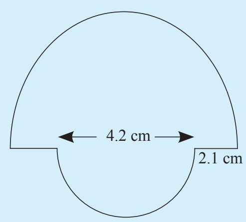
$$= 10.5 \text{ cm}$$

$\therefore$ ஆரை $= 10.5$ cm

பயிற்சி 18.3

பயிற்சிகளில் π இன் பெறுமானத்தை $\pi = \dfrac{22}{7}$ எனக் கொள்க.

1. 4.2 cm ஆரையுள்ள ஓர் அரைவட்டத்தையும் 4.2 cm விட்டமுள்ள ஓர் அரைவட்டத்தையும் சேர்த்துத் தயாரிக்கப்பட்டுள்ள ஓர் அடர் உருவில் காணப்படுகின்றது. ஓர் அலங்காரப் பெட்டியில் ஒட்டுவதற்குத் தயாரிக்கப் பட்டுள்ள இவ்வடரைச் சுற்றி ஒரு பொன்னிற றிபன் ஒட்டப்பட்டுள்ளது.



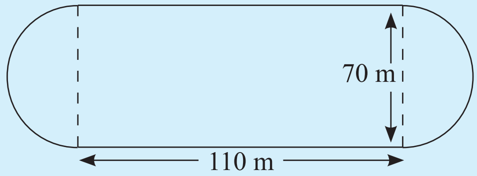
(i) அடரைச் சுற்றி ஒட்டுவதற்குத் தேவையான றிபனின் குறைந்தபட்ச நீளத்தைக் காண்க.

(ii) இத்தகைய 500 அடர்களில் ஒட்டுவதற்குத் தேவையான றிபனின் குறைந்தபட்ச நீளத்தைக் காண்க.

2. ஒரு வட்ட நிலப் பகுதியின் பரிதி 440 m ஆகும். அதன் ஆரையைக் காண்க.

3. ஓர் அரைவட்ட அடரின் சுற்றளவு 39.6 cm ஆகும். அந்த அரைவட்டத்தின் விட்டத்தைக் காண்க.

4. உருவில் ஒரு செவ்வகப் பகுதியையும் இரு அரைவட்டப் பகுதிகளையும் கொண்ட ஒரு மைதானத்தின் பரும்படிப் படம் காணப்படுகின்றது.



(i) மைதானத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

(ii) மைதானத்தைச் சுற்றி $2\frac{1}{2}$ சுற்றுகளுக்கு ஓடும்போது சென்றுள்ள தூரம் 1 km இலும் கூடியதெனக் காட்டுக.

5. ஒரு விளையாட்டு வீரர் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் சைக்கிளைச் செலுத்து கின்றார். சைக்கிளின் ஒரு சில்லின் ஆரை 28 cm ஆகும்.

(i) சில்லு ஒரு முழுச் சுற்று சுழலும்போது சைக்கிள் முன்னோக்கிச் செல்லும் தூரத்தைக் காண்க.

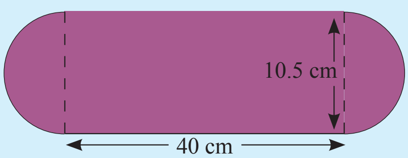
(ii) சில்லு 50 சுற்றுகள் சுழலும்போது சைக்கிள் முன்னோக்கிச் செல்லும் தூரத்தை மீற்றரில் காண்க.

(iii) 1500 m தூரம் செல்கையில் சைக்கிள் சில்லு குறைந்தபட்சம் 800 சுற்றுகளேனும் சுழலுமென விளையாட்டு வீரர் கூறுகின்றார். இக்கருத்துடன் நீர் இணங்குகிறீரா? விடையை விளக்குக.

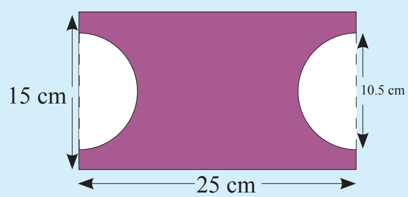
பலவினப் பயிற்சி

1. நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் சுற்றளவைக் காண்க.

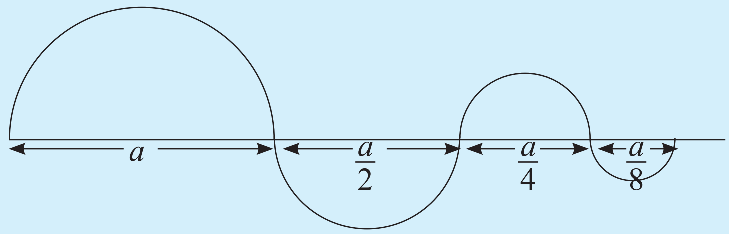
i.



ii.

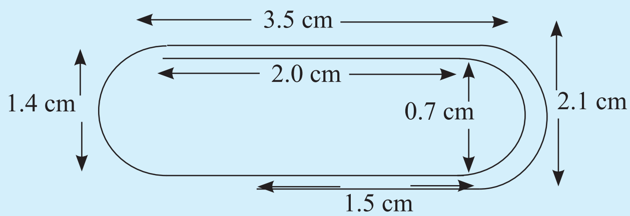


2.



உருவில் காணப்படும் நான்கு அரைவட்டப் பகுதிகளைக் கொண்ட ஓர் ஒழுங்கமைப்பைத் தயார்செய்வதற்குத் தேவையான கம்பியின் குறைந்தபட்ச நீளம் $\frac{135a}{28}$ எனக் காட்டுக. $(\pi = \frac{22}{7})$

3. கீழே உருவில் கடதாசிக் கௌவி (paper clip) ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கு அமைய அவ்வாறான கௌவி ஒன்றைத் தயாரிப்பதற்குத் தேவையான கம்பித் துண்டின் நீளத்தைக் காண்க.



பொழிப்பு

- வட்டம் ஒன்றின் பரிதி c ஆனது $c = \pi d$ அல்லது $c = 2\pi r$ இனால் தரப்படும்.
- அரைவட்ட அடர் ஒன்றின் சுற்றளவு $\pi r + 2r$ இனால் தரப்படும்.

19 பைதகரசின் தொடர்பு

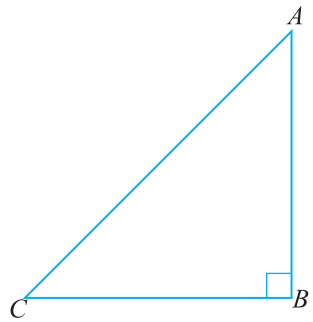
இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- செங்கோண முக்கோணியுடன் தொடர்புபட்ட பைதகரசின் தொடர்பைப் பெறுவதற்கும்
- பைதகரசின் தொடர்பின் மூலம் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

செங்கோண முக்கோணி

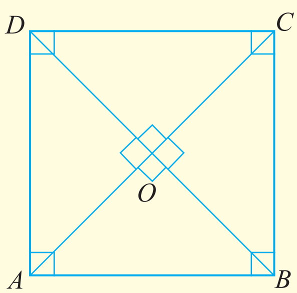
முக்கோணி ஒன்றின் ஒரு கோணம் 90° (செங்கோணம்) எனின், அது செங்கோண முக்கோணி எனப்படும். செங்கோணத்திற்கு எதிரான பக்கம் செம்பக்கம் எனவும் ஏனைய இரண்டு பக்கங்களும் செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்கள் எனவும் அழைக்கப்படும்.
கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC ஐக் கருதும்போது,



$A\hat{B}C = 90^\circ$
AC என்பது செம்பக்கம் ஆகும்.
AB, BC என்பன செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்கள் ஆகும்.

செயற்பாடு 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் உள்ள செங்கோண முக்கோணிகளை இனங்கண்டு, தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.



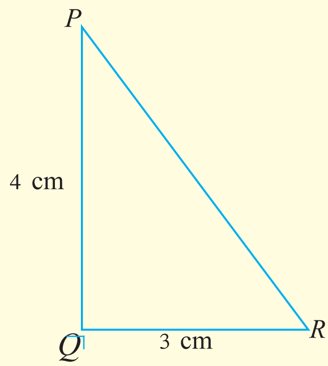
முக்கோணி	செம்பக்கம்	செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்கள்
AOB	AB	AO, BO
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

19.1 பைதகரசின் தொடர்பு

கிரேக்கத்தில் வாழ்ந்த பைதகரஸ் என்னும் கணிதவியலாளர் செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையிலான தொடர்பை முன்வைத்தார். இத்தொடர்பைச் செயற்பாடு ஒன்றின் மூலம் விளங்குவோம்.

பைதகரஸ்

செயற்பாடு 1

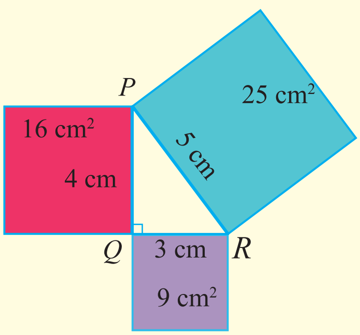


படி 1 : உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $QR = 3$ cm, $QP = 4$ cm, $P\hat{Q}R = 90°$ ஆகுமாறு செங்கோண முக்கோணி PQR ஐ வரைக. இதற்கு மூலைமட்டத்தைப் பயன்படுத்துக.

படி 2 : செம்பக்கம் PR ஐ அளந்து அது 5 cm என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

படி 3 : பக்கம் ஒன்றின் நீளம் 3 cm, 4 cm, 5 cm ஆகவுள்ள மூன்று சதுரங்களை வரைந்து, அவற்றை வெட்டியெடுத்து முறையே QR, QP, PR ஆகிய பக்கங்களின் மீது வைத்து, கீழே உருவில் காட்டியவாறு ஒட்டுக.

படி 4 : ஒவ்வொரு சதுரத்தினதும் பரப்பளவைக் கணிக்க.



QR இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 3 cm × 3 cm = 9 cm²

QP இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 4 cm × 4 cm = 16 cm²

PR இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = 5 cm × 5 cm = 25 cm²

இப்போது இப்பரப்பளவுகளுக்கிடையில் கீழே தரப்பட்டவாறான ஒரு தொடர்பு காணப்படுவதை அவதானிக்க.

செம்பக்கம் PR இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு	=	பக்கம் QR இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு	+	பக்கம் PQ இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு

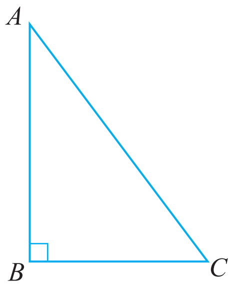
- செங்கோணத்தை ஆக்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் 6 cm, 8 cm ஆகவுள்ள செங்கோண முக்கோணி ஒன்றை வரைந்து, மேலே பெற்ற தொடர்பு காணப்படுகின்றதா என்பதைப் பரீட்சித்துப் பார்க்க.

செங்கோண முக்கோணியுடன் தொடர்புபட்ட பைதகரசின் தொடர்பைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவானது செங்கோணத்தை ஆக்கும் இரண்டு பக்கங்களின் மீதும் வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்.

பைதகரசின் தொடர்பானது பரப்பளவுகளின் மூலம் எடுத்துரைக்கப்பட்டாலும், அதனைப் பின்வருமாறு முக்கோணியின் பக்கங்களின் மூலம் இலகுவாக எழுதலாம்.

பைதகரசின் தேற்றத்தை முக்கோணியின் பக்கங்களின் மூலம் எழுதும் முறை



பக்கம் AB இன் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு $= AB \times AB = AB^2$

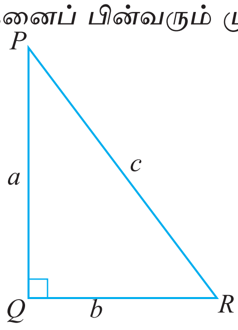
BC இன் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு $= BC \times BC = BC^2$

AC இன் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு $= AC \times AC = AC^2$

எனவே பைதகரசின் தொடர்பிற்கு ஏற்ப,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

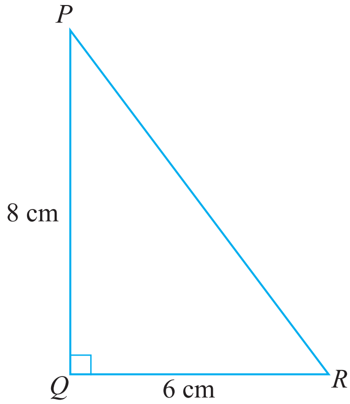
இதனைப் பின்வரும் முறையிலும் எழுதலாம்.



பைதகரசின் தொடர்பிற்கு ஏற்ப
$c^2 = a^2 + b^2$

உதாரணம் 1

செங்கோண முக்கோணி PQR இல் $PQ = 8$ cm, $QR = 6$ cm ஆகும். பக்கம் PR இன் நீளத்தைக் காண்க.



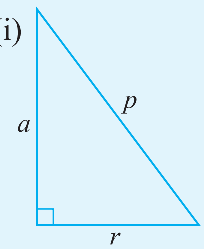
செங்கோண முக்கோணி PQR இற்குப் பைதகரசின் தொடர்பைப் பிரயோகிக்கும்போது

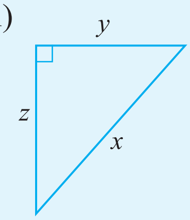
$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$
$$PR^2 = 8^2 + 6^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$PR = \sqrt{100}$$
$$= 10$$

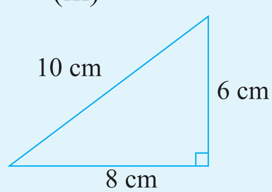
$\therefore$ PR இன் நீளம் 10 cm ஆகும்.

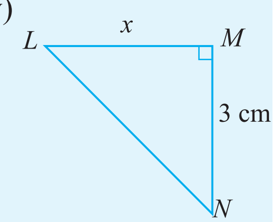
பயிற்சி 19.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணியிலும் தரப்பட்டுள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் சார்பில் பைதகரசின் தொடர்பை எழுதுக.

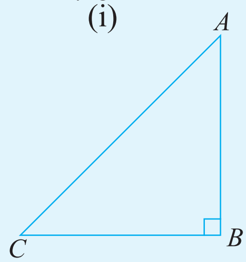
(i)


(ii)


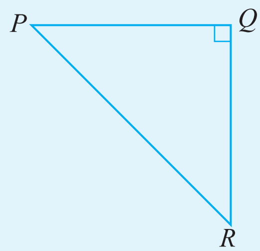
(iii)


(iv)


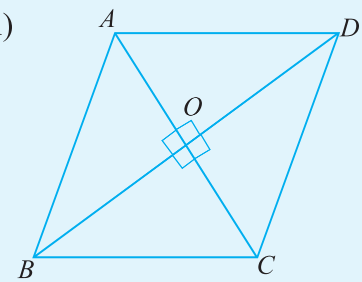
2. தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவையும் அவதானித்து அதன் கீழே தரப்பட்ட கூற்றுக்களில் உள்ள இடைவெளிகளை நிரப்புக.

(i)


$AC^2 = AB^2 + ...$

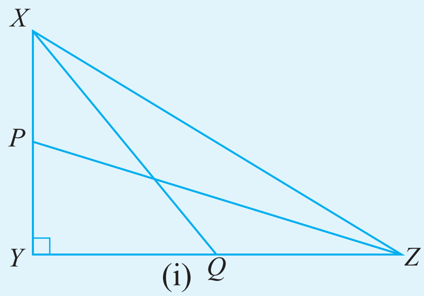
(ii)


$PR^2 = ... + ...$

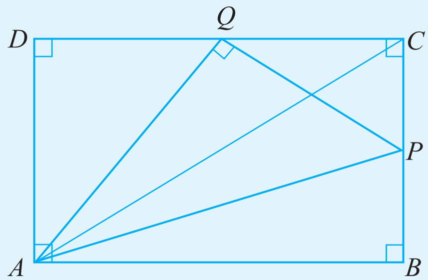
(iii)


(a) $AD^2 = ... + ...$
(b) $....... = BO^2 + ...$
(c) $....... = BO^2 + OC^2$
(d) $....... = ... + ...$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் காணப்படும் செங்கோண முக்கோணிகளை இனங்கண்டு, அம்முக்கோணிகளுக்கான பைதகரசின் தொடர்பை அதன் பக்கங்கள் சார்பில் எழுதுக.

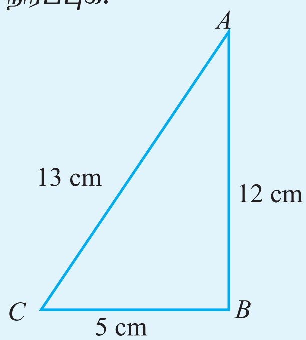


(i)



(ii)

4. தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிக்கு ஏற்ப, அதன் கீழ்த் தரப்பட்டுள்ள கூற்றுகளின் இடைவெளிகளை நிரப்புக.



தரப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பெரிய பக்கம் = ... ஆகும்.

பக்கம் AB இன் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு = $12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$

பக்கம் BC இன் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு = ... = ... cm^2

பக்கம் AC இன் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு = ... = ... cm^2

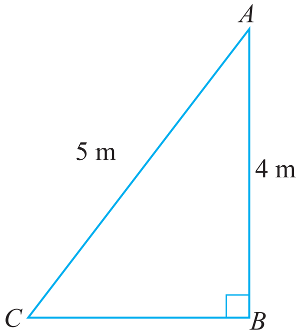
பக்கங்கள் BC, BA ஆகியவற்றின் மீது வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை = ... cm^2

19.2 பைதகரசின் தொடர்பைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 1

5 m நீளமுள்ள நேர்க் கோல் ஒன்று அதன் ஒரு முனை 4 m உயரமுள்ள நிலைக்குத்தான மதில் ஒன்றின் மேல் விளிம்பைத் தொட்டுக்கொண்டும் மற்றைய முனை மதிலின் அடியிலிருந்து குறிப்பிட்ட தூரத்தில் கிடைத் தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியைத் தொட்டுக் கொண்டும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. மதிலின் அடியிலிருந்து கோல் தரையைத் தொடும் புள்ளிக்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

மதில் BA இனாலும் கோல் AC இனாலும் காட்டப்படுமாறு வரிப்படம் வரையப் பட்டுள்ளது.



செங்கோண முக்கோணி ABC இற்குப் பைதகரசின் தொடர்பு பயன்படுத்தப்படுகின்றமையால்

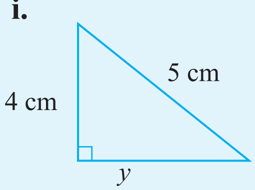
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$5^2 = 4^2 + BC^2$$
$$25 = 16 + BC^2$$
$$\therefore BC^2 = 9$$
$$BC = \sqrt{9} = 3$$

$\therefore$ மதிலின் அடியிலிருந்து கோல் தரையைத் தொடும் புள்ளிக்குள்ள தூரம் 3 m ஆகும்.

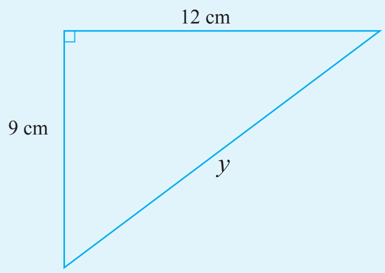
பயிற்சி 19.2

1. தரப்பட்ட ஒவ்வொரு உருவிலும் அட்சரத்தால் குறிக்கப்பட்ட பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

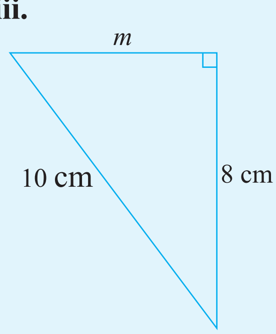
i.



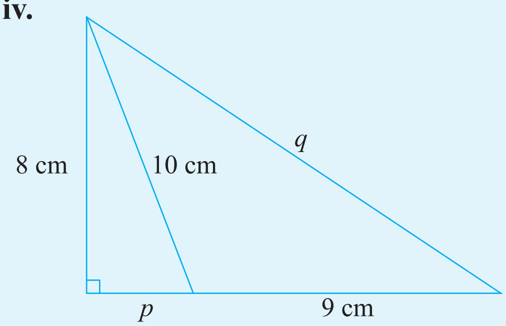
ii.



iii.

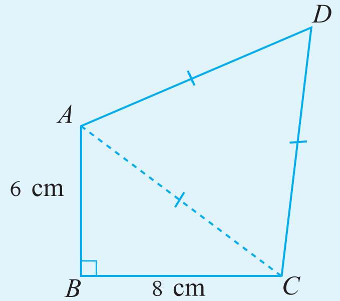


iv.

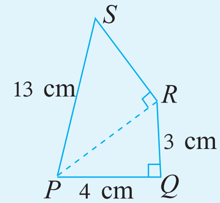


2. தரப்பட்ட ஒவ்வொரு உருவினதும் சுற்றளவைக் காண்க.

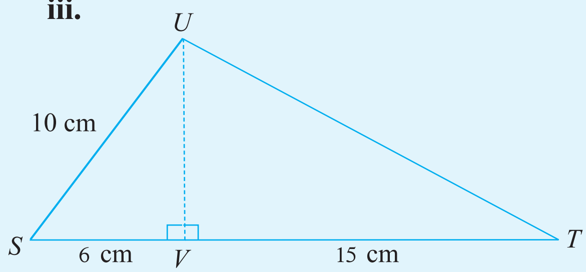
i.



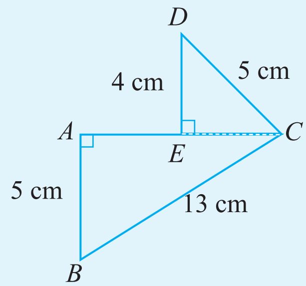
ii.



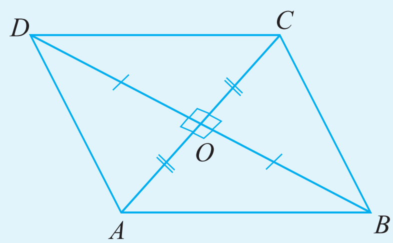
iii.



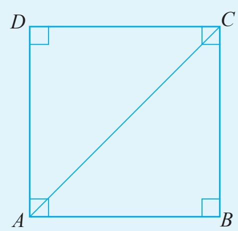
iv.



3. (i) சாய்சதுரம் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் $BD = 16$ cm, $AC = 12$ cm ஆகும். அவை O இல் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இருசமகூறிடுகின்றன. சாய்சதுரத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.



(ii) சதுரம் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் AC இன் நீளம் 10 cm எனின், சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



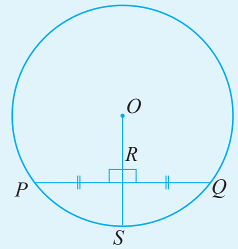
(iii) O ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் PQ என்ற நாணின் நடுப்புள்ளி R ஆகும். நீட்டப்பட்ட கோடு OR ஆனது வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. $O\hat{R}P = 90^o$, $PQ = 12$ cm, $OR = 8$ cm எனின்,

a. RQ இன் நீளம்

b. வட்டத்தின் ஆரை

c. RS இன் நீளம்

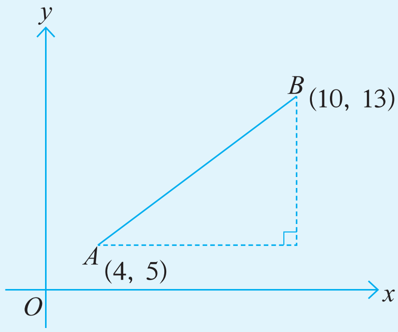
ஆகியவற்றைக் காண்க.



4. முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C = 90^o$, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm ஆகும். பக்கங்கள் AB, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P, R ஆகும். நாற்பக்கல் $APRC$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சி

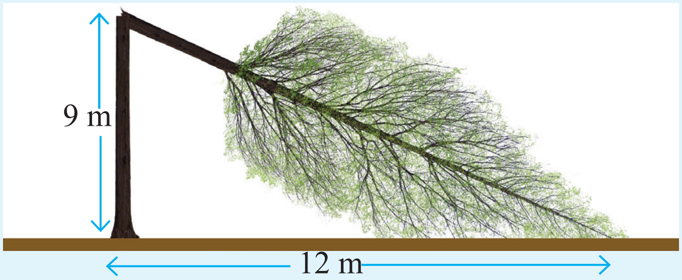
1. ஆள்கூற்றுத் தளம் ஒன்றின் மீது $A = (4, 5)$, $B = (10, 13)$ என்னும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. A இலிருந்து B இற்கான கிட்டிய தூரம் எவ்வளவு ?



2. நகரம் P இற்குக் கிழக்கே 5 km தூரத்தில் நகரம் Q அமைந்துள்ளது. நகரம் Q இற்கு வடக்கே 12 km தூரத்தில் நகரம் R அமைந்துள்ளது. நகரம் P இற்கும் நகரம் R இற்கும் இடையிலான நேர்கோட்டுத் தூரத்தைக் காண்க.

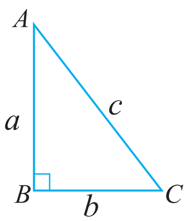
3. 16 m உயரமுள்ள கொடிக் கம்பம் ஒன்றை நிலைக்குத்தாகப் பேணுவதற்காக அதன் உச்சியுடன் இணைக்கப்பட்ட தாங்கு கம்பி ஒன்று கொடிக் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 12 m தூரத்தில் கிடைத்தரையின் மீது இணைக்கப்பட்டுள்ள தோடு அதற்கு எதிர்ப் பக்கத்தில் மற்றுமொரு தாங்கு கம்பியானது கொடிக் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 9 m தூரத்தில் கிடைத் தரையில் உள்ள புள்ளி ஒன்றுடனும் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 12 m உயரத்தில் கம்பத்துடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள கம்பிகளின் மொத்த நீளத்தைக் காண்க.

4. சூறாவளியின் காரணமாக மரம் ஒன்று முறிந்துள்ளதை வரிப்படம் காட்டுகின்றது. முறிவதற்கு முன்னர் மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



பொழிப்பு

- பைதகரசின் தொடர்பு
  செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவானது செங்கோணத்தை ஆக்கும் இரண்டு பக்கங்களின் மீதும் வரையப்படும் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்.
  செங்கோண முக்கோணி ABC இற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப



$AC^2 = AB^2 + BC^2$ அல்லது

$c^2 = a^2 + b^2$ எனக் குறிக்கலாம்.

20 வரைபுகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- சார்புகளை இனங்காண்பதற்கும்
- $y = mx$, $y = mx + c$ என்னும் வடிவங்களில் உள்ள சார்புகளின் வரைபுகளை வரைவதற்கும் அவற்றின் இயல்புகளை இனங்காண்பதற்கும்
- ஒரு நேர்கோட்டு வரைபின் படித்திறனையும் வெட்டுத்துண்டையும் எழுதுவதற்கும்
- வடிவம் $ax + by = c$ இல் உள்ள சமன்பாடுகளின் வரைபுகளை வரைவதற்கும் அவற்றின் இயல்புகளை இனங்காண்பதற்கும்
- ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமான வரைபுகளின் படித்திறன்களுக்கிடையேயான தொடர்பை அறிந்துகொள்வதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

வரைபுகள் பற்றி நீங்கள் முந்திய தரங்களில் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. (i) x, y அச்சுகள் ஒவ்வொன்றின் வழியேயும் -5 தொடக்கம் 5 வரையுள்ள பெறுமானங்கள் இடம்பெறும் ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தை வரைந்து அதில் $A\ (-4, -4)$, $B\ (4, -4)$என்னும் புள்ளிகளைக் குறிக்க. $ABCD$ ஒரு சதுரமாக இருக்குமாறு C, D ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து C, D ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(ii) தள உருவம் $ABCD$ இன் ஒவ்வொரு பக்கத்தினதும் சமன்பாட்டை எழுதுக.

2. x, y அச்சுகள் ஒவ்வொன்றின் வழியேயும் -4 தொடக்கம் 4 வரையுள்ள பெறுமானங்கள் இடம்பெறும் ஓர் ஆள்கூற்றுத்தளத்தை வரைக.

(i) புள்ளி $(4, -4)$இனூடாக x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோட்டையும் y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோட்டையும் வரைக.

(ii) $(-3, 2)$ இனூடாக x அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோட்டையும் y அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோட்டையும் வரைக.

(iii) மேலே (i) இலும் (ii) இலும் வரையப்பட்டுள்ள கோடுகள் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரு புள்ளிகளினதும் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(iv) மேலே (iii) இற் பெற்ற தள உருவத்தின் சமச்சீரச்சுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

20.1 சார்புகள்

பல்வேறு கணியங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமைகள் பற்றி நாம் வெவ்வேறு சந்தர்ப்பங்களில் கற்றுள்ளோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள இரு கணியங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமையை நன்றாக அவதானிக்க.

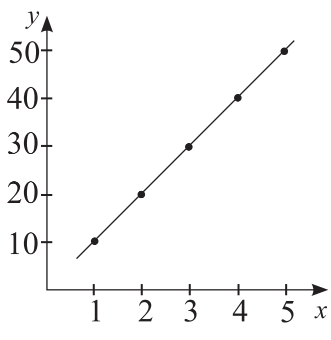
ஒரு குறித்த வகை மணிகளின் 1g இன் விலை ரூ. 10 எனக் கொள்வோம். அவ்வகையைச் சேர்ந்த மணிகளின் அளவும் விலைகளும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

மணிகளின் திணிவு (g)		விலை (ரூ.)
1	$\longrightarrow$	$1 \times 10 = 10$
2	$\longrightarrow$	$2 \times 10 = 20$
3	$\longrightarrow$	$3 \times 10 = 30$
4	$\longrightarrow$	$4 \times 10 = 40$

இதற்கேற்ப மணிகளின் திணிவு x g இன் எண்ணிக்கையின் விலை ரூ. $10x$ என்பது தெளிவாகும். மணிகளின் திணிவு x g இன் விலையை ரூ. y இனால் காட்டினால், $y = 10x$ என எழுதலாம் என்பதும் தெளிவாகும்.

இங்கு மணிகளின் திணிவு (x g) எனவும் அவற்றின் திணிவுகளுக்கு ஒத்த விலை ரூ. (y) எனவும் கொள்வோம்.

இத்தொடர்பில் x இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும் கணியமாகிய மணிகளின் திணிவை x அச்சு வழியே குறித்து அதற்கு ஒத்த கணியத்தை வகைகுறிக்கும் விலையின் பல்வேறு பெறுமானங்களை y அச்சு வழியே குறிப்பதன் மூலம் பின்வரும் நேர்கோட்டு வடிவத்தில் உள்ள ஒரு வரைபைப் பெறலாம்.



$y = 10x$ என முன்வைத்த சார்பின் சாரா மாறியை வகைகுறிக்கும் x இன் சுட்டி 1 ஆகையால், அது ஓர் ஏகபரிமாணச் சார்பு எனப்படும்.

ஓர் ஏகபரிமாணச் சார்பு தரப்படும்போது பின்வருமாறு அதன் x இன் பெறுமானங்களை ஒத்த y இன் பெறுமானங்களைப் பெறலாம்.

உதாரணம் 1

பின்வரும் ஏகபரிமாணச் சார்புகளின் தரப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த y இன் பெறுமானங்களைக் கணித்து வரிசைப்பட்ட சோடிகளாக எழுதுக.

i. $y = 2x$ (x இன் பெறுமானம் $-2, -1, 0, 1, 2$)

ii. $y = -\frac{3}{2}x + 2$ (x இன் பெறுமானம் $-4, -2, 0, 2, 4$)

i. $y = 2x$

x	$2x$	y	வரிசைப்பட்ட சோடி (x, y)
-2	2×-2	-4	$(-2, -4)$
-1	2×-1	-2	$(-1, -2)$
0	2×0	0	$(0, 0)$
1	2×1	2	$(1, 2)$
2	2×2	4	$(2, 4)$

ii. $y = -\frac{3}{2}x + 2$

x	$-\frac{3}{2}x + 2$	y	வரிசைப்பட்ட சோடி (x, y)
-4	$-\frac{3}{2} \times -4 + 2$	8	$(-4, 8)$
-2	$-\frac{3}{2} \times -2 + 2$	5	$(-2, 5)$
0	$-\frac{3}{2} \times 0 + 2$	2	$(0, 2)$
2	$-\frac{3}{2} \times 2 + 2$	-1	$(2, -1)$
4	$-\frac{3}{2} \times 4 + 2$	-4	$(4, -4)$

பயிற்சி 20.1

1. பின்வரும் சார்புகளின் தரப்பட்டுள்ள x இன் பெறுமானங்களிற்கு ஒத்த y இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு வரிசைப்பட்ட சோடியாக எழுதுக.

(i) $y = 3x$ (x இன் பெறுமானங்கள் $-2, -1, 0, 1, 2$ ஆகும்.)

(ii) $y = 2x + 3$ (x இன் பெறுமானங்கள் $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ஆகும்.)

(iii) $y = -\frac{1}{3}x - 2$ (xஇன் பெறுமானங்கள் $-6, -3, 0, 3, 6$ ஆகும்.)

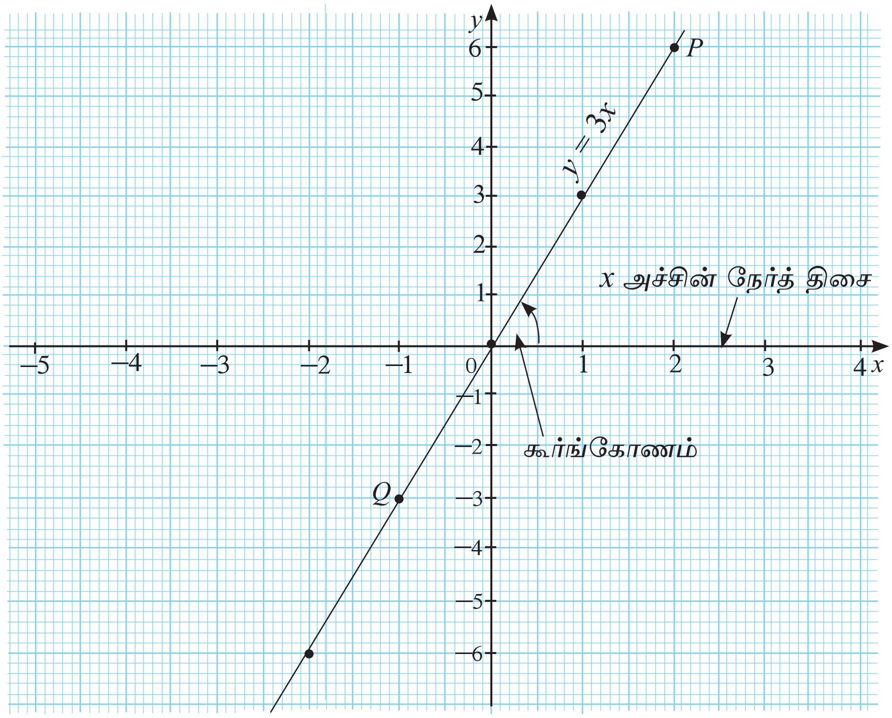
20.2 வடிவம் $y = mx$ இல் உள்ள சார்புகளும் அவ்வாறான ஒரு சார்பின் வரைபின் படித்திறனும்

$y = 3x$, $y = -2x$, $y = x$ என்னும் ஏகபரிமாணச் சார்புகள் வடிவம் $y = mx$ இல் உள்ள ஏகபரிமாணச் சார்புகளுக்கு உதாரணங்களாகும். சார்பு $y = 3x$ ஐ வரைபு முறையாக x இன் பெறுமானம் -2 இலிருந்து $+2$ வரைக்கும் வகைகுறிப்பதற்குத் தேவையான வரிசைப்பட்ட சோடிகளைப் பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணையைக் கொண்டு பெறுவோம்.

$y = 3x$

x	$3x$	y	(x, y)
-2	3×-2	-6	$(-2, -6)$
-1	3×-1	-3	$(-1, -3)$
0	3×0	0	$(0, 0)$
1	3×1	3	$(1, 3)$
2	3×2	6	$(2, 6)$

பெற்ற வரிசைப்பட்ட சோடிகளைப் பின்வரும் ஆள்கூற்றுத் தளத்தின் மீது குறிப்பதன் மூலம் சார்பு $y = 3x$ இன் வரைபைப் பின்வருமாறு வரையலாம்.



மேலே வரைந்த வரைபின் சில இயல்புகள் பற்றி ஆராய்வோம்.

- வரைபு ஒரு நேர்கோடாகும்.
- அது புள்ளி $(0, 0)$ இனூடாகச் செல்கின்றது.
- அது x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக ஒரு கூர்ங்கோணத்தை உண்டாக்குகின்றது.
- கோடு மீது உற்பத்தி தவிர்ந்த எந்தவொரு புள்ளியையும் எடுக்கும்போது அப்புள்ளியின் $\dfrac{y \text{ ஆள்கூறு}}{x \text{ ஆள்கூறு}}$ மூலம் கிடைக்கும் விகிதம் மாறாததாகும் (ஒரு மாறிலி).

உதாரணமாக, புள்ளி P ஐ எடுக்கும்போது $\dfrac{y \text{ ஆள்கூறு}}{x \text{ ஆள்கூறு}} = \dfrac{6}{2} = 3$

புள்ளி Q ஐ எடுக்கும்போது $\dfrac{y \text{ ஆள்கூறு}}{x \text{ ஆள்கூறு}} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

மேலும் இம்மாறாப் பெறுமானம் $y = mx$ வடிவத்திலான சமன்பாட்டில் குறிப்பிடப்படும் x இன் குணகத்தின் பெறுமானமாகிய m இற்குச் சமமாகும்.

இம்மாறாப் பெறுமானம் வரையின் **படித்திறன்** எனப்படும்.

படித்திறனுக்கு நேர்ப் பெறுமானத்தைப் போன்று மறைப் பெறுமானமும் இருக்கலாம். $y = mx$ இன் நடத்தையைப் பின்வரும் செயற்பாட்டினூடாக விளங்கிக் கொள்வோம்.

செயற்பாடு 1

1. a. படித்திறன் நேர்ப் பெறுமானமுள்ள சார்பு $y = mx$ என்னும் வடிவத்தில் தரப்பட்டுள்ள சார்புகளில் வரைபுகளை வரைவதற்குத் தேவையான பெறுமான அட்டவணைகளைப் பூரணப்படுத்தி உரிய வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

(i) $y = x$ (ii) $y = +3x$ (iii) $y = +\dfrac{1}{3}x$

x	-2	0	2
y	___	___	$+2$

x	-1	0	1
y	-3	___	___

x	-3	0	3
y	___	___	$+1$

b. படித்திறன் மறைப் பெறுமானமுள்ள சார்பு $y = -mx$ என்னும் வடிவில் தரப்பட்டுள்ள சார்புகளை வரைவதற்குத் தேவையான பெறுமான அட்டவணை களைப் பூரணப்படுத்தி உரிய வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

(i) $y = -x$ (ii) $y = -3x$ (iii) $y = -\dfrac{1}{3}x$

x	-2	0	2
y	___	___	-2

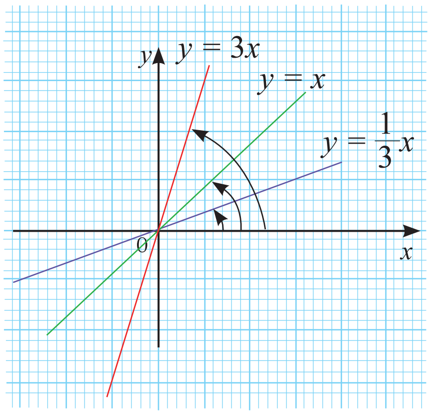
x	-1	0	1
y	___	0	___

x	-3	0	3
y	1	___	___

மேலே (a), (b) ஆகிய சந்தர்ப்பங்களில் பெற்ற வரைபுகளைக் கொண்டு சார்புகளில் படித்திறன்களின் (m) மாற்றத்திற்கேற்ப வரைபு x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ் சுழியாக ஆக்கும் கோணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமையை அவதானிக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் ஈடுபட்ட உங்களுக்குப் பின்வருமாறான வரைபுகள் கிடைத்திருக்கும்.

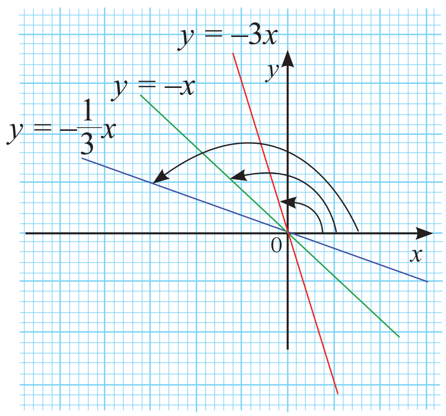
(a) படித்திறன் நேர்ப் பெறுமானமாக இருக்கும்போது கிடைக்கும் வரைபுகள்



★ படித்திறன் (m இன் பெறுமானம்) நேர்ப் பெறுமானமாக இருக்கும்போது வரைபு x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணம் கூர்ங்கோணம் ஆகும்.

★ படித்திறனின் பெறுமானம் அதிகரிக்கும்போது உரிய வரைபானது x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக அமைக்கும் கோணத்தின் பருமனும் அதிகரிக்கின்றது.

(b) படித்திறன் மறைப் பெறுமானமாக இருக்கும்போது பெறப்படும் வரைபுகள்

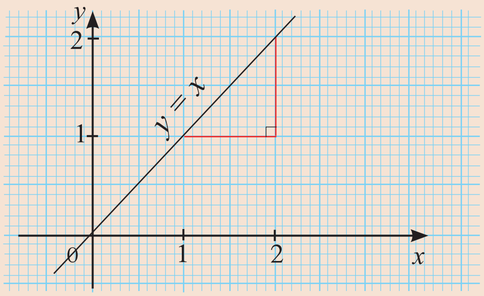


★ படித்திறன் (m இன் பெறுமானம்) மறைப் பெறுமானமாக இருக்கும்போது வரைபு x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணம் விரிகோணம் ஆகும்.

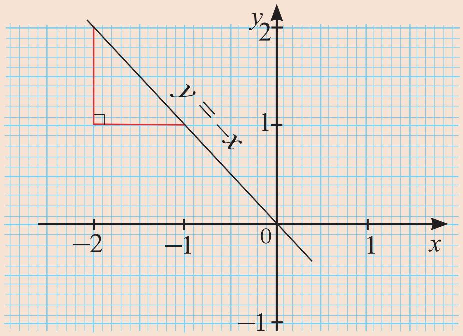
★ படித்திறன் (mஇன் பெறுமனம்) மறையாக அதிகரித்துச் செல்லும்போது உரிய வரைபானது x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் அமைக்கும் கோணத்தின் பருமனும் அதிகரிக்கும்.

குறிப்பு

ஒரு வரைபின் படித்திறன்



சார்பு $y = x$ இன் வரைபின் படித்திறன் 1 ஆகும். x இன் பெறுமானம் ஓர் அலகினால் அதிகரிக்கும்போது அதனை ஒத்த y இன் பெறுமானம் ஓர் அலகினால் அதிகரிக்கும் என்பதாகும்.



சார்பு $y = -x$ இல் x இன் பெறுமானம் 1 அலகினால் அதிகரிக்கும்போது y இன் பெறுமானம் 1 அலகினால் குறையும் என்பதாகும்.

உதாரணம் 1

வரைபை வரையாமல் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பினதும் வரைபின் படித்திறனை எழுதுக.

i. $y = 2x$
ii. $y = -5x$
iii. $y = -\dfrac{1}{2}x$

i. படித்திறன் $(m) = 2$
ii. படித்திறன் $(m) = -5$
iii. படித்திறன் $(m) = -\dfrac{1}{2}$

உதாரணம் 2

i. $y = 2x$, $y = -3x$ ஆகிய நேர்கோடுகளின் வரைபுகளை x இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானங்களை எடுத்து ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

ii. மேலே வரைந்த வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி $y = 3$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானங்களையும் $x = 2.5$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானங்களையும் வெவ் வேறாகக் காண்க.

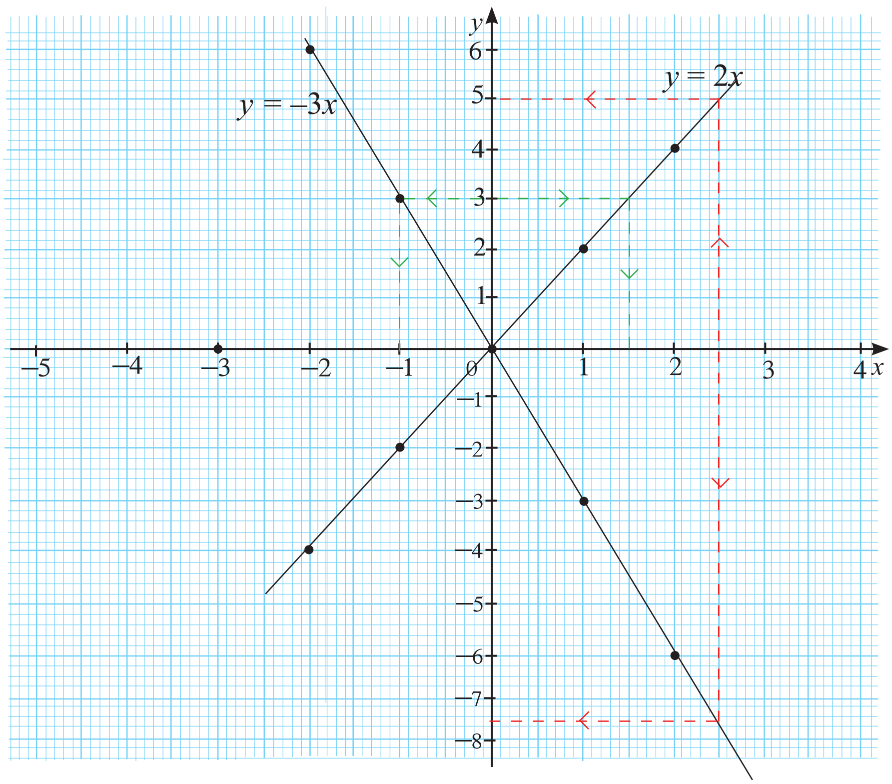
i. $y = 2x$

x	-2	-1	0	1	2
$+2x$	2×-2	2×-1	2×0	2×1	2×2
y	-4	-2	0	2	4

$y = -3x$

x	-2	-1	0	1	2
$-3x$	-3×-2	-3×-1	-3×0	-3×1	-3×2
y	6	3	0	-3	-6

மேற்குறித்த வரிசைப்பட்ட சோடிகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் குறிக்கும்போது பின்வருமாறான வரைபுகள் பெறப்படும்.



ii. $x = 2.5$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்குக் கோடு $x = 2.5$ ஐ வரைந்து (சிவப்பு நிறத்தினால் தரப்பட்டுள்ளது) அது வரைபுகளை இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளைப் பெற்றுக் கொள்ள வேண்டும்.

அப்போது x இன் பெறுமானம் 2.5 ஆகும்போது,

சார்பு $y = 2x$ இல் x இன் பெறுமானம் 5 ஆகும்.

சார்பு $y = -3x$ இல் y இன் பெறுமானம் -7.5ஆகும்.

$y = 3$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்குக் கோடு $y = 3$ ஐ வரைந்து (பச்சை நிறத்தினால் தரப்பட்டுள்ளது.) அது வரைபுகளை இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளைப் பெற்றுக் கொள்ள வேண்டும்.

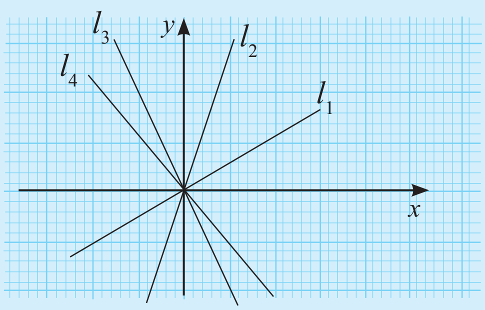
அப்போது y இன் பெறுமானம் 3 ஆகும்போது,

சார்பு $y = 2x$இல், x இன் பெறுமானம் $1\frac{1}{2}$ ஆகும்.

சார்பு $y = -3x$ இல், x இன் பெறுமானம் -1 ஆகும்.

பயிற்சி 20.1

1. l_1, l_2, l_3, l_4 இனால் காட்டப்படும் வரைபுகளுக்கு உரிய சார்புகளைப் பின்வருவனவற்றிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து எழுதுக.



i. $y = 3x$ **ii.** $y + 2x = 0$

iii. $2y - x = 0$ **iv.** $y + \frac{3}{2}x = 0$

2. குறித்த ஒரு தினத்தில் சிங்கப்பூர் டொலர் ஒன்றின் பெறுமதி இலங்கை ரூபாயில் ரூ. 100 ஆகும். சிங்கப்பூர் டொலரின் எண்ணிக்கையை x எனவும் அதன் ஒத்த இலங்கை ரூபாயின் பெறுமதியை y எனவும் கொண்டு அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புடைமையை $y = 100x$ என எழுதலாம்.

(i) மேற்குறித்த வரைபை வரைவதற்குப் பொருத்தமான ஒரு பெறுமான அட்டவணையைத் தயாரிக்க (x இற்கு 1, 2, 3, 4 ஆகிய பெறுமானங்களை எடுக்க).

(ii) மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) மேலே வரைந்த வரைபைக் கொண்டு 4.3 சிங்கப்பூர் டொலரின் விலையைப் பெறுக.

(iv) ரூ. 250 இற்கு எத்தனை சிங்கப்பூர் டொலர்களை வாங்கலாம் என்பதை வரைபைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

3. பின்வரும் கூற்றுகளுக்கிடையே சரியான கூற்றுக்கு எதிரே '✓' அடையாளத்தையும் பிழையான கூற்றுக்கு எதிரே '✗' அடையாளத்தையும் இடுக.

(i) வடிவம் $y = mx$ இல் உள்ள ஒரு சார்பில் m இன் குறியின் மூலம் கோட்டின் திசை துணியப்படும். ( )

(ii) வடிவம் $y = mx$ இல் உள்ள ஒரு சார்பின் வரைபு தரப்படும்போது y அச்சு மீது உள்ள சமச்சீரைப் பயன்படுத்தி $y = -mx$ இன் வரைபை அமைக்க முடியாது. ( )

(iii) உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டின் உற்பத்தி தவிர அதன் மீது இருக்கும் வேறொரு புள்ளியின் y ஆள்கூறுக்கும் x ஆள்கூறுக்குமிடையே உள்ள விகிதம் அதன் படித்திறனுக்குச் சமமாகும். ( )

(iv) புள்ளி $(-2, 3)$ ஆனது கோடு $2y + 3x = 0$ மீது இருக்கின்ற போதிலும் கோடு $2y - 3x = 0$ மீது இருப்பதில்லை. ( )

(v) $y = mx$ இன் மூலம் காட்டப்படும் நேர்கோட்டுத் தொகுதியைத் திருப்தியாக்கும் ஒரே புள்ளி $(0, 0)$ அன்று. ( )

4. (i) x இற்கு $-6, -3, 0, 3, 6$ என்னும் பெறுமானங்களைக் கொண்டு $y = \frac{1}{3}x$, $3y = 2x$, $y = -1\frac{1}{3}x$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை வரைவதற்கு ஒரு பெறுமான அட்டவணையை உருவாக்குக.

(ii) மேற்குறித்த வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

(iii) வரைபுகள் x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணங்களின் பருமனுக்கேற்ப ஏறுவரிசையில் இருக்குமாறு மேற்குறித்த சார்புகளை எழுதுக.

5. (i) சார்பு $y = -\frac{2}{3}x$ இன் வரைபை வரைவதற்குப் பின்வரும் பூரணமற்ற அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

x	-6	-3	0	3	6
y	4	____	____	-2	____

(ii) பூரணப்படுத்திய அட்டவணையைக் கொண்டு மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) $x = -2$ ஆக இருக்கும்போது y இன் பெறுமானத்தை வரைபைக் கொண்டு பெறுக.

(iv) புள்ளி $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ஆனது மேற்குறித்த வரைபு மீது இருக்கின்றதா? காரணங்களுடன் விளக்குக.

(v) கோடு மீது உள்ள மூன்று புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைத் தெரிந்தெடுத்து அவற்றின் y ஆள்கூறுக்கும் x ஆள்கூறுக்குமிடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க. அதன் பெறுமானத்திற்கும் கோட்டின் படித்திறனுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பை எழுதுக.

20.3 $y = mx + c$, $ax + by = c$ வடிவத்திலான சார்புகளின் வரைபுகள்

- **$y = mx + c$ வடிவத்திலான சார்புகளின் வரைபுகள்**

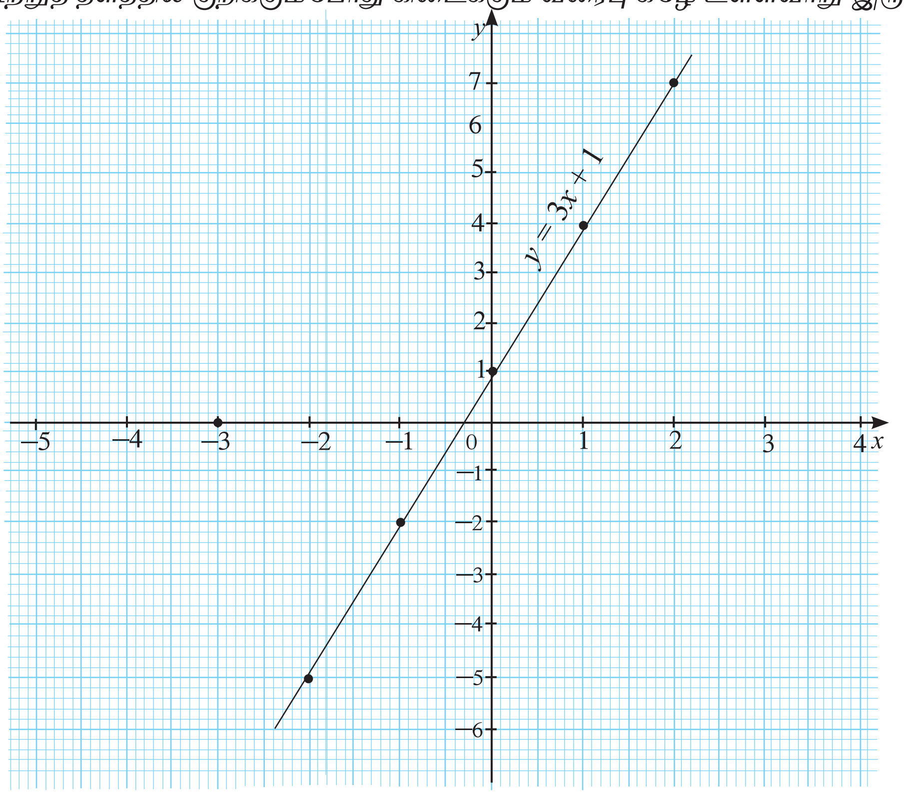
முதலில் $y = mx + c$ வடிவத்திலான சார்புகளின் வரைபு பற்றி ஆராய்வோம். இதற்காக $y = 3x + 1$ என்னும் சார்பின் வரைபை வரைவோம்.

இச்சார்பை வரைவதற்குப் பின்வருமாறு ஒரு பெறுமான அட்டவணையை உருவாக்குவோம்.

$y = 3x + 1$

x	$3x + 1$	y	(x, y)
-2	$3 \times (-2) + 1$	-5	$(-2, -5)$
-1	$3 \times (-1) + 1$	-2	$(-1, -2)$
0	$3 \times (0) + 1$	1	$(0, 1)$
1	$3 \times (1) + 1$	4	$(1, 4)$
2	$3 \times (2) + 1$	7	$(2, 7)$

இப்பெறுமான அட்டவணையினூடாகப் பெற்ற வரிசைப்பட்ட சோடிகளை ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் குறிக்கும்போது கிடைக்கும் வரைபு கீழே உள்ளவாறு இருக்கும்.



இவ்வரைபை நோக்குவதன் மூலம் பின்வரும் இயல்புகளை அறிந்து கொள்ளலாம்.

- ஒரு நேர்கோட்டு வரைபாகும்.
- நேர்கோடு y அச்சை $(0, 1)$ இல் இடைவெட்டுகின்றது.
- நேர்கோடு x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக ஒரு கூர்ங்கோணத்தை ஆக்குகின்றது. இக்கோட்டில் m இன் பெறுமானம் $+3$ ஆகும். மாறி x ஆனது 1 அலகினால் அதிகரிக்கும்போது அதனை ஒத்த மாறி y உம் 3 அலகுகளினால் அதிகரிக்கின்றது என்பது இதன் மூலம் தெளிவாகின்றது.
- சமன்பாடு $y = 3x + 1$ இல் c ஐ வகைகுறிக்கும் பெறுமானம் $+1$ ஆகும். நேர்கோடு y அச்சை இடைவெட்டும் புள்ளியிலிருந்து உற்பத்திக்கு உள்ள தூரமும் ஓரலகாகும். இவ்விரு பெறுமானங்களும் சமம்.

வரைபு y அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் y ஆள்கூறு **வெட்டுத்துண்டு** எனப்படும். இந்நேர்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு $+1$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப வடிவம் $y = mx + c$ இல் உள்ள ஒரு சார்பின் வரைபின் படித்திறன் m இனாலும் வெட்டுத்துண்டு c இனாலும் காட்டப்படும்.

உதாரணம் 1

சார்பு $y = x - 2$ இன் வரைபைப் பொருத்தமான ஓர் அட்டவணையைத் தயாரித்து வரைக. வரைபிலிருந்து

i. வெட்டுத்துண்டு

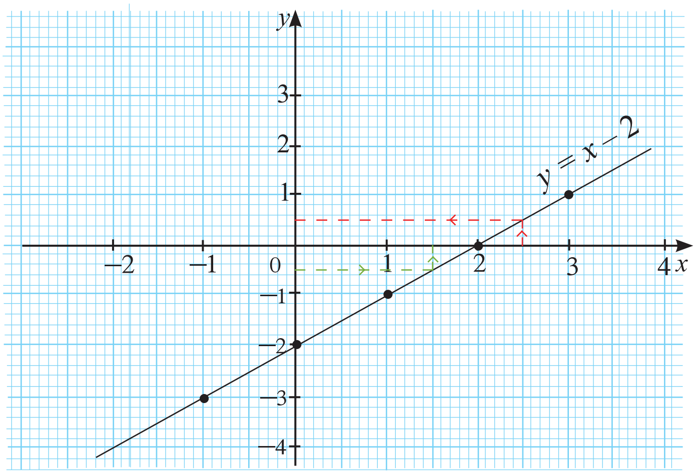
ii. $x = 2.5$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானம்

iii. $y = -\frac{1}{2}$ ஆகும்போது x இன் பெறுமானம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

$y = x - 2$

x	-1	0	1	2	3
$y = x - 2$	-3	-2	-1	0	1



i. வெட்டுத்துண்டு $(c) = -2$.

ii. $x = 2.5$ ஆகும்போது $y = \frac{1}{2}$.

iii. $y = -\frac{1}{2}$ ஆகும்போது $x = 1\frac{1}{2}$.

உதாரணம் 2

வரைபை வரையாமல் ஒவ்வொரு சார்பினதும் படித்திறனையும் வெட்டுத்துண்டையும் எழுதுக.

i. $y = -2x + 5$

ii. $y + 3x = -2$

i. சார்பு $y = -2x + 5$ ஆனது $y = mx + c$ வடிவத்தில் உள்ளது.

இதற்கேற்ப, படித்திறன் $(m) = (-2)$

வெட்டுத்துண்டு $(c) = 5$

ii. சார்பு $y + 3x = -2$ ஐ முதலில் $y = mx + c$ வடிவத்தில் எழுதுவோம்.

அப்போது, $y = -3x - 2$ ஆகும்.

படித்திறன் $= -3$

வெட்டுத்துண்டு $= -2$

உதாரணம் 3

$y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x - 3$ ஆகிய மூன்று வரைபுகளையும் பொருத்தமான பெறுமான அட்டவணைகளிலிருந்து ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

i. சார்பை அவதானித்து ஒவ்வொரு வரைபினதும் படித்திறனையும் வெட்டுத்துண்டையும் எழுதுக.

ii. வரைபுகள் பற்றி நீர் அவதானிக்கக்கூடிய ஒரு சிறப்புப் பண்பை எழுதுக.

$y = 2x$

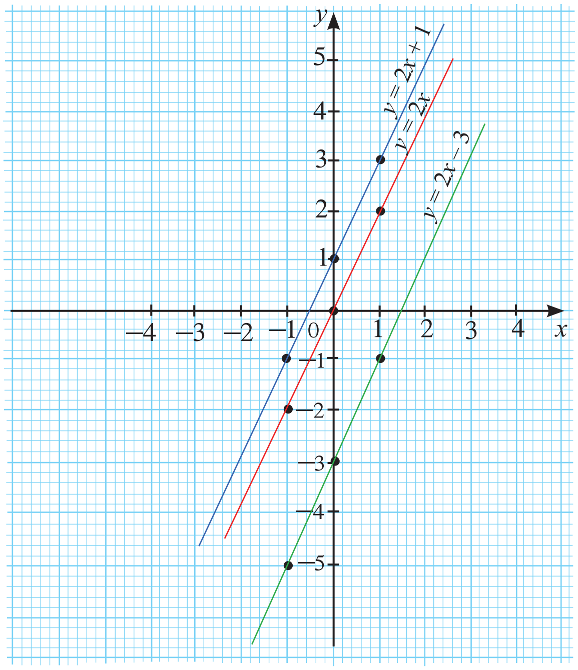
x	-1	0	1
y	-2	0	2

$y = 2x + 1$

x	-1	0	1
y	-1	1	3

$y = 2x - 3$

x	-1	0	1
y	-5	-3	-1



- $y = 2x$
  படித்திறன் = 2
  வெட்டுத்துண்டு = 0

- $y = 2x + 1$
  படித்திறன் = 2
  வெட்டுத்துண்டு = 1

- $y = 2x - 3$
  படித்திறன் = 2
  வெட்டுத்துண்டு = – 3

ii. சார்புகளை அவதானிக்கும்போது மேற்குறித்த வரைபுகளின் படித்திறன்கள் சமனானவை என்பது தெளிவாகும். வரைபை அவதானிப்பதன் மூலம் அவை ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை என்பதை நீங்கள் காண்பீர்கள்.

இதற்கேற்ப, இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் படித்திறன்கள் சமனாயின், அவற்றின் வரைபுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை என்பது தெளிவாகிறது.

- **$ax + by = c$ வடிவத்திலான சார்புகளின் வரைபுகள்**

$ax + by = c$ வடிவத்திலான சார்புகளின் வரைபுகள் பற்றி ஆராய்வோம். இவ்வரைபுகளை $y = mx + c$ என்னும் வடிவத்தில் அமைத்துக் கொள்வது இலகுவானதாகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தின் மீது கவனத்தைச் செலுத்துக.

உதாரணம் 1

சார்பு $3x + 2y = 6$ இன் வரைபைப் பொருத்தமான ஓர் அட்டவணையைத் தயாரித்து வரைக.
வரைபிலிருந்து

i. வரைபு பிரதான அச்சுகளை இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

ii. வரைபின் படித்திறனையும் வெட்டுத்துண்டையும் எழுதுக.

முதலில் மேற்குறித்த சார்பை $y = mx + c$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதுவோம்.

அப்போது $\quad 3x + 2y = 6$

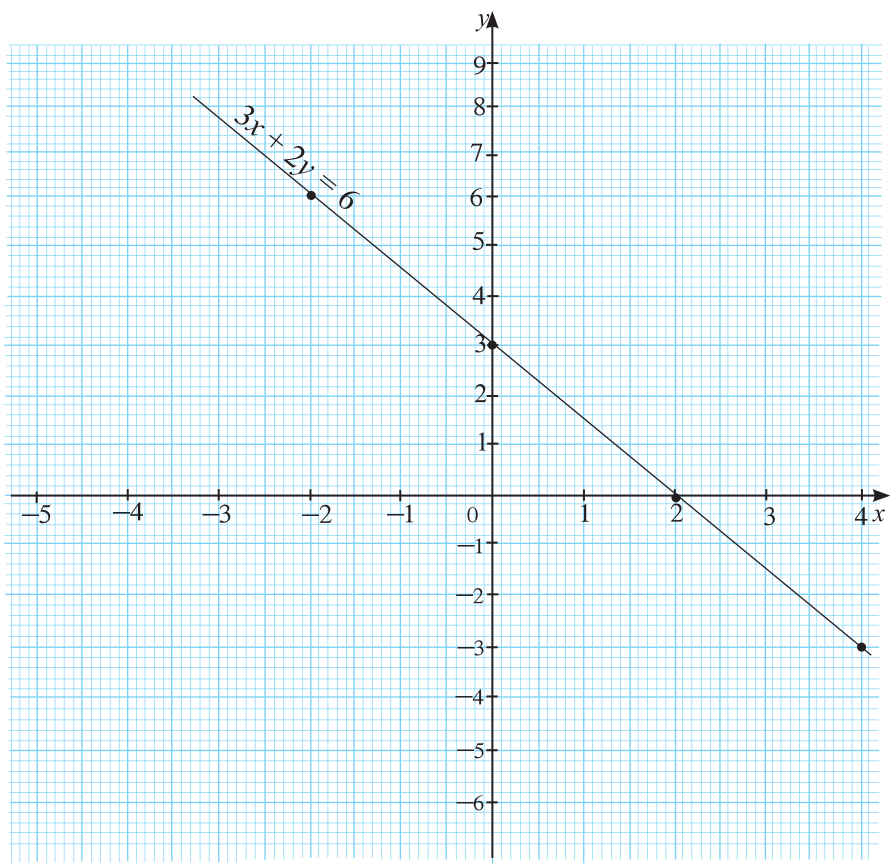
$$2y = -3x + 6$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \text{ ஆகும்.}$$

இச்சார்பை வரைவதற்குத் தேவையான ஆள்கூற்றுச் சோடிகளைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து கணித்து உரிய வரைபை வரைவோம்.

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

x	$-\frac{3}{2}x + 3$	y
-2	$-\frac{3}{2} \times -2 + 3$	6
0	$-\frac{3}{2} \times 0 + 3$	3
2	$-\frac{3}{2} \times 2 + 3$	0
4	$-\frac{3}{2} \times 4 + 3$	-3



i. y அச்சை (0, 3) இலும் x அச்சை (2, 0) இலும் இடைவெட்டுகின்றது.

ii. படித்திறன் $(m) = \frac{3}{2}$, வெட்டுத்துண்டு $(c) = 3$

குறிப்பு

மேலே உள்ள $3x + 2y = 6$ இன் வரைபிலிருந்து

- வரைபு y அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (0, 3) ஆகும். இதில் x இன் குணகமாகிய 3 ஆனது y ஆள்கூறாக அமைகின்றது.
- வரைபு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு (2, 0) ஆகும். x ஆள்கூறு y இன் குணகமாக அமைகின்றது.
- இவ்விரு புள்ளிகளையும் இணைப்பதன் மூலம் நாம் வரைபை வரையலாம்.

பயிற்சி 20.3

1. பின்வரும் தொகுதி **(a)**, **(b)** இல் தரப்பட்டுள்ள சார்புகள் ஒவ்வொன்றினதும் வரைபுகளை வரையாமல் படித்திறனையும் வெட்டுத்துண்டையும் எழுதி அவ்வரைபுகள் x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணம் கூர்ங்கோணமா, விரிகோணமா என எழுதுக.

(a) **i.** $y = x + 3$ **ii.** $y = -x + 4$ **iii.** $y = \frac{2}{3}x - 2$ **iv.** $y = 4 + \frac{1}{2}x$

(b) **i.** $2y = 3x - 2$ **ii.** $4y + 1 = 4x$ **iii.** $\frac{2}{3}x + 2y = 6$

2. பின்வரும் வரைபுகள் ஒவ்வொன்றும் x அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் y அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் எழுதி, ஒவ்வொரு வரைபையும் வரைக.

(a) **i.** $y = 2x + 3$ **ii.** $y = \frac{1}{2}x + 2$

(b) **i.** $2x - 3y = 6$ **ii.** $-2x + 4y + 2 = 0$

3. பின்வரும் தகவல்களைக் கொண்டு ஒவ்வொரு நேர்கோட்டினதும் சமன்பாட்டை எழுதுக.

படித்திறன் (m)	வெட்டுத்துண்டு (c)	சார்பின் சமன்பாடு
$+2$	-5	$y = 2x - 5$
-3	$+4$	
$-\frac{1}{2}$	-3	
$\frac{3}{2}$	$+1$	
1	0	

4. சார்பு $y = -3x - 2$ இன் வரைபை வரைவதற்குத் தேவையான, பெறுமானங்கள் இடம்பெறும் ஒரு பூரணமற்ற பெறுமான அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x	-2	-1	0	1	2
y	______	______	-2	______	-8

(i) வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(ii) மேற்குறித்த சார்பின் வரைபை வரைக.

(iii) மேற்குறித்த ஆள்கூற்றுத் தளத்தின் மீதே கோடு $y = x$ ஐ வரைந்து கோட்டுச் சோடி இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

5. x இன் பொருத்தமான பெறுமானங்களைத் தெரிந்தெடுத்துப் பின்வரும் சார்புகள் ஒவ்வொன்றினதும் வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக.

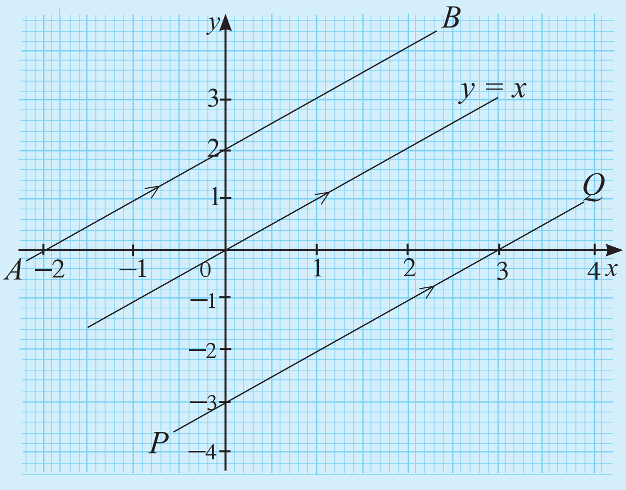
i. $y = x$ **ii.** $y = -2x + 2$ **iii.** $y = \frac{1}{2}x + 1$ **iv.** $y = -\frac{1}{2}x - 3$

6. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சார்பினதும் வரைபைத் தரப்பட்டுள்ள x பெறுமான ஆயிடையில் வரைக.

a. $-3x + 2y = 6$, $3x + 2y = -6$ ஆகிய வரைபுகள் (x பெறுமானங்கள் $-4, -2, 0, 2, 4$ இற்கு)

b. $y + 2x = 4$, $-2x + y = -4$ ஆகிய வரைபுகள் (x பெறுமானங்கள் $-2, -1, 0, 2$ இற்கு)

7. கீழே தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளிலிருந்து AB, PQ ஆகிய நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.



பலவினப் பயிற்சி

1. பின்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் சரியாயின் '✓' அடையாளத்தையும் பிழையாயின் '✗' அடையாளத்தையும் இடுக.

(i) வடிவம் $y = mx + c$ இல் உள்ள ஒரு சார்பில் m இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் பிரதான அச்சுகளுக்குச் சமாந்தரமல்லாத கோடுகள் கிடைக்கும். (............)

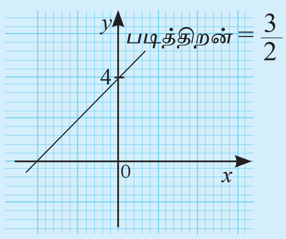
(ii) வடிவம் $y = mx + c$ இல் உள்ள ஒரு சார்பில் m இன் பெறுமானத்தின் மூலம் கோட்டின் திசை துணியப்படும் அதே வேளை c இன் மூலம் கோடு உற்பத்தியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது என்பது வெளிப்படுத்தப்படும். (............)

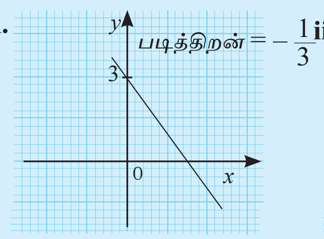
(iii) வடிவம் $y = mx + c$ இல் உள்ள ஒரு சார்பின் வரைபு உற்பத்தியினூடாகச் செல்வதற்கு $c = 0$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை. (............)

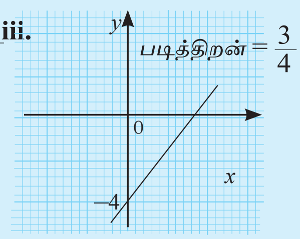
(iv) $y_1 = m_1x + c_1$ ஆகவும் $y_2 = m_2x + c_2$ ஆகவும் இருக்கும்போது $m_1 \neq m_2$ எனின், இரு கோடுகளும் சமாந்தரமாகும். (............)

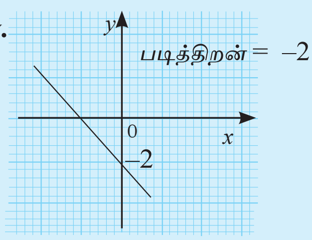
(v) ஒரு கோடு $y = mx + c$ இல் $m > 0, c > 0$ ஆக இருக்கும்போது மாத்திரம் x அச்சுக்கு மேலே y அச்சை வெட்டும் ஒரு கோடு கிடைக்கும். (............)

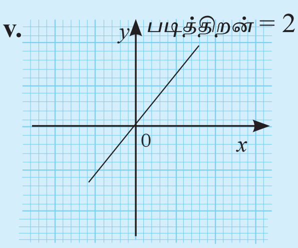
2. கீழே தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளின் பரும்படிப் படங்களைப் பயன்படுத்திச் சார்புகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

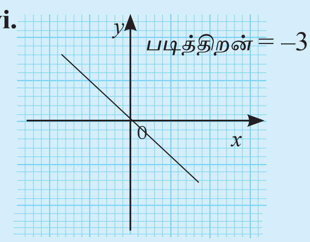
i.


ii.


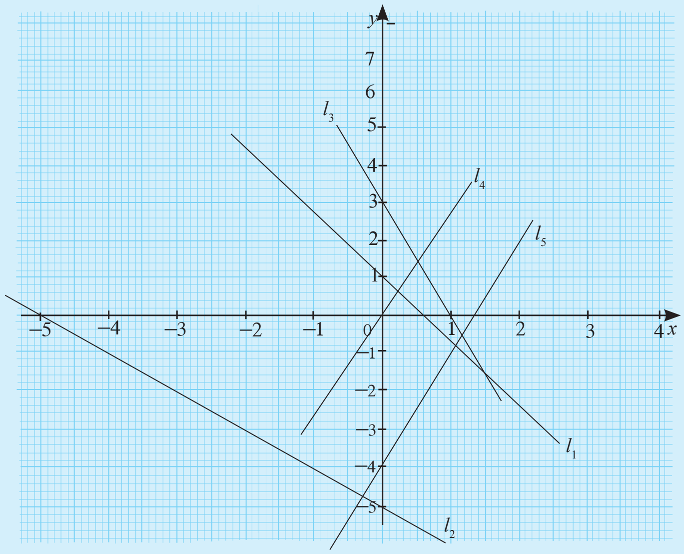
iii.


iv.


v.


vi.


3. கீழே தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளின் பரும்படிப் படங்களைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு வரைபிற்கும் பொருத்தமான சார்புகளைத் தரப்பட்டுள்ள சார்புகளி லிருந்து தெரிவுசெய்து எழுதுக.



i. $y = 3x - 4$
ii. $y = -2x + 1$
iii. $y = -x - 5$
iv. $y = -3x + 3$
v. $y = +3x$

4. $4x + py = 10$ என்னும் நேர்கோட்டின் படித்திறன் $-\frac{4}{3}$ ஆகும்.
(i) p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) வெட்டுத்துண்டை எழுதுக.
(iii) மேற்குறித்த நேர்கோடு y அச்சை வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் படித்திறன் -2 ஆக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

பொழிப்பு

- $y = mx + c$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள சார்பின் வரைபின் படித்திறன் m இனாலும் வெட்டுத்துண்டு c இனாலும் காட்டப்படும்.
- சார்புகள் இரண்டின் வரைபுகளின் படித்திறன்கள் சமனாயின், அவ்விரு வரைபுகளும் சமாந்தரமாக இருக்கக் காணப்படும்.

21

சமனிலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- $x \pm a \gtreqless b$ வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகளைத் தீர்ப்பதற்கும்
- $ax \gtreqless b$ வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகளைத் தீர்ப்பதற்கும்
- சமனிலி ஒன்றின் நிறைவெண் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கும்
- சமனிலி ஒன்றின் தீர்வுகளை எண் கோடு ஒன்றின் மீது வகைகுறிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

இலங்கையின் சிரேஷ்ட பிரசை என்று கருதப்படும் ஒருவரின் வயது 55 வருடமாகவோ அல்லது அதிலும் அதிகமாக இருக்க வேண்டும் என ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. எனவே சிரேஷ்ட பிரசை ஒருவரின் வயதை t எனக் கொண்டால் அதனை $t \geq 55$ என்னும் சமனிலியினால் குறித்துக் காட்டலாம். இங்கே t இன் பெறுமானம் எப்போதும் 55 ஐ விட அதிகமாக இருக்கும் என்பது இதன் பொருளாகும்.

இவ்வாறான சமனிலிகள் தொடர்பாக நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்ற விடயங்களை நினைவு கூர்வோம்.

$x > 3$ என்பது ஒரு சமனிலியாகும். x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் எப்போதும் 3 இலும் அதிகமாக இருக்கும் என்பது இதன் பொருளாகும். இருந்தபோதும் $x \geq 3$ எனக் குறிக்கப்பட்டால் x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 3 அல்லது அதிலும் அதிகம் என்பது கருதப்படுகின்றது.

அவ்வாறே $x < 3$ என்பது x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 3 இலும் குறைவு எனவும் $x \leq 3$ என்பது x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 3 அல்லது அதிலும் குறைவு எனவும் கருதப்படுகின்றது.

உதாரணமாக $x > 3$ என்னும் சமனிலியின் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையானது 3 இலும் அதிகமான சகல நிறைவெண்களையும் கொண்ட தொடையாகும். இச்சமனிலியின் தீர்வுத் தொடை $\{4, 5, 6, ...\}$ ஆகும்.

சகல தீர்வுகளையும் தொடையாகக் காண்பிப்பது கணிதத்தில் முக்கிய விடயமாக இருப்பினும் நிறைவெண் தீர்வுகளை எழுதும்போது தீர்வுகளை மாத்திரம் எழுதிக் காட்டலாம்.

உதாரணமாக $x > 3$ என்னும் சமனிலியின் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை 4, 5, 6, ... எனக் கூறலாம்.

அட்சரம் அடங்கும் சமனிலி ஒன்றில் அட்சரம் எடுக்கக்கூடிய எல்லாப் பெறுமானங்களும் அடங்கும் தொடை அச்சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையாகும். சமனிலி ஒன்றின் தீர்வுத் தொடையையும் அத்தீர்வுகளை எண் கோடு ஒன்றில் குறிக்கும் விதத்தையும் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.

உதாரணம் 1

$x > 3$ என்னும் சமனிலியின்
(i) நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.
(ii) நிறைவெண் தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.

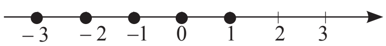
(i) $\{4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

(ii) 

உதாரணம் 2

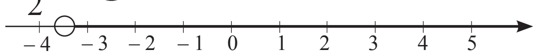
$x \leq 1$ என்னும் சமனிலியின்
(i) நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.
(ii) நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.

(i) $\{..., -3, -2, -1, 0, 1\}$

(ii) 

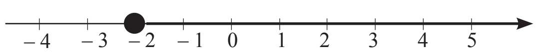
உதாரணம் 3

$x > -3\frac{1}{2}$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.



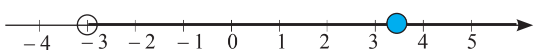
உதாரணம் 4

$x \geq -2$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.



உதாரணம் 5

$-3 < x \leq 3\frac{1}{2}$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.

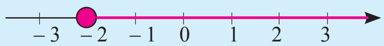


முன்னர் கற்றவற்றை மேலும் உறுதிப்படுத்துவற்குத் தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

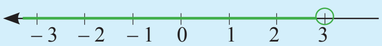
மீட்டற் பயிற்சி

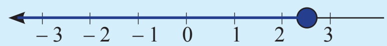
1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியினதும் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எண்கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.
   (i) $x > 2$ (ii) $x \geq -1$ (iii) $x < 4$ (iv) $x \leq -21$ (v) $x > 1\frac{1}{2}$

2. எண் கோடுகளின் மீது குறிக்கப்பட்டிருக்கும் தீர்வுகளுக்குரிய சமனிலிகளை எழுதுக.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

3. பின்வரும் சமனிலிகளின் தீர்வுகளை எண் கோடுகளில் குறித்துக் காட்டுக.
   (i) $-1 < x < 2$ (ii) $-2 \leq x < 3$ (iii) $-3 < x \leq 1$
   (iv) $x < -1$ உம் $x \geq 2$ உம் (v) $x \leq -3$ உம் $x > 0$ உம்

21.1 $x \pm a \gtreqless b$ என்னும் வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகள்

குறித்தவொரு பாலத்துக்கு அருகில் பொருத்தப்பட்டிருந்த பலகையில் இவ்வாறு எழுதப்பட்டிருந்தது.

''இப்பாலத்தின் ஊடாக 10 தொன்களிலும் குறைந்த திணிவையே கொண்டு செல்லலாம்.'' 4 தொன் திணிவைக் கொண்ட லொறி ஒன்றில் பொருள்கள் ஏற்றப்பட்டு, இப்பாலத்தைக் கடந்து செல்ல வேண்டும் எனக் கொள்வோம். லொறியில் ஏற்றப்பட்ட பொருள்களின் திணிவு x தொன்கள் எனக் கொண்டால் $x + 4 < 10$ ஆக இருந்தால் மட்டுமே லொறி பாதுகாப்பாகப் பாலத்தைக் கடந்து செல்லும். அதாவது பொருள்களுடன் லொறியின் திணிவு $x + 4 < 10$ என்னும் சமனிலியைத் திருப்தி செய்தால் மட்டுமே லொறி பாதுகாப்பாகப் பாலத்தைக் கடக்கக்கூடியதாக இருக்கும்.

$x + 4 < 10$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்துப் பாலத்தைக் கடந்து செல்லக்கூடியவாறு லொறியில் ஏற்றக்கூடிய பொருள்களின் மிகக் கூடிய திணிவைக் காணலாம்.

சமனிலிக் குறியீட்டின் ஒரு பக்கத்தில் x அல்லது கொடுக்கப்பட்ட மாறிலி மட்டும் இருக்கும் விதத்தில் சமனிலி ஒன்றைப் பெற்றுக்கொள்வதே சமனிலியின் தீர்வைக் காண்பதாகும்.

சமனிலிகளைத் தீர்க்கும் முறையானது பெரும்பாலும் சமன்பாடு ஒன்றைத் தீர்க்கும் முறைக்கு ஒத்துள்ளது.

உதாரணமாக மேலே கொடுக்கப்பட்ட $x + 4 < 10$ என்னும் சமனிலியின் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 4 ஐக் கழிக்கலாம். அதற்கேற்ப
$x + 4 - 4 < 10 - 4$

இதனைச் சுருக்கும்போது

$x < 6$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது ஏற்றக்கூடிய பொருள்களின் திணிவு 6 தொன்களிலும் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 1

$x + 2 < 7$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து, நிறைவெண் தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறிக்க.

$$x + 2 < 7$$

$x + 2 - 2 < 7 - 2$ (இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 2 ஐக் கழிக்கும்போது)

$$x < 5$$

x இன் நிறைவெண் தீர்வுகள்

உதாரணம் 2

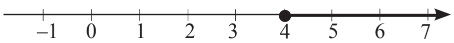
$x - 3 \geq 1$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறிக்க.

$$x - 3 \geq 1$$

$x - 3 + 3 \geq 1 + 3$ (இரு பக்கங்களுடனும் 3 ஐக் கூட்டும்போது)

$$x \geq 4$$

இத்தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறிப்போம்.



இங்கு 4 இற்குச் சமனான அல்லது 4 இலும் பெரிய எண்கள் தீர்வுகளாகக் குறிக்கப் பட்டுள்ளன. இத்தீர்வுகளுள் நிறைவெண்கள் மட்டுமல்லாமல் 4.5, 5.02 போன்ற எல்லா எண்களும் அடங்குகின்றன என்பதைக் கவனத்திற்கொள்ள வேண்டும்.

உதாரணம் 3

பை ஒன்றில் இடக்கூடிய அதிகபட்சத் திணிவு 6 கிலோகிராம் ஆகும். வர்சினி ஒவ்வொன்றும் 1 கிலோகிராம் வீதம் திணிவுள்ள x எண்ணிக்கையான அரிசிப் பைக்கெற்றுகளையும் ஒவ்வொன்றும் 1 கிலோகிராம் வீதம் திணிவுள்ள 2 பைக்கெற்றுச் சீனியையும் அப்பையில் இட்டாள்.

இத்தரவுகளை $x + 2 \leq 6$ என்னும் சமனிலியின் மூலம் குறிக்கலாம்.

(i) இச்சமனிலியைத் தீர்க்க.

(ii) வர்சினிப் பையில் இடக்கூடிய அதிகூடிய அரிசிப் பைக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு ?

(i) $x + 2 \leq 6$

$x + 2 - 2 \leq 6 - 2$

$x \leq 4$

(ii) $\therefore$ பையில் இடக்கூடிய அதிகூடிய அரிசிப் பைக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும்.

பயிற்சி 21.1

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து அவற்றின் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடைகளையும் எழுதுக.

(i) $x + 3 > 5$ (ii) $x - 4 < 1$ (iii) $x - 7 \geq -6$
(iv) $2 + x \leq -4$ (v) $7 + x > 5$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து, அவற்றின் நிறை வெண் தீர்வுத் தொடைகளை எண் கோடுகளில் குறித்துக் காட்டுக.

(i) $x + 1 > 3$ (ii) $x - 3 \leq 1$ (iii) $6 + x \geq 2$
(iv) $x - 7 < -7$ (v) $x + 5 > -1$

3. ரிஷ்மி 60 ரூபாய் வைத்திருக்கிறார். அவர் ரூ. x விலையுள்ள ஒரு புத்தகத்தையும் ரூ.10 விலையுள்ள பேனா ஒன்றையும் வாங்குகிறார். அவர் வாங்கிய பொருள்களின் பெறுமானத்தை $x + 10 \leq 60$ என்னும் சமனிலியின் மூலம் குறித்துக்காட்டலாம். அச்சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு புத்தகத்தின் மிகக்கூடிய விலை எவ்வளவாக இருக்கும் எனக் காண்க.

4. வான் ஒன்றில் செல்லத்தக்க மிகக்கூடிய பயணிகளின் எண்ணிக்கை 15 ஆகும். குறித்த ஓர் இடத்தில் 3 பயணிகளும் இன்னுமோர் இடத்தில் x பயணிகளும் அவ்வானில் ஏறினர். இத்தகவல்களை $x + 3 \leq 15$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம்.

(i) இச்சமனிலியைத் தீர்க்க.
(ii) இரண்டாம் தரிப்பிடத்தில் வானில் ஏறக்கூடிய பயணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காட்டும் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.
(iii) இரண்டாம் தரிப்பிடத்தில் ஏறக்கூடிய அதிகபட்சப் பயணிகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு ?

5. ராகவன், ரெஜினா ஆகியோரின் வயதுகளின் கூட்டுத்தொகை 30 அல்லது 30 இலும் குறைவாகும். ராகவன் 14 வயதுடையவராவார். ரெஜினாவின் வயது x வருடங்கள் எனக் கொண்டால், இத்தகவல்களை $x + 14 \leq 30$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்ப்பதன் மூலம் ரெஜினாவின் அதிகபட்ச வயது எவ்வளவாக இருக்கும் எனக் காண்க

21.1 $ax \gtreqless b$ என்னும் வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகள்

இரண்டு புத்தகங்களின் விலை ரூ. 40 இலும் அதிகமானது. ஒரு புத்தகத்தின் விலையை ரூ. x எனக் கொண்டு x ஐத் தொடர்புபடுத்தி $2x > 40$ என்னும் சமனிலியை எழுதலாம். அச்சமனிலியைத் தீர்ப்பதன் மூலம் ஒரு புத்தகத்தின் விலையாக அமையக்கூடிய பெறுமானங்களைக் காணலாம். இவ்வாறான சமனிலிகளைத் தீர்ப்பத்தில் சமனிலிகள் பற்றி நாம் அறியவேண்டிய சில விசேட பண்புகள் உள்ளன. முதலில் அவற்றைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

பின்வரும் சமனிலிகளை நோக்குவோம்.

(i) $3 < 4$ என்னும் சமனிலி உண்மையானது.

$2 \times 3 < 2 \times 4$ (இரு பக்கங்களையும் இரண்டால் பெருக்குவதன் மூலம்)

$6 < 8$ சமனிலியும் உண்மையாகும்.

(ii) $8 > 6$ சமனிலி உண்மையானது.

$\frac{8}{2} > \frac{6}{2}$ (இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுப்பதன் மூலம்)

$4 < 3$ என்னும் சமனிலியும் உண்மையானது.

சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் ஒரே நேர் எண்ணினால் பெருக்குவதால் அல்லது வகுப்பதால் பெறப்படும் சமனிலியில் மாற்றம் ஏற்படாது.

(iii) $2 < 3$ சமனிலி உண்மையானது

$2 \times -2 < 3 \times -2$ (இரு பக்கங்களையும் -2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம்)

$-4 < -6$ என்னும் சமனிலி பெறப்படும். இது பிழையானது.

ஆனால் $-4 > -6$ என்பதே உண்மையாகும்.

(iv) $9 > 6$ சமனிலி உண்மையானது

$\frac{9}{-3} > \frac{6}{-3}$ (இரு பக்கங்களையும் -3 ஆல் வகுப்பதன் மூலம்)

பெறப்படும். $-3 > -2$ என்னும் சமனிலி பெறப்படும். இது பிழையானது. ஆனால் $-3 < -2$ சமனிலியே உண்மையானது. ஆகவே இவற்றிலிருந்து நாம் ஒரு முடிவுக்கு வரலாம்.

சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் மறை எண் ஒன்றினால் பெருக்குவதால் அல்லது வகுப்பதால் பெறப்படும் சமனிலியில் மாற்றம் ஏற்படும். அதாவது $>$ என்னும் குறியீடு $<$ ஆகவும் $\leq$ என்னும் குறியீடு $\geq$ ஆகவும் மாற்றமடையும்.

இத்தகவல்களைக் கவனித்து மேலுள்ள விதத்தில் சமனிலி ஒன்றைத் தீர்க்கும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

$2x < 12$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து அதன் தீர்வுகளை எண்கோடு ஒன்றில் குறித்துக் காட்டுக.

$$2x < 12$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} < \frac{12}{2}$$ (இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுப்பதால்)

$$x < 6$$

உதாரணம் 2

$3x \geq 12$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$3x \geq 12$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \geq \frac{12}{3}$$

$$x \geq 4$$

உதாரணம் 3

$-5x \leq 15$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$-5x \leq 15$$

$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{15}{-5}$$ (மறையெண்ணால் வகுக்கும்போது சமனிலி மாறும்)

$$x \geq -3$$

உதாரணம் 4

$\frac{x}{3} < 2$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$\frac{x}{\cancel{3}} \times \cancel{3} < 2 \times 3$$ (இரு பக்கங்களையும் 3 ஆல் பெருக்குவதால்)

$$x < 6$$

உதாரணம் 5

$-\frac{2x}{5} > 6$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$-\frac{2x}{5} > 6$$

$$-\frac{2x}{\cancel{5}} \times \cancel{5} > 6 \times 5$$ (இரு பக்கங்களையும் 5 ஆல் பெருக்குவதால்)

$$-2x > 30$$

$$\frac{-\cancel{2}x}{-\cancel{2}} < \frac{30}{-2}$$ (இரு பக்கங்களையும் -2 ஆல் வகுப்பதால் சமனிலி மாறுகிறது.)

$$x < -15$$

பயிற்சி 21.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து நிறைவெண் தீர்வுகளை எழுதுக.
   (i) $2x > 6$ (ii) $3x \leq 12$ (iii) $-5x \geq 10$ (iv) $-7x < -35$
   (v) $-2x > -5$ (vi) $\frac{x}{2} \leq 1$ (vii) $\frac{x}{4} \geq -2$ (viii) $-\frac{2x}{3} < 4$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து, பெறப்பட்ட தீர்வுகளை எண் கோடு ஒன்றில் குறிக்க.
   (i) $4x > 8$ (ii) $7x \leq 21$ (iii) $-3x \geq 3$ (iv) $-2x < -6$
   (v) $\frac{x}{3} \geq 1$ (vi) $\frac{x}{6} < -\frac{1}{6}$ (vii) $\frac{2x}{3} \geq 4$ (viii) $-\frac{3x}{5} < -\frac{1}{6}$

3. 2 மாம்பழங்களின் விலை ரூ. 50 இற்குச் சமமானது அல்லது குறைவானதாகும் அல்லது குறைவானதாகும். 1 மாம்பழத்தின் விலை ரூ. x எனின் இத்தரவை $2x \leq 50$ எனக் குறிக்கலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு மாம்பழத்தின் விலையாக இருக்கக்கூடிய அதிகபட்ச விலை எவ்வளவு எனக் காண்க.

4. குறித்தவொரு மின் உயர்த்தியில் கொண்டு செல்லக்கூடிய அதிகபட்சத் திணிவு 520 கிலோகிராம் ஆகும். ஒவ்வொருவரும் x kg வீதம் திணிவுள்ள 8 மனிதர்கள் இந்த மின் உயர்த்தி மூலம் மேலே கொண்டு செல்லப்பட்டனர். இத்தகவல்களை $8x \leq 520$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம். அதனைத் தீர்த்து மின் உயர்த்தியில் கொண்டு செல்லப்பட்ட ஒரு மனிதனின் அதியுயர் திணிவாக அமையக்கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. (i) தன்னிடம் இருக்கும் பணம் அனுஷனிடம் இருக்கும் பணத்தின் நான்கு மடங்கை விடக் குறைவாகும் எனப் பமீலா கூறுகிறார். பமீலாவிடம் 68 ரூபாய் உள்ளது. அனுஷனிடம் இருக்கும் பணம் ரூ. x எனின், இத்தரவுகளை $4x > 68$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்த்து அனுஷனிடம் இருக்கும் பணத்தைக் காண்க.
   (ii) அனுஷனிடம் 5 ரூபாய் நாணயங்கள் மட்டுமே இருப்பின் அவரிடம் இருக்கத்தக்க கூடியபட்சப் பணத்தொகை எவ்வளவு?

பொழிப்பு

- சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் ஒரே நேர் எண்ணினால் பெருக்கும் போது அல்லது வகுக்கும்போது சமனிலி மாற்றமடையாது.
- சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் மறை எண் ஒன்றினால் பெருக்குவதால் அல்லது வகுப்பதால் பெறப்படும் சமனிலியில் மாற்றம் ஏற்படும். அதாவது $>$ என்னும் குறியீடு $<$ ஆகவும் $\leq$ என்னும் குறியீடு $\geq$ ஆகவும் மாற்றமடையும்.

22

தொடைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- முடிவுள்ள தொடை, முடிவிலித் தொடை ஆகியவற்றை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- தரப்பட்டுள்ள ஒரு தொடையின் தொடைப் பிரிவுகளை எழுதுவதற்கும்
- சமவலுத் தொடை, சம தொடை, மூட்டற்ற தொடை, அகிலத் தொடை ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- தொடைகள் இரண்டின் இடைவெட்டுத் தொடையையும் ஒன்றிப்புத் தொடையையும் அறிந்துகொள்வதற்கும்
- ஒரு தொடையின் நிரப்பித் தொடையை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- வென் வரிப்படத்தில் தொடைப் பிரதேசங்களைக் குறிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

தொடையின் அறிமுகம்

நிச்சயமாக அறிந்து கொள்ளக்கூடியவற்றினைக் கொண்ட ஒரு கூட்டம் ஒரு **தொடை** என முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். ஒரு தொடையைச் சார்ந்தவை அத்தொடையின் மூலகங்கள் எனப்படும். மூலகங்களை விவரிப்பதற்காகச் சங்கிலி அடைப்பு பயன்படுத்தப்படும். a என்பது ஒரு தொடை A இன் மூலகமாயின் அது $\boldsymbol{a \in A}$ என எழுதப்படும். மேலும் தொடை A இலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கையானது $\boldsymbol{n(A)}$ இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும்.

தொடைகளை வகைகுறித்தல் தொடர்பாக முன்னர் கற்றவற்றை நினைவுகூர்வோம்.

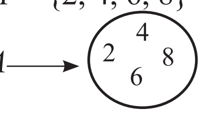
- நிச்சயமாக வரையறுக்கத்தக்க ஒரு பொதுப் பண்பின் மூலம் விவரித்தல்.
- அதன் மூலகங்களைச் சங்கிலி அடைப்பினுள்ளே எழுதுதல்
- வென் வரிப்படத்தில் மூலம் குறித்தல்

உதாரணமாக 0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள எல்லா இரட்டை எண்களையும் மேற்குறித்த மூன்று முறைகளிலும் காட்டக்கூடிய விதத்தை முறையே கவனத்தில் கொள்வோம். இத்தொடையை A எனப் பெயரிடுவோம். அப்போது

1. A = {0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரட்டை எண்கள்}

2. $A = \{2, 4, 6, 8\}$

3. A



மூலகங்கள் அற்ற தொடை **சூனியத் தொடை** அல்லது **வெறுந் தொடை** எனப்படும். சூனியத் தொடையானது { } அல்லது $\emptyset$ இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும். ஒரு சூனியத் தொடையின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 0 எனக் கருதப்படும். அதாவது A ஒரு சூனியத் தொடையாயின், $n(A) = 0$ ஆகும்.

உதாரணமாக
P = {5 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரட்டை முதன்மை எண்கள் } ஆயின்,

5 இற்கும் 10 இற்குமிடையில் இரட்டை முதன்மை எண்கள் இல்லை என்பதால் $P = \emptyset$ உம் $n(P) = 0$ உம் ஆகும்.
நீங்கள் முன்னர் கற்றவற்றை மீட்பதற்காகப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டமும் தொடையாகுமா எனத் தீர்மானிக்க.
(i) 0 இற்கும் 30 இற்கும் இடையிலுள்ள நான்கின் மடங்குகள்
(ii) இலங்கையின் மாவட்டங்கள்
(iii) கணிதத்தில் திறமையுள்ள மாணவர்கள்
(iv) முக்கோணி எண்கள்
(v) மிகப் பெரிய 10 நிறைவெண்கள்.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களையும் எழுதி அவற்றின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
(i) A = {0 இலிருந்து 20 வரையுள்ள 5 இன் மடங்குகள்}
(ii) B = {"RECONCILIATION" என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள்}
(iii) C = {2 இற்கும் 13 இற்கும் இடையிலுள்ள முதன்மை எண்கள்}
(iv) D = {இரு முதன்மை எண்களின் பெருக்கமாக எழுதக்கூடிய 0 இற்கும் 20 இற்கும் இடையிலுள்ள நிறைவெண்கள்}

3. E = {5 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள முழு எண்கள்} இத்தொடைக்கேற்ப,
(i) E இன் மூலகங்களை எழுதுக.
(ii) $n(E)$ ஐக் காண்க.

4. சூனியத் தொடைக்கு 3 உதாரணங்கள் தருக. அவை சூனியத்தொடை ஆவதற்குரிய பண்பைத் தெளிவாகத் தருக.

22.1 முடிவுள்ள தொடைகள், முடிவிலித் தொடைகள், சம தொடைகள், சமவலுத் தொடைகள்

● முடிவுள்ள தொடைகளும் முடிவிலித் தொடைகளும்

மூலகங்களை உறுதியாக அறிந்து கொள்ளக்கூடிய பொதுப் பண்பு ஒன்றின் மூலம் எழுதப்பட்டுள்ள இரண்டு தொடைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

A = {0 இற்கும் 20 இற்கும் இடையிலுள்ள 3 இன் மடங்குகள்}
B = {5 இன் மடங்குகள்}

இவ்வொவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களையும் சங்கிலி அடைப்பினுள்ளே எழுதுவோம்.

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$B = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

மேலே தரப்பட்டுள்ள தொடை A இன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். இதற்கேற்ப இதன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியான ஓர் எண்ணினால் குறிப்பிட முடியும். இவ்வாறு மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூற முடியுமாயின் அவ்வாறான தொடைகள் **முடிவுள்ள தொடைகள்** எனப்படும்.

மேலேயுள்ள தொடை B இல் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறமுடியாது. அதாவது இதன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை எல்லையற்றதாகும்.
தொடை B இன் மூலகங்களை எழுதும்போது இறுதியில் மூன்று குற்றுக்களை இடுவதன் மூலம் அதன் மூலகங்கள் எல்லையற்றன என்பது காட்டப்படுகின்றது. இவ்வாறு மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறமுடியாத தொடைகள் **முடிவிலித் தொடைகள்** எனப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களை எழுதி, அவை முடிவுள்ள தொடையா, முடிவிலித் தொடையா என எழுதுக.

(i) P = {30 இலும் குறைந்த 6 இன் மடங்குகள்}
(ii) Q = {பல்கோணிகள்}

(i) $P = \{6, 12, 18, 24\}$ $\quad n(P) = 4$
(ii) Q = {முக்கோணம், நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி....}

தொடை P இன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாகையால் P ஒரு முடிவுள்ள தொடையாகும்.

தொடை Q இன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது ஆகையால் Q ஒரு முடிவிலித் தொடை ஆகும்.

• சம தொடைகள்

கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு தொடைகளையும் கவனத்தில் கொள்க.

A = {0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரட்டை எண்கள்}

B = {48268 என்னும் எண்ணில் அமைந்துள்ள இலக்கங்கள்}

மேற்குறித்த இரண்டு தொடைகளினதும் மூலகங்களை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$

A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளும் ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமான இரண்டு முறைகளில் கூறப்பட்டிருப்பினும் அவற்றை மூலகங்களுடன் எழுதும்போது இரண்டுக்கும் ஒரே தொடையே பெறப்படுகின்றது. சமனான மூலகங்களைக் கொண்டுள்ள தொடைகள் **சமதொடைகள்** எனப்படும். இதற்கேற்ப A, B ஆகியன இரண்டும் சம தொடைகளாகும். A, B ஆகிய இரு தொடைகளும் சமனாயின் அது $A = B$ என எழுதப்படும்.

• சமவலுத் தொடைகள்

A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை சமனாக இருப்பின், அதாவது $n(A) = n(B)$ ஆயின் அப்போது A, B ஆகிய தொடைகள் **சமவலுத் தொடைகள்** எனப்படும். A, B ஆகிய தொடைகள் சமவலுத் தொடைகளாயின் அது $A \sim B$ என வகைகுறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 2

X = {0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள ஒற்றை எண்கள்}
Y = {ஆங்கில அரிச்சுவடியில் உயிர் எழுத்துகள்}

இத்தொடைகளின் மூலகங்களை எழுதி, அவை சமவலுத் தொடைகள் எனக் காட்டுக.

$X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $n(X) = 5$

$Y = \{a, e, i, o, u\}$ $n(Y) = 5$

$n(X) = n(Y)$ ஆகையால் X, Y ஆகியன சமவலுத் தொடைகளாகும்.

குறிப்பு

சமதொடைச் சோடிகள் எல்லாம் சமவலுத் தொடைகளாகவும் காணப்படும். ஆனால் சமவலுத் தொடைச் சோடிகள் எல்லாம் சம தொடைகள் ஆகக் காணப்பட மாட்டாது.

பயிற்சி 22.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளிலிருந்து முடிவுள்ள தொடை, முடிவிலித் தொடை ஆகியவற்றை வேறாக்கி எழுதுக.

   (i) A = {0 இலிருந்து 50 வரையுள்ள 5 இன் மடங்குகள்}
   (ii) B = {நிறைவெண்கள்}
   (iii) C = {0, 1 ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயன்படுத்தி எழுதக்கூடிய எண்கள்}
   (iv) D = {25265 என்னும் எண்ணில் அமைந்துள்ள இலக்கங்கள்}
   (v) E = {முதன்மை எண் அல்லாத நேர் நிறைவெண்கள்}

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களை எழுதி, அதிலிருந்து சமதொடைச் சோடிகளையும் சமவலுத் தொடைச் சோடிகளையும் தெரிந்து எழுதுக.
   P = {10 இலும் குறைந்த 3 இன் நேர் மடங்குகள்}
   Q = {திகதி என்னும் சொல்லில் அமைந்துள்ள எழுத்துகள்}
   R = {0 இலிருந்து 10 வரையுள்ள ஒற்றை எண்கள்}
   S = {3693 என்னும் எண்ணில் அமைந்துள்ள இலக்கங்கள்}
   T = {ஆங்கில அரிச்சுவடியில் உள்ள உயிரெழுத்துகள்}
   V = {"கனவு" என்னும் சொல்லில் அமைந்துள்ள எழுத்துகள்}

3. முடிவுள்ள தொடைகளுக்கு மூன்று உதாரணங்களை எழுதுக.

4. முடிவிலித் தொடைகளுக்கு மூன்று உதாரணங்களை எழுதுக.

5. {2, 3 } என்னும் தொடைக்கு மூன்று சமதொடைகளை எழுதுக.

22.2 தொடைப் பிரிவும் அகிலத் தொடையும்

• தொடைப் பிரிவு

A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளைக் கருத்தில் கொள்ளும்போது தொடை B இன் எல்லா மூலகங்களும் தொடை A இல் அடங்கியிருப்பின், அப்போது தொடை B ஆனது தொடை A இன் **தொடைப் பிரிவு** எனப்படும்.

உதாரணமாக மூலகங்களுடன் தரப்பட்டுள்ள பின்வரும் இரண்டு தொடைகளையும் கருதுவோம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad$ $B = \{2, 4, 6\}$

இங்கு தொடை B இன் எல்லா மூலகங்களும் தொடை A இல் அடங்குவதால் தொடை B ஆனது தொடை A இன் தொடைப் பிரிவு ஆகும். இது $B \subset A$ என அல்லது $A \supset B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$B \subset A$ என்பது "**B தொடைப் பிரிவு A இன்**" என வாசிக்கப்படும்.

இப்போது $C = \{2, 4, 7\}$ இல் காணப்படும் எல்லா மூலகங்களும் A இல் காணப்படவில்லை. ஆகவே C ஆனது A இன் ஒரு தொடைப் பிரிவு அல்ல.
இது $C \not\subset A$ எனக் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களை எழுதுவதன் மூலம் தொடைப் பிரிவைக் காண்க.

P = {0 இற்கும் 20இற்கும் இடையில் உள்ள 6 இன் மடங்குகள் }
Q = {0 இற்கும் 20 இற்கும் இடையில் உள்ள 3 இன் மடங்குகள்}

$P = \{6, 12, 18\}$
$Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

தொடை P இன் எல்லா மூலகங்களும் Q இல் அடங்கியுள்ளதால் $P \subset Q$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$X = \{1, 2\}$ இன் எல்லாத் தொடைப் பிரிவுகளையும் எழுதுக.

$\{1\}$, $\{2\}$ ஆகியன X இன் இரண்டு தொடைப் பிரிவுகளாகும் என்பது மிகத் தெளிவானதாகும். மேலும் $\{1, 2\}$ என்னும் தொடையும் அதன் ஒரு தொடைப் பிரிவாகின்றது என்பதை அவதானிக்க.

குறிப்பு

A, B என்பன சம தொடைகளாக இருப்பின் A ஆனது B இன் தொடைப் பிரிவாகவும் B ஆனது A இன் தொடைப் பிரிவாகவும் அமைகின்றது. மேலும் சூனியத் தொடையும் எந்தவொரு தொடையினதும் தொடைபிரிவாக அமையும்.

தொடை ஒன்றிற்கு சூனியத் தொடையும் சம தொடையும் எப்போதும் தொடைப் பிரிவுகள் ஆவதால் $\{\}$, $\{1, 2\}$ ஆகியனவும் மேற்குறித்த தொடை X இன் தொடைப் பிரிவுகளாகும்.
இதற்கேற்ப, மேற்குறித்த தொடை X இற்குத் தொடைப் பிரிவுகள் 4 உள்ளதுடன், அவை $\{\ \}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ ஆகியனவாகும்.

உதாரணம் 3

$Y = \{3, 5, 7\}$ என்னும் தொடையின் எல்லாத் தொடைப் பிரிவுகளையும் எழுதுக.

$\{\ \}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}$
ஆகவே இத்தொடைக்கு 8 தொடைப் பிரிவுகள் உண்டு.

- **அகிலத் தொடை**

உமது பாடசாலையிலுள்ள மாணவர்கள் பற்றிச் செய்யப்பட்ட ஓர் ஆய்வில் அப்பாடசாலையின் மாணவர்கள் என்ற தொடைக்குப் பல்வேறு தொடைப் பிரிவுகளைக் கவனத்தில் எடுத்துக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக,

{தரம் 9 இன் மாணவர்கள்}

{மாணவிகள்}

{இவ்வாண்டில் க.பொ.த. சா. தரப் பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்கள்}

ஆகியவை அவற்றில் சிலவாகும்.

இங்கு மேலே கவனத்தில் கொள்ளப்படும் எல்லா மூலகங்களையும் உள்ளடக்கிய தொடை, உமது பாடசாலையிலுள்ள எல்லா மாணவர்கள் என்னும் தொடையாகும். இத்தொடையானது இக்கற்றலுக்குரிய அகிலத் தொடையாகும். இனி, இன்னோர் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம்.

இரட்டை எண்கள், ஒற்றை எண்கள், முக்கோணி எண்கள், முதன்மை எண்கள் ஆகியன பற்றிய கற்றலில் இத்தொடைகள் யாவற்றையும் நிறைவெண் தொடையின் தொடைப் பிரிவுகளாகக் கருதலாம்.

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள தொடைப் பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ள தொடை அத்தொடைகளின் **அகிலத் தொடை** எனப்படும். அகிலத் தொடை **ε** இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும்.

இன்னோர் உதாரணமாக, சதுரமுகி வடிவத்திலான ஒரு தாயக்கட்டையில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ளன. இத்தாயக்கட்டையை ஒரு தடவை உருட்டும்போது கிடைக்கத்தக்க ஈட்டுகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகும். எனவே, இத்தாயக் கட்டையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் பேறுகளின் தொடை $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ஆகும். இத்தொடையானது ஒரு தாயக்கட்டையை உருட்டும்போது பெறப்படும் பேறுகளின் அகிலத் தொடையாகும். இதனை $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என எழுதிக் காட்டலாம். இவ்வகிலத் தொடையின் சில தொடைப் பிரிவுகளைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

A = {ஒற்றை எண் ஒன்று கிடைத்தல்}

$A = \{1, 3, 5\}$

B = {4இலும் கூடிய ஒரு பெறுமானம் கிடைத்தல்}

$B = \{5, 6\}$

C = {ஓர் இரட்டை முதன்மை எண் கிடைத்தல்}

$C = \{2\}$

உதாரணம் 1

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ என்னும் தொடைக்கான ஓர் அகிலத் தொடையை எழுதுக.

ε = {1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள எண்கள்}

பயிற்சி 22.2

1. $A = \{2, 5, 8, 10, 13\}$ என்னும் தொடையின் எவையேனும் 8 தொடைப் பிரிவுகளை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூற்றும் சரியானதா எனக் கூறுக.
   (i) $\{1, 2, 3\} \subset$ {5ஆல் வகுபடும் எண்கள் }
   (ii) $\{4, 9, 16\} \subset$ {சதுர எண்கள்}
   (iii) {உருளை} $\subset$ {பல்கோணிகள்}
   (iv) {சிவப்பு} $\subset$ {வானவில்லிலுள்ள நிறங்கள்}
   (v) {$2x - 1 = 7$இன் தீர்வு} $\subset$ {இரட்டை எண்கள்}

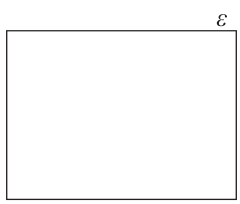
3. $A = \{a, e, i, o, u\}$ இற்கு அகிலத் தொடை ஒன்று எழுதுக.

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வாரு பகுதியிலும் உள்ள தொடைப் பிரிவுகளின் கூட்டம் ஓர் அகிலத் தொடையின் தொடைப் பிரிவாக அமையுமாயின், அவ்வகிலத் தொடையை எழுதுக.
   (i) $\{5, 10, 15, 20, 25\}$, $\{10, 100, 100, ...\}$
   (ii) {எழுத்தறிவு 90% இலும் கூடிய நாடுகள்}, {ஒரு சமுத்திரத்தினால் எல்லைப்படாத நாடுகள்}
   (iii) {ஜனவரி, மார்ச், மே, ஒகஸ்ட்}, {31 நாட்களைக் கொண்ட மாதங்கள்}, {உமது குடும்பத்தில் உள்ள ஒருவரின் பிறந்த நாள் அமையும் மாதம்}

வென் வரிப்படங்கள்

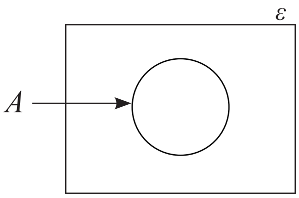
ஒரு தொடையை வென் வரிப்படத்தில் குறிக்கும் முறையை முன்னைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளீர்கள். இங்கு தொடைகள் மூடிய உருவங்களின் மூலம் குறிக்கப்படும்.

வென் வரிப்படங்களை வரையும்போது அகிலத் தொடை ஒரு செவ்வகத்தினுள்ளே பின்வருமாறு குறித்துக் காட்டப்படும்.



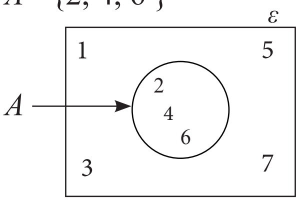
அகிலத் தொடையின் தொடைப் பிரிவுகள் வளைந்த கோட்டிலான மூடிய உருக்களினால் (வட்டம், நீள்வட்டம் போன்றவை) காட்டப்படும்.

ஒரு தொடைப் பிரிவுடன் கூடிய அகிலத் தொடை ஒன்றின் வென் வரிப்படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



உதாரணம் 1

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{2, 4, 6\}$



22.3 தொடைகளின் இடைவெட்டும் ஒன்றிப்பும்

- **தொடைகளின் இடைவெட்டு**

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளைக் கருதும்போது அவற்றின் பொது மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை **இடைவெட்டுத் தொடை** எனப்படும்.

A, B என்னும் இரண்டு தொடைகளின் இடைவெட்டுத் தொடையானது $A \cap B$ இனால் வகைகுறிக்கப்படும்.

இதனை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் பார்ப்போம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$B = \{2, 5, 6, 7\}$

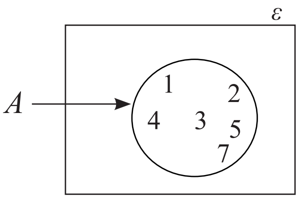
$\therefore$ A, B ஆகிய தொடைகளின் பொது மூலகங்கள் $\{2, 5, 7\}$ ஆகும்.

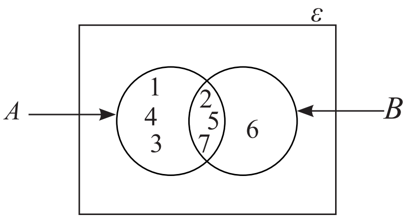
$\therefore$ $A \cap B = \{2, 5, 7\}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

இடைவெட்டுத் தொடையும் ஒரு தொடையாகும். ஆகவே இதனையும் நாம் தொடைகளை வகைகுறிக்கும் முறையில் எழுதலாம்.

உதாரணமாக மேலே உள்ள தொடைகளைக் கருதுக.

- $A \cap B$ என்னும் தொடை $\{A$ இலும் B இலும் காணப்படும் மூலகங்கள் $\}$
- $A \cap B = \{2, 5, 7\}$
- வென் வரிப்படம்
  இங்கே நாம் முதலில் தொடை A ஐக் குறிப்போம்.

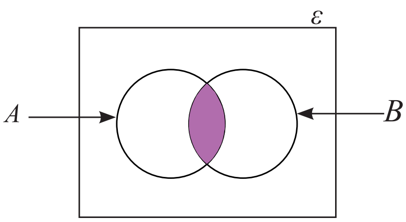




$A \cap B$

2, 5, 7 என்னும் மூலகங்கள் B இலும் காணப்படுகின்றன. ஆனால் தொடையில் ஒரு மூலகம் ஒரு தடவை மட்டுமே எழுதப்படுவதால் B ஆனது A உடன் தொடர்புற்று உருவில் காட்டப்பட்டது போன்று வரையப்படும்.

$\therefore$ ஆகவே $A \cap B$ என்னும் தொடைக்குரிய தொடைப் பிரதேசம் பின்வருமாறாகும்.



$A \cap B$

மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் இடைவெட்டுத் தொடைகளைக் காண்போம்.

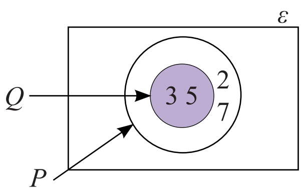
உதாரணம் 1

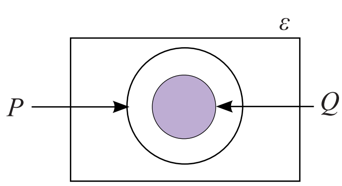
$P = \{2, 3, 5, 7\}$

$Q = \{3, 5\}$

$P \cap Q = \{3, 5\} = Q$

இங்கே தொடை Q ஆனது தொடை P இன் தொடைப் பிரிவாகும். $P \cap Q = Q$ ஆக அமைகின்றது. இதனை வென் வரிப்படத்தில் குறித்தால்

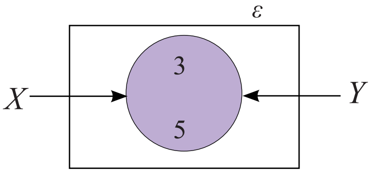




$P \cap Q = Q$

உதாரணம் 2

$X=\{3, 5\}$
$Y=\{$ 15 இன் முதன்மைக் காரணிகள்$\}$
$Y=\{3, 5\}$
$X\cap Y = \{3, 5\}$

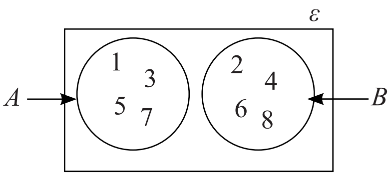


$X\cap Y = X = Y$

இங்கு X உம் Y உம் சமதொடைகள் ஆகும்.

உதாரணம் 3

$A=\{1, 3, 5, 7\}$
$B=\{2, 4, 6, 8\}$
இங்கே A இற்கும் B இற்கும் பொதுவான மூலகங்கள் எவையும் இல்லை. ஆகவே $A\cap B$ சூனியத் தொடை ஆகும். அதாவது $A\cap B = \{\ \}$ ஆகும்.
இதை வென் வரிப்படத்தின் மூலம் குறித்தால்



$A\cap B = \{\ \}$

இவ்வாறான சந்தர்ப்பத்தில் A உம் B உம் **மூட்டற்ற தொடைகள்** எனப்படும்.

• தொடைகளின் ஒன்றிப்பு

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளைக் கருதும்போது அத்தொடைகளில் காணப்படும் எல்லா மூலகங்களையும் கொண்ட தொடை **ஒன்றிப்புத் தொடை** எனப்படும்.

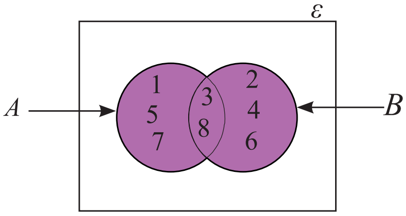
A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளையும் கருதும்போது A, B ஆகியவற்றின் ஒன்றிப்புத் தொடையானது $A\cup B$ இனால் வகைகுறிக்கப்படும்.
இதனை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் பார்ப்போம்.

$A=\{1, 3, 5, 7, 8\}$
$B=\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகும்.

ஒன்றிப்புத் தொடையும் ஒரு தொடையாகும். ஆகவே இதனையும் நாம் தொடைகளை வகைகுறிக்கும் வகையில் எழுதலாம். உதாரணமாக மேலே பார்த்த தொடைகளைக் கருதுவோம்.

$A \cup B = \{A$ இல் அல்லது B இல் காணப்படும் மூலகங்கள் $\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



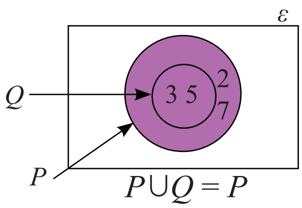
$A \cup B$

இங்கே A இல் காணப்படும் மூலகங்கள் அல்லது B இல் காணப்படும் மூலகங்கள் கொண்ட தொடை ஆகையால் A, B இனால் காட்டப்படும் முழுப் பிரதேசத்தையும் $A \cup B$ குறிக்கும். மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஒன்றிப்புத் தொடையை பார்ப்போம்.

உதாரணம் 4

$P = \{2, 3, 5, 7\}$
$Q = \{3, 5\}$
$P \cup Q = \{2, 3, 5, 7\} = P$

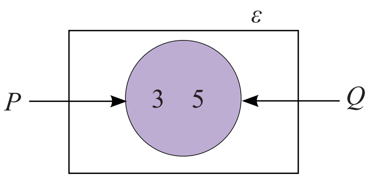
இங்கே Q ஆனது தொடை P இன் தொடைப் பிரிவாகும். அப்போது ஒன்றிப்பானது பெரிய தொடையான P இற்கும் சமனாகின்றது. இதனை வென் வரிப்படத்தில் குறித்தால்



$P \cup Q = P$

உதாரணம் 5

$X = \{3, 5\}$
$Y = \{15$ இன் முதன்மைக் காரணிகள்$\} = \{3, 5\}$
$X \cup Y = \{3, 5\} = X = Y$



$X \cup Y = X = Y$

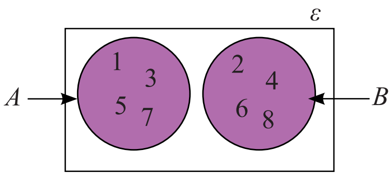
இங்கே தொடை X உம் தொடை Y உம் சம தொடைகள் ஆகும். ஆகவே ஒன்றிப்புத் தொடையும் அவற்றுக்குச் சமமான தொடையாக அமைகின்றது.

குறிப்பு

சம தொடைகள் இரண்டின் இடைவெட்டுத் தொடையும் ஒன்றிப்புத் தொடையும் தரப்பட்ட தொடைகளுக்குச் சமனான தொடைகளாகும்.

உதாரணம் 6

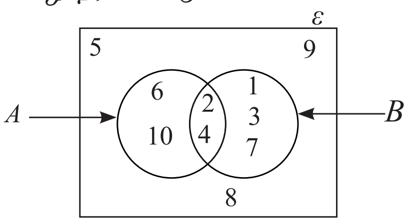
$A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
இதை வென் வரிப்படத்தில் குறித்தல்



$A \cup B$

உதாரணம் 7

கீழே தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்திலிருந்து வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக.



(i) தொடை A இன் மூலகங்களை எழுதுக.
(ii) தொடை B இன் மூலகங்களை எழுதுக.
(iii) அகிலத் தொடையின் மூலகங்களை எழுதுக.
(iv) $A \cap B$ இன் மூலகங்களை எழுதுக.
(v) $A \cup B$ இன் மூலகங்களை எழுதுக.

(i) $A = \{2, 4, 6, 10\}$
(ii) $B = \{2, 4, 1, 3, 7\}$
(iii) $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(iv) $A \cap B = \{2, 4\}$
(v) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10\}$

உதாரணம் 8

வகுப்பு ஒன்றில் உள்ள மாணவர்களிலிருந்து பின்வரும் தொடைகள் தெரிவு செய்யப்பட்டன.

$A = \{$கரப்பந்தை விளையாடும் மாணவர்கள்$\}$

$B = \{$கிறிக்கெற்றை விளையாடும் மாணவர்கள்$\}$

$A \cap B$ ஐயும் $A \cup B$ ஐயும் தருக.

$A \cap B = \{$கரப்பந்தையும் கிறிக்கெற்றையும் விளையாடும் மாணவர்கள்$\}$

$A \cup B = \{$கரப்பந்தை அல்லது கிறிக்கெற்றை விளையாடும் மாணவர்கள்$\}$

பயிற்சி 22.4

1. P, Q, R தொடைகள்

$P = \{1, 3, 6, 8, 10, 13\}$

$Q = \{1, 6, 7, 8\}$

$R = \{2, 3, 9, 10, 12\}$

எனத் தரப்பட்டுள்ளன. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங் களுடன் எழுதுக.

(i) $P \cap Q$ (ii) $P \cap R$ (iii) $Q \cap R$ (iv) $P \cup Q$ (v) $P \cup R$ (vi) $Q \cup R$

2. $A = \{1$ இலிருந்து 12 வரையுள்ள எண்ணும் எண்கள்$\}$

$B = \{10$ இலும் குறைந்த முதன்மை எண்கள்$\}$

$C = \{12$ இன் காரணிகள்$\}$

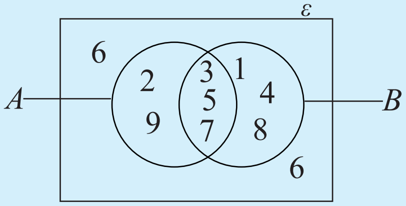
எனத் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) மேற்குறித்த ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(ii) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வாரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $B \cap C$ d. $A \cup B$ e. $A \cup C$ f. $B \cup C$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைக் கருதுக.



கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வாரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(i) A

(ii) B

(iii) $A \cup B$

(iv) $A \cap B$

22.1 தொடை ஒன்றின் நிரப்பி

ஓர் அகிலத் தொடையிலுள்ள தொடைப் பிரிவு A ஐக் கருதுவோம். A ஐச் சாராத அகிலத் தொடையினுள்ளே உள்ள எல்லா மூலகங்களையும் உள்ளடக்கிய தொடையானது தொடை A இன் **நிரப்பித் தொடை** எனப்படும்.

உதாரணமாகக் கீழே உள்ள தொடைகளைக் கருதுவோம்.

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

எனக் கொள்ளும்போது தொடை A ஐச் சாராத, அகிலத் தொடையினுள்ளே உள்ள எஞ்சிய மூலகங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$\{1, 3, 5, 7\}$

இது தொடை A இன் நிரப்பித் தொடையாகும். தொடை A இன் நிரப்பியானது A' இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும். அதனை

$A' = \{1, 3, 5, 7\}$ என எழுதலாம்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள அகிலத் தொடை (ε), அதன் தொடைப்பிரிவு B ஆகியவற்றைக் கருதித் தொடை B' ஐ மூலகங்களுடன் எழுதுக.

$\varepsilon = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$

$B = \{10, 20, 30\}$

$B' = \{5, 15, 25, 35\}$

உதாரணம் 2

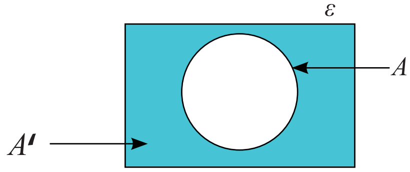
$\varepsilon = \{$பறவைகள்$\}$

$P = \{$கூடு கட்டும் பறவைகள்$\}$ ஆயின் P' ஐ விவரிக்க.

$P' = \{$கூடு கட்டாத பறவைகள்$\}$

இனி தொடைகளின் நிரப்பியை வென் வரிப்படத்தின் மூலம் காட்டும் முறையைக் கவனிப்போம்.

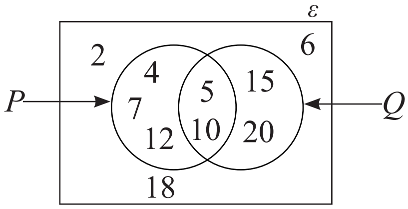
A என்பது ஓர் அகிலத் தொடையின் (ε) ஒரு தொடைப் பிரிவாயின், அதனை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் இவ்வாறு காட்டலாம்.



A' என்பது A ஐச் சாராத ε இன் எஞ்சிய மூலகங்கள் ஆகையால் தொடை A ஐத் தவிர எஞ்சிய பிரதேசம் A' ஐச் சார்ந்ததாகும்.

உதாரணம் 3

வென் வரிப்படத்திற்கேற்பக் கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றைக் காண்க.



(i) P' (ii) Q'

(iii) $(P \cap Q)$ (iv) $(P \cup Q)$

(i) $P' = \{2, 6, 15, 18, 20\}$ (ii) $Q' = \{2, 4, 6, 7, 12, 18\}$

(iii) $(P \cap Q) = \{5, 10\}$ (iv) $(P \cup Q) = \{4, 5, 7, 12, 15, 20, 10\}$

பயிற்சி 22.5

1. ε = {மாலினி, மீரா, சீதா, ராஜா, பிரபு}

A = {மாலினி, ராஜா}

B = {மீரா, சீதா, பிரபு}

C = {மாலினி, சீதா, ராஜா}

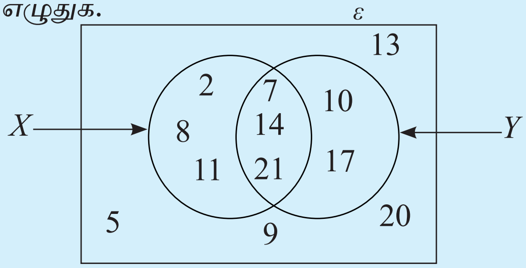
இதற்கேற்ப கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(i) A' (ii) B' (iii) C' (iv) $A \cap C$

2. $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$, $Q = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ ஆயின் ε, P, Q ஆகியவற்றை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறித்து அதிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(i) P' (ii) Q' (iii) $P \cap Q$ (iv) $P \cup Q$

3. தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்திலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடையை மூலகங்களுடன் எழுதுக.

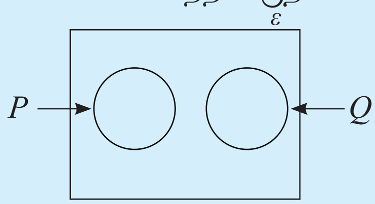


(i) X (ii) Y (iii) $X \cap Y$
(iv) $X \cup Y$ (v) X' (vi) Y'

பலவினப் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளை வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$
$P = \{2, 4, 6\}$
$Q = \{1, 5, 8\}$

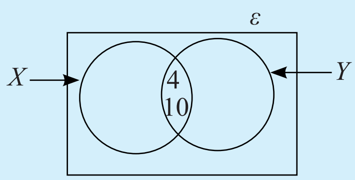


கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளை வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

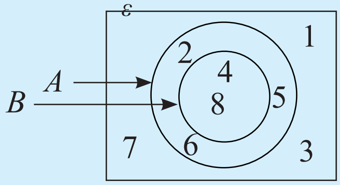
a. $P \cap Q$
b. $P \cup Q$
c. P'
d. Q'

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளை தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைப் பிரதிசெய்து குறிக்க.

$\varepsilon = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 \}$
$P = \{2, 4, 10\}$
$Q = \{3, 4, 8, 10\}$



3. தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி கீழேயுள்ள வினாக்களுக்கு விடையளிக்க.



கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளின் மூலகங்களை எழுதுக.

(i) A (ii) B (iii) ε

(iv) $A \cap B$ (v) $A \cup B$ (vi) A'

பொழிப்பு

- மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறக்கூடிய தொடைகள் முடிவுள்ள தொடைகளாகும்.
- மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறமுடியாத தொடைகள் முடிவில் தொடைகளாகும்.
- சமனான மூலகங்களைக் கொண்ட தொடைகள் சம தொடைகள் எனப்படும்.
- மூலகங்களின் எண்ணிக்கை சமனான தொடைகள் சமவலுத் தொடைகள் எனப்படும்.
- யாதாயினுமொரு சந்தர்ப்பத்தில் கவனத்தில் கொள்ளப்படும் எல்லா மூலகங்களையும் உள்ளடக்கிய தொடை அகிலத் தொடை எனப்படும்.
- இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளின் பொதுவான மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை இடைவெட்டுத் தொடை எனப்படும்.
- இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளின் எல்லா மூலகங்களையும் கொண்ட தொடை ஒன்றிப்புத் தொடை எனப்படும்.

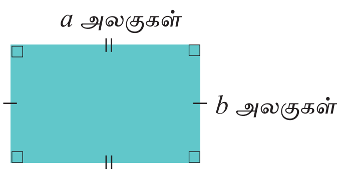
23 பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்
- ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்
- ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்

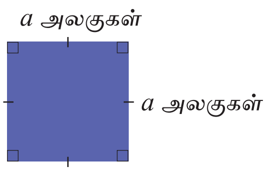
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பரப்பளவு

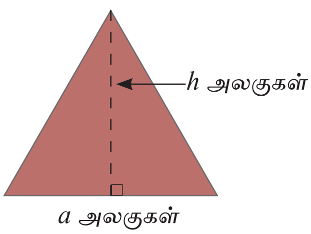
ஒரு மேற்பரப்பு பரம்பியுள்ள அளவைக் குறிப்பிடும் ஒரு கணியமாகப் பரப்பளவை அறிமுகப்படுத்தலாம். இதற்கேற்ப தரம் 7, தரம் 8 ஆகியவற்றில் நீங்கள் பரப்பளவு தொடர்பாகக் கற்றவற்றை மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.



நீளம் a அலகுகளும் அகலம் b அலகுகளும் உள்ள செவ்வக வடிவத்திலான ஓர் அடரின் பரப்பளவை A சதுர அலகுகள் எனக் குறிக்கும்போது $A = a \times b$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.



ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a அலகுகளை உடைய சதுர வடிவத்திலான ஓர் அடரின் பரப்பளவை A சதுர அலகுகள் எனக் கொள்ளும்போது $A = a^2$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

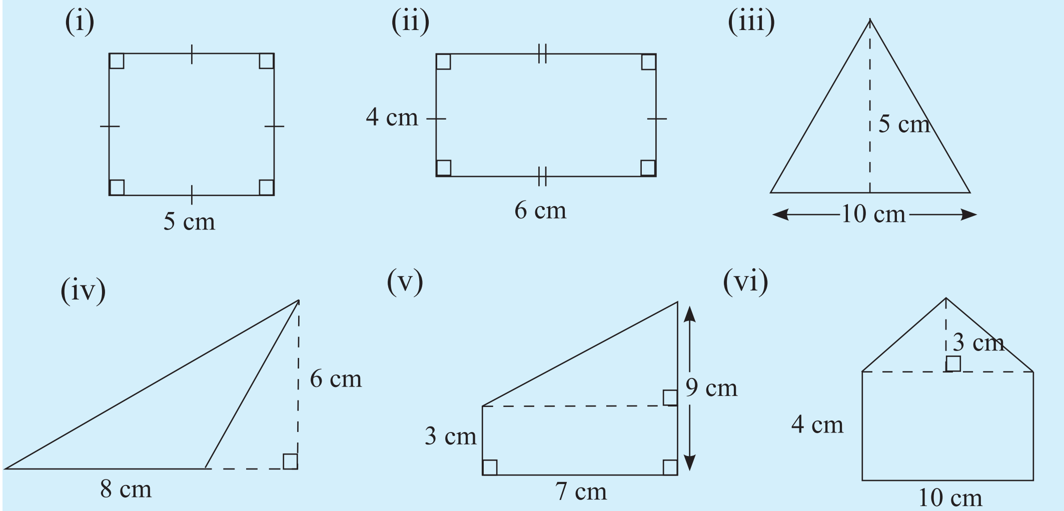


அடியின் நீளம் a அலகுகளும் அதற்கொத்த செங்குத்து உயரம் h அலகுகளும் உள்ள ஒரு முக்கோண அடரின் பரப்பளவை A சதுர அலகுகள் எனக் குறிக்கும்போது $A = \frac{1}{2} \times a \times h$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

நீங்கள் கற்றுள்ள இவ்விடயங்களை மேலும் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

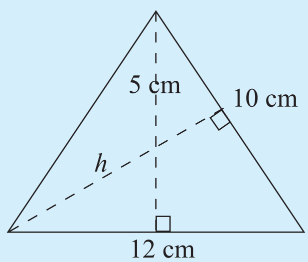
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தளவுருவினதும் பரப்பளவைக் காண்க.



2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணியில் 12 cm அடிக்குரிய செங்குத்துயரம் 5 cm உம் 10 cm அடிக்குரிய செங்குத்துயரம் h cm உம் ஆகும்.

(i) முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



3. (*a*) 12 cm பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி வடிவத்திலான அடரின் சுற்றளவு யாது?

(*b*) இச்சுற்றளவுக்குச் சமனான சுற்றளவு உடைய சதுர வடிவத்திலான ஓர் அடரின்

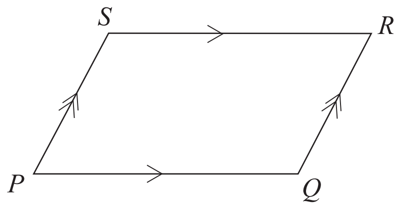
(i) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் யாது?

(ii) சதுர வடிவத்திலான அடரின் பரப்பளவைக் காண்க.

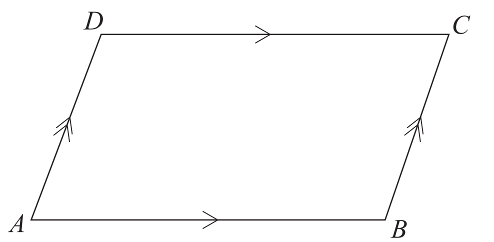
ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு

எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாற்பக்கல் **இணைகரம்** எனப்படும். மேலும், ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனாகும் என நாம் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளோம். இதற்கேற்ப, கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் இணைகரம் $PQRS$ இல்

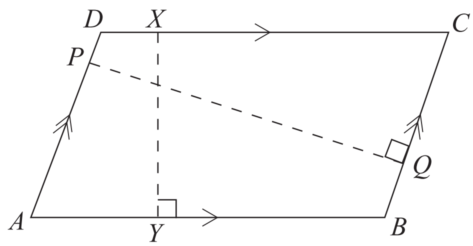
$PQ // SR$, $PS // QR$ ஆகும்.
$PQ = SR$, $PS = QR$ ஆகும்.



23.1 ஓர் இணைகரத்தின் அடியும் செங்குத்து உயரமும்



உருவில் தரப்பட்டுள்ள இணைகரத்தில் எந்தவொரு பக்கத்தையும் அதன் அடியாகக் கொள்ளலாம். ஒவ்வோர் அடிக்கும் ஒத்ததாக இணைகரத்தின் செங்குத்துயரம் வரையறுக்கப்படும் முறை கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

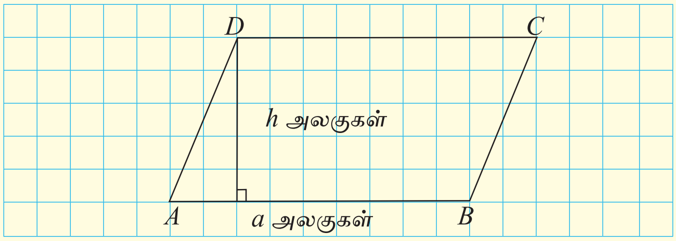


இணைகரத்தின் அடியாக AB ஐக் கொள்ளும்போது அடி AB உம் அதற்கு எதிர்ப் பக்கமாகிய DC உம் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை ஆகும். இந்த இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துயரம் உருவுக்கேற்ப XY ஆகும். XY என்பது அடி AB இற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் ஆகும். மேலும், அடியாக BC ஐக் கொள்ளும்போதும் BC, AD ஆகிய சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம் உருவின்படி PQ ஆகும். PQ என்பது அடி BC இற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் ஆகும்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்கும் முறையைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டினூடாகப் புரிந்துகொள்வோம்.

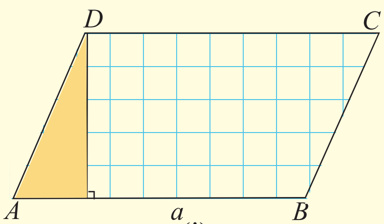
செயற்பாடு 1

படி 1: உங்களுடைய பயிற்சிப் புத்தகத்தின் சதுரக்கோட்டுத் தாள் ஒன்றில் நேர்விளிம்பையும் மூலைமட்டத்தையும் பயன்படுத்திக் கீழே உருவில் காட்டியவாறான இணைகரம் ஒன்றை வரையுங்கள்.

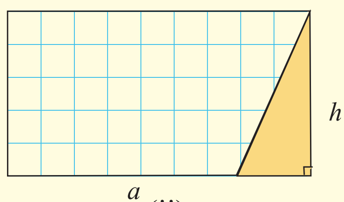


படி 2: வேறொரு சதுரக் கோட்டுத் தாளில் அதே அளவுள்ள இன்னுமொரு இணைகரத்தை வரைந்து இணைகர அடரை வெட்டி வேறாக்குக.

படி 3: உருவிலுள்ள நிழற்றப்பட்ட செங்கோண முக்கோணப் பகுதியை வெட்டி வேறாக்குக.



உரு (i)



உரு (ii)

படி 4: வெட்டியெடுத்த முக்கோண வடிவப் பகுதியை உருவிலுள்ளவாறு வைத்துப் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் ஒட்டுக. இப்போது நீங்கள் உரு (ii) இல் காட்டப்பட்டவாறான ஒரு செவ்வகத்தைப் பெற்றிருப்பீர்கள்.

படி 5: இப்போது நீங்கள் பெற்ற செவ்கத்தின் பரப்பளவை a, h ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இணைகரத்தின் பரப்பளவும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவும் ஒன்றுக்கொன்று சமனானவை என்பதைப் புரிந்திருப்பீர்கள்.

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

= $a \times h$ சதுர அலகுகள்

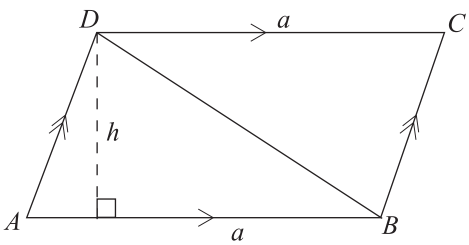
இங்கு h என்பது அடி AB இற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் என்பதை அவதானிக்க.

இவ்விடயங்களிற்கு ஏற்ப, ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்கான ஒரு சூத்திரத்தைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு = பக்கத்தின் நீளம் × அப்பக்கத்துக்கு ஒத்த செங்குத்துயரம்

இனி, ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காணக்கூடிய இன்னொரு முறையை ஆராய்வோம்.

ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்பதன் மூலமும் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காணலாம்.



இணைகரம் $ABCD$ இல் அடி AB இன் நீளம் a அலகுகள் எனவும் அதற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் h அலகுகள் எனவும் கொள்வோம். மூலை விட்டம் DB இன் மூலம் இணைகரம் $ABCD$ ஆனது ABD, BCD என்னும் இரண்டு முக்கோணிகளாக வேறாக்கப்படுகிறது.

முக்கோணி ABD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times a \times h$

முக்கோணி BCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times a \times h$ ($AB = DC$ ஆகையால்)

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு = $\Delta\, ABD$ இன் பரப்பளவு + ΔBCD இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times a \times h + \frac{1}{2} \times a \times h$$

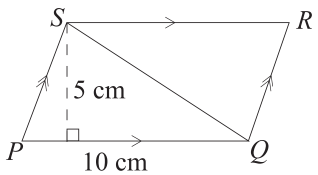
$$= \frac{ah}{2} + \frac{ah}{2}$$

$$= ah$$

∴ இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $\boldsymbol{ah}$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

உதாரணம் 1

இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



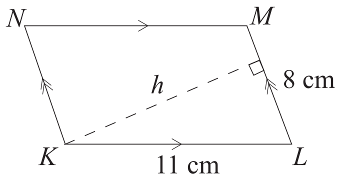
இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= 10 \times 5$

$= 50$

$\therefore$ இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 50 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

இணைகரம் $KLMN$ இன் பரப்பளவு 48 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



இணைகரம் $KLMN$ இன் பரப்பளவு $= 48\text{ cm}^2$

எனவே $8 \times h = 48$

$$h = \frac{48}{8}$$

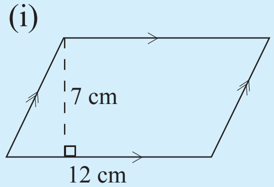
$$h = 6$$

அதாவது $h = 6\text{ cm}$ ஆகும்

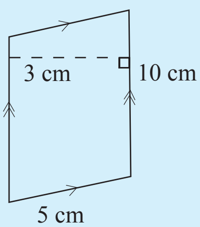
பயிற்சி 23.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் பரப்பளவைக் காண்க.

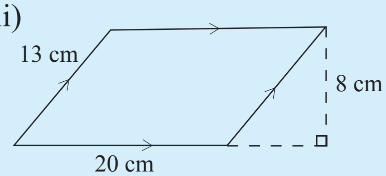
(i)



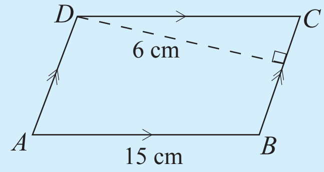
(ii)



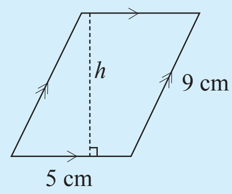
(iii)



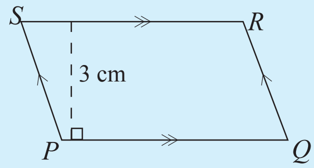
2. இணைகரம் $ABCD$ இன் சுற்றளவு 52 cm ஆயின், இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



3. இணைகரத்தின் பரப்பளவு 35 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



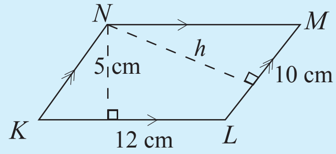
4. இணைகரத்தின் பரப்பளவு 105 cm^2 ஆயின், பக்கம் PQ இன் நீளத்தைக் கணிக்க.



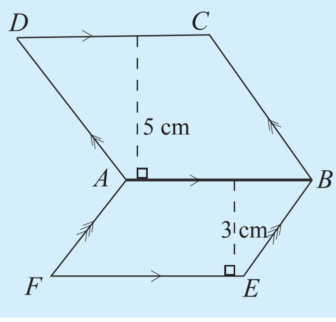
5. உருவில் உள்ள தகல்களுக்கேற்ப

(i) இணைகரம் $KLMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

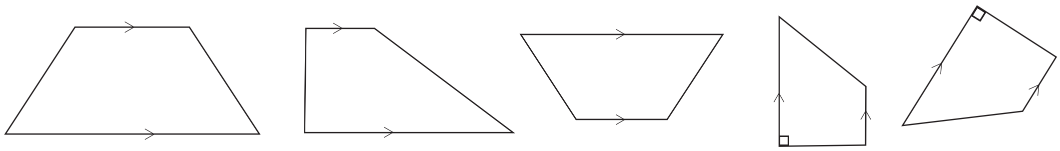


6. $ABCD$ இன் பரப்பளவு 30 cm^2 எனின், இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



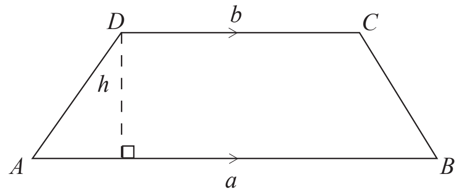
23.2 ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு

ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் மாத்திரம் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாற்பக்கல் சரிவகம் எனப்படும். சரிவக வடிவத்திலான சில உருவங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

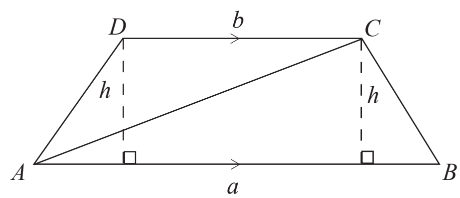


ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவோம்.

உருவில் தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கலில் AB, DC ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a அலகுகள், b அலகுகள் எனவும் அச்சமாந்தரப் பக்கங்கள் இரண்டுக்குமிடையிலான செங்குத்துத் தூரம் h அலகுகள் எனவும் கொள்வோம்.



இச்சரிவகத்தில் மூலைவிட்டம் AC ஐ வரைவதால் பெறப்படும் இரண்டு முக்கோணி களினதும் பரப்பளவுகளைக் கண்டு அவற்றைக் கூட்டுவதன் மூலம் சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்போம்.



முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times AB \times h$

முக்கோணி ACD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times DC \times h$

சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $= \Delta\ ABC$இன் பரப்பளவு $+\ \Delta\ ACD$ இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times AB \times h + \frac{1}{2} \times DC \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times (AB + DC)$$

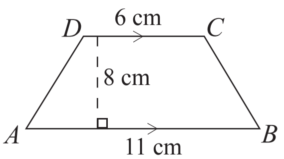
$$= \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (a + b)\, h$$ ஆகும்.

ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ (சமாந்தரப் பக்கங்கள் இரண்டினதும் நீளங்களின் கூட்டுத் தொகை) $\times$ (சமாந்தரப் பக்கங்களுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம்)

உதாரணம் 1

சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



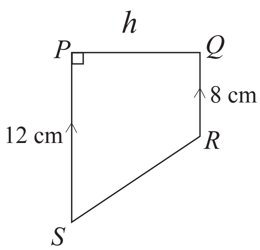
சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times (11 + 6) \times 8$

$$= \frac{1}{\cancel{2}_1} \times 17 \times \cancel{8}^4$$

$$= 68 \text{ cm}^2$$

உதாரணம் 2

சரிவகம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 70 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



சரிவகம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times (12 + 8) \times h$

$$= \frac{1}{\cancel{2}_1} \times \cancel{20}^{10} \times h$$

பரப்பளவு 70 cm^2 எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்,

$$10\,h = 70$$

$$h = \frac{70}{10}$$

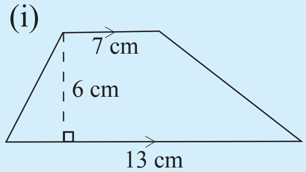
$$h = 7$$

$\therefore\ h = 7$ cm ஆகும்.

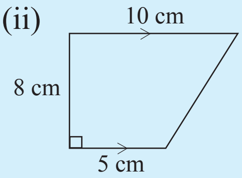
பயிற்சி 23.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சரிவகத்தினதும் பரப்பளவைக் காண்க.

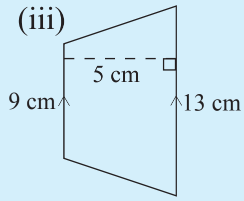
(i)



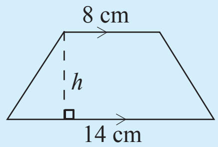
(ii)



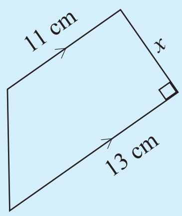
(iii)



2. சரிவகத்தின் பரப்பளவு 88 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

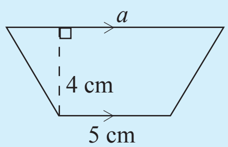


3. சரிவகத்தின் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆயின், x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



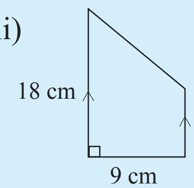
4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சரிவகத்திலும் அட்சரம் a இனால் காட்டப்பட்டுள்ள நீளத்தைக் காண்க. அவ்வச் சரிவகங்களின் பரப்பளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(i)



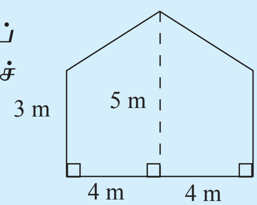
பரப்பளவு 26 cm^2 ஆகும்

(ii)



பரப்பளவு 135 cm^2 ஆகும்

5. ஒரு சுவரின் பக்கத் தோற்றம் ஒன்று உருவில் காட்டப் பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளுக்கேற்பச் சுவரின் பரப்பளவைக் காண்க.



6. ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு 30 cm^2 ஆகும். சமாந்தரப் பக்கங்களுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம் 3 cm ஆகும். சமாந்தரப் பக்கங்களின் நீளங்கள் எனக் கொள்ளக் கூடிய,
   (i) நிறைவெண் பெறுமானச் சோடிகள் 3 ஐயும்
   (ii) நிறைவெண் அல்லாத பெறுமானச் சோடிகள் 3 ஐயும் காண்க.

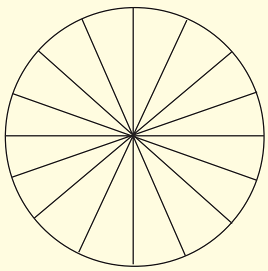
23.3 ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு

செவ்வகம், சதுரம், முக்கோணி, இணைகரம், சரிவகம் போன்ற வடிவங்களை உடைய அடர்களின் பரப்பளவைக் காணல் பற்றிக் கற்றுக் கொண்ட நாம் இப்போது வட்ட வடிவத்திலான அடர் ஒன்றின் பரப்பளவைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம். அதற்காக முதலில் கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1

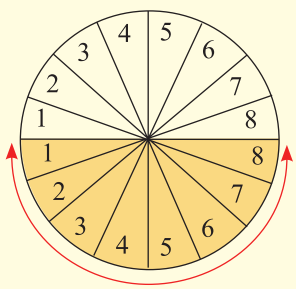
படி 1 : 6 cm ஆரையை உடைய ஒரு வட்டத்தைத் தாள் ஒன்றில் வரைக.

படி 2 : மையத்துக்கூடாக நேர்கோடுகளை வரைவதன் மூலம் வட்டத்தை இயன்ற வரை சிறிய **ஆரைச்சிறைகளாகப்** பிரிக்க (கிட்டத்தட்ட 16 துண்டுகள்).



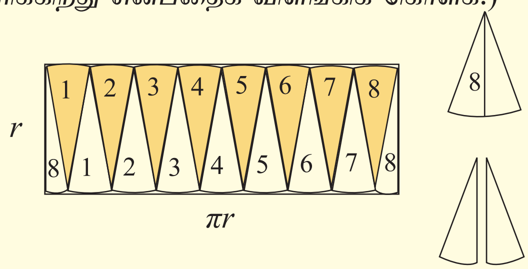
குறிப்பு - ஆரைச்சிறை என்பது 2 ஆரைகளாலும் ஒரு வில்லினாலும் அடைக்கப்பட்ட பிரதேசமாகும்.

படி 3 : வட்டத்தின் அரைவாசியை நிழற்றி உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு எல்லாப் பிரிவுகளையும் முறையே இலக்கமிட்டுக் கொள்க.



படி 4 : கோடுகள் வழியே வெட்டுவதன் மூலம் எல்லா ஆரைச்சிறைகளையும் வேறாக்குக.

படி 5 : வேறாக்கிக் கொண்ட ஆரைச்சிறைகளை உருவில் உள்ளவாறு ஒரு செவ்வக வடிவம் (கிட்டத்தட்ட) பெறப்படுமாறு ஒட்டிக்கொள்க. (ஆரைச் சிறைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது செவ்வகத்தின் பரப்பளவும் அதிகரிக்கிறது என்பதைக் விளங்கிக் கொள்க.)



தாள் வீணாகாத காரணத்தினால் வட்டத்தினதும் செவ்வகத்தினதும் பரப்பளவுகள் சமனாக இருக்க வேண்டும். வட்டத்தின் ஆரையை r எனக் கொண்டு பின்வருமாறு செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் காணலாம்.

$$\text{பெறப்படும் செவ்வகத்தின் நீளம்} = \text{வட்டத்தின் சுற்றளவு} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\pi r \times \frac{1}{2}$$

$$= \pi r$$

பெறப்படும் செவ்வகத்தின் அகலம் $= r$

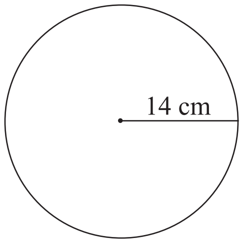
$$\begin{aligned} \text{செவ்வகத்தின் பரப்பளவு} &= \text{நீளம்} \times \text{அகலம்} \\ &= \pi r \times r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ வட்டம் ஒன்றின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

கணித்தல்களின் வசதிக்காக π இன் பெறுமானம் அண்ணளவாக 3.142 அல்லது $\frac{22}{7}$ எனப் பயன்படுத்தப்படும்.

உதாரணம் 1

14 cm ஆரையை உடைய வட்ட வடிவத்திலான ஓர் அடரின் பரப்பளவைக் காண்க.



ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{2}{\cancel{14}} \times 14$$

$$= 44 \times 14$$

$$= 616 \text{ cm}^2$$

$\therefore$ வட்டத்தின் பரப்பளவு 616 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

154 cm^2 பரப்பளவை உடைய வட்ட வடிவத்திலான ஓர் அடரின் ஆரையைக் கணிக்க.

வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times r^2$$

வட்டத்தின் பரப்பளவு 154 cm^2 எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்

$$\frac{22}{7} r^2 = 154$$

எனவே, $\frac{22}{\cancel{7}} r^2 \times \cancel{7} = 154 \times 7$

$$\frac{\cancel{22} r^2}{\cancel{22}} = \frac{1078}{22} \quad = 49$$

$$r^2 = 49$$

எனவே $r = 7$ அல்லது $r = -7$ ஆகும்.

ஆயினும் ஆரையானது ஒரு மறைப் பெறுமானமாக இருக்க முடியாது.

$\therefore$ வட்ட வடிவத்திலான அடரின் ஆரை 7 cm ஆகும்.

பயிற்சி 23.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளைக் கொண்ட வட்ட வடிவத்திலான அடர்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க (π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).

(i) ஆரை 14 cm (ii) ஆரை 21 cm (iii) விட்டம் 7 cm (iv) விட்டம் 21 cm

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள பரப்பளவுகளை உடைய வட்டங்களின் ஆரைகளைக் கணிக்க.

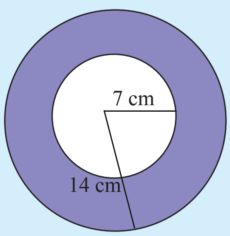
(i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) $38\frac{1}{2}$ cm^2

3. 196 cm^2 பரப்பளவை உடைய ஒரு சதுரத்திலிருந்து வெட்டியெடுக்கக் கூடிய மிகப் பெரிய வட்டத்தின்,

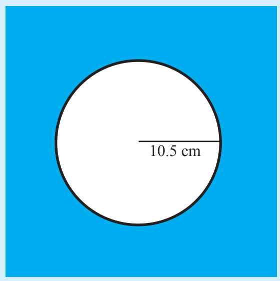
(i) ஆரை யாது ?
(ii) பரப்பளவு யாது ?

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(i)



(ii)



5. 70 cm நீளமும் 14 cm அகலமும் உள்ள செவ்வக வடிவத்திலான ஓர் அடரிலிருந்து வெட்டக்கூடிய 7 cm ஆரை உள்ள வட்டங்களின் அதிகூடிய எண்ணிக்கை யாது ?

பொழிப்பு

- அடியின் நீளம் a அலகுகளாகவும் உயரம் h அலகுகளாகவும் உள்ள ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு ah சதுர அலகுகள் ஆகும்.
- சமாந்தரப் பக்கங்கள் இரண்டினதும் நீளங்கள் முறையே a, b அலகுகள் ஆகுமாறும் அக்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துயரம் h அலகுகள் ஆகுமாறும் உள்ள ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}(a+b)h$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.
- ஆரை r அலகுகளை உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2 சதுர அலகுகள் ஆகும்.

24 நிகழ்தகவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளை அறிந்துகொள்ளவதற்கும்
- யாதாயினும் ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளியை எழுதுவதற்கும்
- ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் சமநேர்தகவுள்ள பேறுகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- சமநேர்தகவுள்ள ஒரு பேற்றின் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

24.1 எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள்

ஒரு சாதாரண நாணயம் சுண்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுவோம். ஒரு நாணயம் சுண்டப்படும்போது ''தலை மேலே இருத்தல்'', ''பூ மேலே இருத்தல்'' என்பன பேறுகளாகும் என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது பரிசோதனை செய்யப்படுவதற்கு முன்னர் எல்லா இயல்தகு பேறுகளையும் நாம் அறிவோம். எனினும் தலை மேலே இருக்கும் அல்லது பூ மேலே இருக்கும் என்று நாம் உறுதியாகக் கூறமுடியாது. மேலும் இப்பரிசோதனையை ஒரே நிலைமைகளின் கீழ் பல தடவை செய்யலாம். பரிசோதனை திரும்பச் செய்யப்படும்போது நாம் பேறுகளில் ஒரு கோலத்தை இனங் காண முடியாமல் இருத்தல் இன்னுமோர் அம்சமாகும். மேற்குறித்த அம்சங்கள் உள்ள பரிசோதனைகள் **எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள்** எனப்படும்.

எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள் பின்வரும் பொதுச் சிறப்பியல்புகளைக் கொண்டுள்ளன.

- பரிசோதனையை ஒரே நிலைமைகளின் கீழ் பல தடவைத் திரும்பச் செய்யலாம்.
- பரிசோதனை நிறைவேற்றப்படு முன்பாக அதன் எல்லா இயல்தகு பேறுகளும் அறியப்பட்டுள்ளன.
- பரிசோதனையை நிறைவேற்று முன்னர் அதன் பேறை உறுதியாகக் கூறமுடியாது.
- பரிசோதனை திரும்பச் செய்யப்படும்போது பேறுகளில் ஒரு கோலத்தைக் காணமுடியாது.

வேறொர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

முகங்கள் 1 தொடக்கம் 6 வரைக்கும் இலக்கமிடப்பட்டுள்ள ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டி மேலே இருக்கும் முகத்தின் எண்ணைக் குறித்துக் கொள் ளும் பரிசோதனையின் எல்லாப் பேறுகளும் அறியப்பட்டிருந்தாலும் பரிசோதனையை நிறைவேற்றுவதற்கு முன்னர் எந்தப் பேறு நடைபெறுமென உறுதியாகக் கூற முடியாது.

எனினும் இப்பரிசோதனையை அதே நிபந்தனைகளின் கீழ் பல தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யலாம். ஆனால் பேறுகளில் ஒரு கோலம் இருக்குமென எதிர்பார்க்க முடியாது. ஆகவே ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டிப் பேறை அவதானித்தல் ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையாகும்.

பயிற்சி 24.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள பரிசோதனைகளைக் கருத்தில் கொண்டு அவை எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள் எனின் எதிரே "✓"அடையாளத்தையும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள் அல்ல எனின் எதிரே "×" அடையாளத்தையும் இடுக.

பரிசோதனை	எழுமாற்று / எழுமாற்றல்ல
1. முகங்களில் 1 இலிருந்து 4 வரை இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு நான்முகித் தாயக்கட்டையை உருட்டி மேசையைத் தொடும் பக்கத்தில் உள்ள முகத்தைக் குறித்தல்.	
2. ஒரே நிறமுள்ள சர்வசமமான பவளங்களைக் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பவளத்தை வெளியே எடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறித்தல்.	
3. குறித்த ஓர் இலக்குக்கு ஒரு பந்தை எறிந்து இலக்கில் படுகிறதா என்பதை அவதானித்தல்.	
4. முள்ளங்கி விதைகள் 5 ஐ நட்டு 5 தினங்களின் பின் அவற்றில் எத்தனை முளைத்துள்ளன என அவதானித்தல்.	
5. மூன்று சாவிகளைக் கொண்ட ஒரு சாவிக் கொத்திலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் ஒரு சாவியினால் ஒரு கதவு திறபடுமா எனப் பார்த்தல்.	
6. பந்து ஒன்றை மேலே எறிந்து அது கீழே விழுகின்றதா என அவதானித்தல்.	
7. 1, 3, 5 என இலக்கமிடப்பட்ட மூன்று சர்வசமனான அட்டைகள் உள்ள பெட்டி ஒன்றிலிருந்து இரண்டு அட்டைகளை வெளியே எடுத்து அவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு ஒற்றையெண்ணாக இருக்கின்றதா என்பதை அவதானித்தல்.	

24.2 மாதிரி வெளி

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையிலிருந்து கிடைக்கத்தக்க எல்லாப் பேறுகளையும் ஒரு தொடையினால் காட்டலாம். அத்தொடையில் ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் பேறுகளாகக் கிடைக்கத்தக்க எல்லாப் பேறுகளும் அடங்கும். அது **மாதிரி வெளி** எனப்படும். மாதிரி வெளி பொதுவாக S இனால் குறிக்கப்படும். அதில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n\,(S)$ இனால் காட்டப்படும்.

ஓர் உதாரணமாக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது மேலே இருக்கும் பக்கத்தை அவதானிக்கும் பரிசோதனையில் கிடைக்கத்தக்க எல்லாப் பேறுகளினதும் தொடை அதாவது மாதிரி வெளி

$S = \{$ தலை, பூ$\}$

$n(S) = 2$

எனக் காட்டலாம்.

இவ்வாறே முகங்களில் 1 தொடக்கம் 6 வரைக்கும் இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக் கட்டையை உருட்டும்போது மேலே இருக்கும் பக்கத்தில் உள்ள இலக்கத்தை அவதானிக்கும் பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளி

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$

எனக் காட்டலாம்.

உதாரணம் 1

முகங்களில் 1 இலிருந்த 4 வரை இலக்கங்கள் எழுதப்பட்ட ஒழுங்கான நான்முகி வடிவத்திலான ஒரு தாயக்கட்டையை மேலே எறியும்போது மேசையைத் தொடுமாறு விழும் பக்கத்திலுள்ள இலக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளும் பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளியை எழுதுக.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$n(S) = 4$

உதாரணம் 2

முறையே B_1, B_2, W_1, W_2, W_3 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரே அளவிலான இரண்டு கறுப்பு மாபிள்களும் மூன்று வெள்ளை மாபிள்களும் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு மாபிளை எடுக்கும் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியை எழுதுக. $n(S)$ இன் பெறுமானம் யாது?

$S = \{B_1, B_2, W_1, W_2, W_3\}$

$n(S) = 5$

உதாரணம் 3

ஒரு பக்கம் நீல (B) நிறமும் மற்றைய பக்கம் சிவப்பு (R) நிறமும் குறிக்கப்பட்டுள்ள சீரான அட்டைத் தாள் ஒன்றை இரு தடவைகள் எறியும்போது கிடைக்கும் பேறுகளுக்கான மாதிரி வெளியைத் தருக.

இரு தடவைகளும் நீல நிறம் பெறப்படுதல் (B, B) எனவும் முதலாம் தடவை நீலமும் இரண்டாம் தடவை சிவப்பும் கிடைத்தல் (B, R) என்றவாறும் குறிக்கப்படும்.

இரு தடவைகள் எறியப்படுவதால் கிடைக்கும் பேறுகள்

$S = \{(B, B), (B, R), (R, B), (R, R)\}$

குறிப்பு

மாதிரி வெளியின் தொடைப் பிரிவானது நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

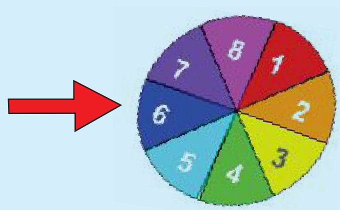
பயிற்சி 24.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைக்குமுரிய மாதிரி வெளியை எழுதுக.

   (i) நீலம், சிவப்பு, கறுப்பு, பச்சை ஆகிய ஒவ்வொரு நிறங்களிலும் ஒரு பேனா வீதம் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு பேனாவைத் தெரிந்தெடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறித்தல் (பேனாக்கள் நிறம் தவிர எல்லா அம்சங்களும் சர்வசமமானவை).

   (ii) 5 இலிருந்து 15 வரை எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ள சமனான அட்டைகளுள்ள ஒரு பையிலிருந்து ஓர் அட்டையை வெளியே எடுத்து அதன் எண்ணைக் குறித்தல்.

   (iii) உருவிலுள்ள தட்டைச் சுழலச் செய்து ஓய்வடையச் செய்யும்போது அம்புக்குறியின் எதிரேயுள்ள எண்ணைக் குறித்தல்.



   (iv) ஒரு பையில் ஒரே பருமனும் வடிவமும் உள்ள 4 பாற்சுவையுள்ள இனிப்புகளும் 3 தோடம்பழச் சுவை உள்ள இனிப்புகளும் உள்ளன. எழுமாறாக ஓர் இனிப்பைத் தெரிந்தெடுத்து அதன் சுவையைக் குறித்தல்

   (v) ஒரு நாணயக் குற்றி இரண்டு முறை சுண்டப்படும்போது கிடைக்கும் மாதிரி வெளியைத் தருக.

24.3 சம நேர்தகவுள்ள பேறுகள்

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியைக் கருதும்போது அதன் ஒவ்வொரு பேறும் நேர்வதற்கான ஆற்றல் சமமாக இருந்தால், அப்பரிசோதனை சமமாய் நேரத்தக்க பேறுகள் உள்ள பரிசோதனை எனப்படும். அப்பேறுகள் **சம நேர்தகவுள்ள பேறுகள்** எனப்படும்.

முகங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டையைக் கருதுவோம். அது செய்யப்பட்டுள்ள திரவியம் தாயக்கட்டை எங்கணும் சீராகப் பரவியுள்ளதெனக் கொள்வோம். அப்போது சமச்சீர் காரணமாகத் தாயக்கட்டை உருட்டப்படும்போது அதன் ஒவ்வொரு முகமும் மேலே இருப்பதற்குச் சம

நேர்தகவுள்ளது என்பது தெளிவாகும். ஒரு கோடாத நாணயத்திற்கும் இவ்வாறேயாம். இவற்றைப் போன்ற சமச்சீரானவையும் சீராகப் பரம்பியுள்ள திரவியத்தினாலானவையுமான பொருள்கள் கோடாத பொருள்கள் எனப்படும். ஒரு கோடாத நாணயத்தைச் சுண்டுதல், ஒரு தாயக் கட்டையை உருட்டுதல் போன்ற இத்தகைய பரிசோதனைகள் நிகழ்தகவுக் கொள்கையை விளக்குதலைப் பொறுத்தவரை முக்கியமான உதாரணங்களாகக் கருதப்படுகின்றன.

முகங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டி மேலே இருக்கும் முகத்தின் இலக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளும் பரிசோதனையைக் கருதுக. இங்கு வெவ்வேறு பக்கங்கள் மேலே இருப்பதற்கான நேர்தகவு சமமாக இல்லாதிருக்கலாம். ஆகவே அத்தகைய ஒரு தாயக்கட்டை கோடாத தாயக்கட்டையாகக் கருதப்படுவதில்லை. அத்தகைய பரிசோதனைகளின் பேறுகள் சமமாக நேராதிருக்கலாம்.

இப்போது வேறொரு பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.

நான்கு முகங்களில் சிவப்பு தீந்தையும் இரு முகங்களில் நீலத் தீந்தையும் பூசப்பட்டுள்ள ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை உருட்டப்பட்டு மேலே இருக்கும் முகத்தின் நிறம் குறித்துக் கொள்ளப்படும் பரிசோதனையில் சிவப்பு நிற முகம் மேலே இருப்பதற்கான நேர்தகவு நீல நிற முகம் மேலே இருப்பதற்கான நேர்தகவிலும் கூடியதாகும். இப்பரிசோதனையின் பேறுகள் சமமாய் நேரத்தக்கனவல்ல.

பயிற்சி 24.3

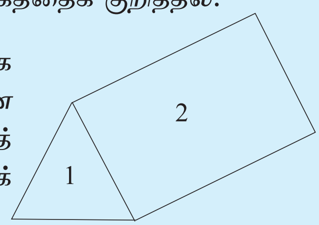
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பரிசோதனைக்கும் உரிய பேறுகள் சமநேர்தகவுள்ளனவா, இல்லையா என்பதைக் காண்க.

(i) ஒரு கோடாத நான்முகியின் முகங்களில் சிவப்பு, நீலம், மஞ்சள், பச்சை ஆகிய நிறங்கள் பூசப்பட்டுள்ளன. இதனை உருட்டும்போது மேலே இருக்கும் முகத்தின் நிறத்தைக் குறித்தல்.

(ii) ஒரு கோடாத நாணயம் சுண்டப்படும்போது மேலே இருக்கும் பக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

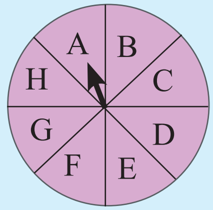
(iii) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4 என இலக்கமிடப்பட்ட 10 அட்டைகளிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட ஓர் அட்டையின் இலக்கத்தைக் குறித்தல்.

(iv) பக்கங்களில் 1 தொடக்கம் 5 வரை இலக்கமிடப்பட்ட உருவில் காட்டியவாறான முக்கோண அரியத்தை ஒரு தடவை உருட்டும்போது நிலத்தைத் தொடும் பக்கத்தின் இலக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

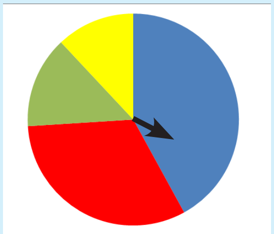


(v) ஒரே அளவிலான 3 சிவப்பு நிற அட்டைகளையும் 4 நீல நிற அட்டைகளையும் கொண்டுள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட ஓர் அட்டையின் நிறத்தைக் குறித்தல்.

(vi) சமனான ஆரைச்சிறைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ள வட்டவடிவத்திலான ஒரு தட்டின் மையத்தில் பொருத்தப் பட்டுள்ள சுட்டியைச் சுழற்றி ஓய்வடையச் செய்யும்போது அம்புக்குறி ஓய்வு நிலைக்கு வரும் இடத்துக்கேற்ப அட்சரத்தைக் குறித்தல்.



(vii) பகுதிகள் சமனற்றவையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ள வட்ட வட்டவடிவத்திலான ஒரு தட்டின் மையத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள சுட்டியைச் சுழற்றி ஓய்வடையச் செய்யும்போது சுட்டியானது ஓய்வு நிலைக்கு வரும் இடத்துக்கேற்ப நிறத்தைக் குறித்தல்



24.4 சமநேர்தகவுள்ள ஒரு பேற்றின் நிகழ்தகவு

ஒரு குறித்த எழுமாற்று பரிசோதனையின் ஒவ்வொரு பேறும் சமமாய் நேரும்போதும் தெரிந்தெடுத்த ஒரு பேறின் நிகழ்தகவைப் பின்வருமாறு பெறலாமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

$$\text{தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு பேற்றின் நிகழ்தகவு} = \frac{1}{\text{எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியின் பேறுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

ஒரு கோடாத தாயக் கட்டை உருட்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுக. இங்கு ஒரு தெரிந்தெடுத்த எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும். உதாரணமாக 3 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்.

இப்போது ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியைக் கருதுக. இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தவைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம். மூன்று இரட்டை எண்களும் மூன்று ஒற்றை எண்களும் இருப்பதனால் இந்நிகழ்ச்சியின் பேறுகள் சமமாக நேரத்தக்கனவாகும். ஆகவே ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{6}$ ஆகும்.

ஆகவே சமமாய் நேரத்தக்க பேறுகள் உள்ள ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியில் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\text{நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு} = \frac{\text{நிகழ்ச்சியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.
மாதிரி வெளி S இலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n\,(S)$ ஆகவும் நிகழ்ச்சி A இல் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n\,(A)$ ஆகவும் நிகழ்ச்சி நடைபெறும் நிகழ்தகவு $p\,(A)$ ஆகவும் இருப்பின்,

$$\boxed{p\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)}}$$

இப்போது சில உதாரணங்களைக் கருதுவதன் மூலம் மேலும் விடயங்களைக் கற்போம்.

உதாரணம் 1

கோடாத ஒரு நாணயத்தை ஒரு தடவை சுண்டும்போது மேல்நோக்கி இருக்கும் பக்கத்தை அவதானிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில்,

(i) மாதிரி வெளியை எழுதி $n\,(S)$ ஐக் காண்க.
(ii) தலை பெறப்படுவதற்கான பேறு A ஆயின் A இன் மூலகங்களை எழுதி $n\,(A)$ ஐக் காண்க.
(iii) தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $p\,(A)$ ஐக் காண்க.

(i) $S = \{$தலை, பூ$\}$
$n\,(S) = 2$

(ii) $A = \{$தலை$\}$
$n\,(A) = 1$

(iii) $p\,(A) = \dfrac{n\,(A)}{n\,(S)}$

$p\,(A) = \dfrac{1}{2}$

உதாரணம் 2

1, 2, 3, 4 என முகங்களில் இலக்கமிடப்பட்டுள்ள கோடாத ஒரு நான்முகித் தாயக்கட்டையை மேலே எறிந்து மேசையைத் தொடும் முகத்தின் இலக்கத்தைக் குறிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில் பெறப்படும் எண்

(i) 2 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
(ii) ஓர் இரட்டை எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
(iii) 1 இலும் பெரிய ஓர் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

இங்கு மாதிரி வெளி $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ஆகையால் $n\,(S) = 4$ ஆகும்.
(i) பேறு 2 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{1}{4}$.

(ii) ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை B எனக் கொண்டால்
$B = \{2, 4\}$ ஆகையால் $n(B) = 2$ ஆகும்.
$\therefore p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

(iii) 1இலும் கூடிய 3 எண்கள் உள்ளன $\{2, 3, 4\}$.
$\therefore$ 1இலும் கூடிய ஓர் எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

பயிற்சி 24.4

1. முகங்களில் 1 இலிருந்து 6 வரைக்கும் இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு தாயக்கட்டையை உருட்டும்போது மேல் நோக்கி இருக்கும் பக்கத்தின் எண்ணைக் குறிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில்
   (i) பெறக்கூடிய எல்லா இயல்தகவுப் பேறுகளையும் உள்ளடக்கிய மாதிரி வெளியை (S) எழுதுக.
   (ii) $n(S)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (iii) ஓர் இரட்டை எண் விழும் நிகழ்ச்சியை A எனக் கொண்டால் A இன் எல்லா மூலகங்களையும் எழுதி $n(A)$ ஐக் காண்க.
   (iv) A நடைபெறுவதற்கான $P(A)$ ஐக் காண்க.
   (v) முதன்மை எண்ணாகும் ஓர் எண் விழுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

2. A, B, C, D, E, F, G, H என எழுதப்பட்டுள்ள 8 சர்வசமனான அட்டைகளைக் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக ஓர் அட்டையை எடுக்கும் ஒரு பரிசோதனையின்
   (i) மாதிரி வெளியை எழுதுக.
   (ii) எழுத்து B ஐக் கொண்ட அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) ஓர் உயிரெழுத்து எழுதப்பட்ட ஓர் அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iv) எழுத்து K எழுதப்பட்ட அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

3. 1 இலிருந்து 25 வரை எண்கள் இடப்பட்ட சர்வசமனான 25 அட்டைகள் ஒரு பெட்டியில் உள்ளன. அதிலிருந்து எழுமாற்றாக ஓர் எண் எடுக்கப்படும் பரிசோதனைக்கு ஏற்ப,
   (i) எண் 8 ஐக் கொண்ட அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (ii) 5 இன் மடங்காகும் ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஓர் அட்டை பெறப் படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) ஒற்றை எண்ணாகவுள்ள ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஓர் அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iv) சதுர எண்ணாகவுள்ள ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஓர் அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

4. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள உபகரணத்தின் காட்டியைச் (அம்புக்குறியைச்) சுழலச் செய்து ஓய்வடையச் செய்யும் போது அம்புக்குறியின் அமைவுக்கேற்பப் பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) கடும் நீல நிறமுள்ள கட்டத்தினுள்ளே சுட்டி ஓய்வடைதல்

(ii) சிவப்பு நிறமுள்ள கட்டத்தினுள்ளே சுட்டி ஓய்வடைதல்

(iii) செம்மஞ்சள் நிறமுள்ள கட்டத்தினுள்ளே சுட்டி ஓய்வடைதல்.

5. ஒரு பல்தெரிவு வினாத்தாளில் ஒரு வினாவிற்குத் தரப்பட்டுள்ள 5 விடைகளில் ஒரு விடை மாத்திரம் சரியானதாகும். விடை தெரியாத ஒரு வினாவுக்கு ஒரு மாணவன் எழுமாற்றாக ஒரு விடையைத் தெரிந்தெடுத்தான். அவனது விடை

(i) சரியானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) பிழையானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

6. ஒரே அளவான மாபிள்களைக் கொண்ட பை ஒன்றில் 3 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் 2 கறுப்பு நிற மாபிள்களும் 5 வெள்ளை நிற மாபிள்களும் உள்ளன.

(i) சிவப்பு நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) நீல நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) சிவப்பு அல்லது வெள்ளை நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iv) கறுப்பு நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. எழுமாறாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாணவன் ஒரு வாரத்தில் எத்தினத்தில் பிறந்துள்ளான் என்பதை ஆராயும் ஒரு பரிசோதனையைக் கருதுக.

(i) மாணவன் திங்கட்கிழமை பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) மாணவன் ஞாயிற்றுக்கிழமை பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) மாணவன் புதன் அல்லது வெள்ளிக்கிழமை பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iv) மாணவன் சனி, ஞாயிறு அல்லாத ஒரு தினத்தில் பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

பொழிப்பு

சமநேர்தகவுடைய பேறுகள் உள்ள எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றில்

- குறித்த ஒரு பேறு கிடைப்பதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{1}{\text{எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியில் உள்ள பேறுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

- $\text{ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு} = \dfrac{\text{நிகழ்ச்சியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரிவெளியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}$

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

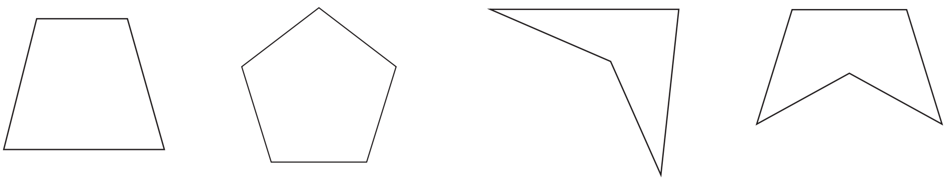
25 பல்கோணியின் கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்கள் தொடர்பான கேத்திரகணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் தொடர்பான கேத்திரகணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- ஒழுங்கான பல்கோணிகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

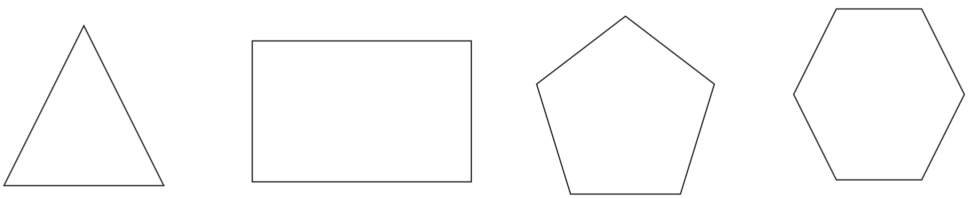
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேர் கோட்டுத் துண்டங்களால் அடைக்கப்பட்ட தளவுரு **பல்கோணி** என அழைக்கப்படும். குவிவுப் பல்கோணிகள், குழிவுப் (விரி) பல்கோணிகள் என இரு வகைப் பல்கோணிகள் உள்ளன.



குவிவுப் பல்கோணிகள் குழிவுப் பல்கோணிகள்

அவற்றில் சில பல்கோணிகள் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப விசேட பெயர்களால் அழைக்கப்படும். 3 பக்கங்களை, 4 பக்கங்களை, 5 பக்கங்களை, 6 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணிகள் முறையே முக்கோணி, நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி என அழைக்கப்படும்.



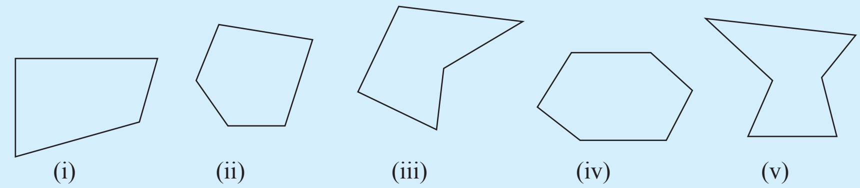
நீங்கள் முன்னைய வகுப்புக்களில் முக்கோணி ஒன்றின் மற்றும் நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை பற்றிய பின்வரும் பேறுகளைக் கற்றுள்ளீர்கள்.

முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.
நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.

நீங்கள் பல்கோணிகள் தொடர்பாகக் கற்றுள்ள மேற்குறிப்பிட்ட விடயங்களை மேலும் உறுதிசெய்து கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் குவிவுப் பல்கோணிகளைத் தெரிவுசெய்க.



2. பின்வரும் கூற்றுகளில் சரியானவற்றைத் தெரிவுசெய்க.

(a) 7 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி எழுகோணி எனப்படும். ( )

(b) எந்தவொரு பல்கோணியினதும் அகக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமனாகும். ( )

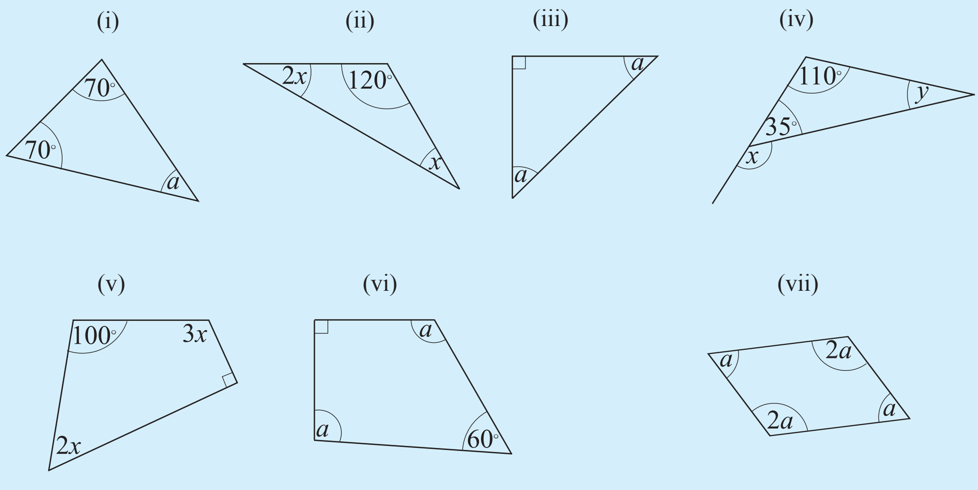
(c) எல்லாப் பக்கங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமமான பல்கோணி ஒழுங்கான பல்கோணி எனப்படும். ( )

(d) பல்கோணி ஒன்றின் ஓர் உச்சியில் உள்ள அகக்கோணத்தினதும் புறக் கோணத்தினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும். ( )

(e) ஒரு தசகோணியில் 11 அகக்கோணங்கள் உள்ளன. ( )

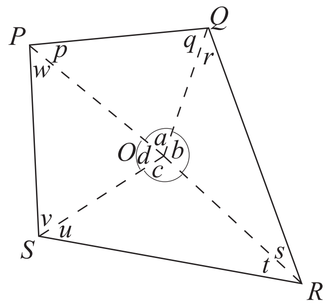
(f) நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும். ( )

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் அட்சரகணித உறுப்புக்களால் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



25.1 பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணும் ஒரு முறையை முதலில் பார்ப்போம்.



உருவில் தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $PQRS$ இனுள்ளே O என்பது யாதேனுமொரு புள்ளியாகும். PO, QO, RO, SO என்பவற்றை இணைப்பதன் மூலம் 4 முக்கோணிகள் பெறப்பட்டுள்ளன.

முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} ஆகையால்,

முக்கோணி PQO ஐக் கருதும்போது $p + q + a = 180^{o}$

முக்கோணி QRO ஐக் கருதும்போது $r + s + b = 180^{o}$

முக்கோணி RSO ஐக் கருதும்போது $t + u + c = 180^{o}$

முக்கோணி SPO ஐக் கருதும்போது $v + w + d = 180^{o}$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளையும் கூட்டுவதால்

$$(p + q + a) + (r + s + b) + (t + u + c) + (v + w + d) = 180^{o} \times 4$$

$$\therefore\ (p + q + r + s + t + u + v + w) + (a + b + c + d) = 720^{o}$$

a, b, c, d என்பன புள்ளி O ஐச் சுற்றியுள்ள கோணங்கள் ஆகையால்,

$a + b + c + d = 360^{o}$ ஆகும்.

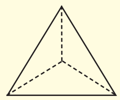
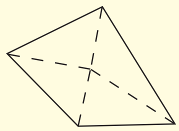
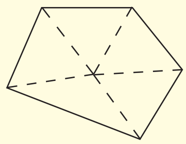
$$\therefore\ (p + q + r + s + t + u + v + w) = 720 - 360^{o}$$
$$= 360^{o}$$

$\therefore$ நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360^{o} ஆகும்.

இப்போது நாம் n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்காக n இல் கோவை ஒன்றைப் பெறுவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்வோம்.

செயற்பாடு 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

பல்கோணி	உரு	முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை	அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை
முக்கோணி		3	$180^{o} \times 3 - 360^{o} = 180^{o}$
நாற்பக்கல்		4	$180^{o} \times 4 - 360^{o} = 360^{o}$
ஐங்கோணி		5	$180^{o} \times ... - 360^{o} = 540^{o}$
அறுகோணி	....	....	....
எழுகோணி	....	....	....
எண்கோணி	....	....	....
n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி	....	....	....

மேற்படி செயற்பாட்டிற்கு ஏற்ப, n எண்ணிக்கையான பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^{o} \times n - 360^{o}$ என்ற கோவையைப் பெற்றிருப்பீர்கள்.

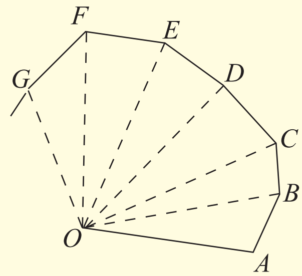
$180^{o} \times n - 360^{o}$ என்ற கோவையை நினைவில் வைத்திருப்பதற்காகப் பின்வருமாறு அதனை ஒழுங்கமைப்போம்.

$$\begin{aligned}180^{o} \times n - 360^{o} &= 90^{o} \times 2n - 90^{o} \times 4\\ &= 90^{o}(2n-4)\\ &= (2n-4) \text{ செங்கோணங்கள்}\end{aligned}$$

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= (2n-4)$ செங்கோணங்கள்.

செயற்பாடு 2

பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான சூத்திரம் ஒன்றைப் பெற்றுக் கொள்ளக் கூடிய இன்னுமொரு முறை கீழே தரப்பட்டுள்ள இப்பிரசினத்தில் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) தரப்பட்டுள்ள வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

பல்கோணி	பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	பல்கோணியின் பெயர்	முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை	அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை
OAB	3	முக்கோணி	1	$180^\circ \times 1 = 180^\circ$
$OABC$	4	நாற்பக்கல்	2	$180^\circ \times$ .... = ...
$OABCD$	....	....	....	....
$OABCDE$	....	....	....	....
$OABCDEF$	....	....	....	....
$OABCDEFG$	....	....	....	....

(ii) இவ்வட்டவணைக்கு ஏற்ப n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் ஓர் உச்சியை ஏனைய உச்சிகளுடன் தொடுப்பதால் பெறப்படும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கையை n என எழுதுக.

(iii) n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^\circ\,(n-2)$ எனக் காட்டுக.

குறிப்பு

வரலாற்றுரீதியில் பார்க்கும்போது கிரேக்க நாட்டுக் கணிதவியலாளரான யூக்கிலிட்டு என்பவர் கோணங்களைச் செங்கோணங்களில் எடுத்துரைத்தார். உதாரணமாக நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள கோணங்கள் 2 செங்கோணங்கள் எனவும் ஒரு நாற்பக்கலின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணங்கள் எனவும் காணப்பட்டது. இதற்கேற்ப, n பக்கங்களை உடைய பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $2n - 4$ செங்கோணங்கள் என நாம் கூறலாம். செங்கோணத்தை 90° எனக் கூறலாம். ஆகவே பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையை $90^\circ\ (2n-4)$ அல்லது $180^\circ\ (n-2)$ அல்லது இலகுவாக ஞாபகம் வைக்கக்கூடிய அதற்குச் சமமான வேறு ஒரு முறையில் கூறலாம்.

உதாரணம் 1

நவகோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் அகக்கோணங்களின்

கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ}(n-2)$

$\therefore$ 9 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் அகக்கோணங்களின்

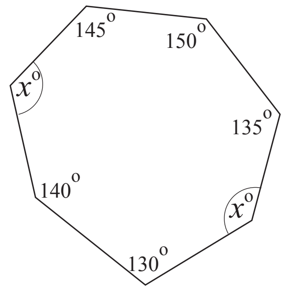
கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ}(9-2)$

$= 180^{\circ} \times 7$

$= 1260^{\circ}$

உதாரணம் 2

உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு ஏற்ப x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= 7$

$\therefore$ அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ}\ (7-2)$

$= 180^{\circ} \times 5$

$= 900^{\circ}$

$\therefore 145^{\circ} + 150^{\circ} + 135^{\circ} + x^{\circ} + 130^{\circ} + 140^{\circ} + x^{\circ} = 900^{\circ}$

$700^{\circ} + 2x = 900^{\circ}$

$2x = 900^{\circ} - 700^{\circ}$

$2x = 200^{\circ}$

$x = \frac{200^{\circ}}{2} = 100^{\circ}$

உதாரணம் 3

பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 1440° ஆகும். அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை n எனின்,

அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ}(n-2)$

$\therefore\ 180^{\circ}(n-2) = 1440^{\circ}$

$n-2 = \frac{1440^{\circ}}{180} = 8$

$n-2 = 8$

$n = 10$

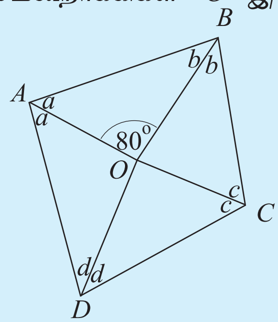
$\therefore$ பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= 10$

பயிற்சி 25.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பல்கோணியிலும் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.
   (i) ஐங்கோணி (ii) எண்கோணி
   (iii) பன்னிருகோணி (iv) 15 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி

2. எழுகோணி ஒன்றின் நான்கு அகக்கோணங்கள் $100^{\circ}, 112^{\circ}, 130^{\circ}, 150^{\circ}$ ஆகும். அதன் ஏனைய மூன்று கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆகும். ஒரு கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. $ABCD$ என்ற நாற்பக்கலின் அகக்கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் O இல் சந்திக்கின்றன.

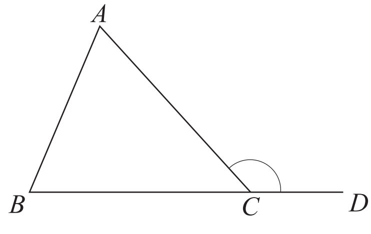


   (i) $a + b + c + d$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (ii) $a + b$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (iii) $c + d$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (iv) $C\hat{O}D$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. (i) அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 1620° ஆகவுள்ள பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (ii) அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 3600° ஆகவுள்ள பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

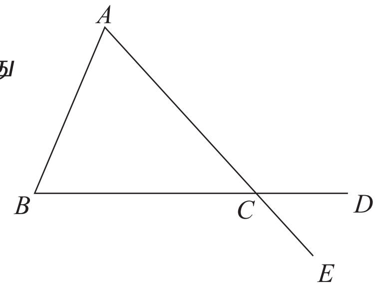
25.2 பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

முதலில் முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்போம்.



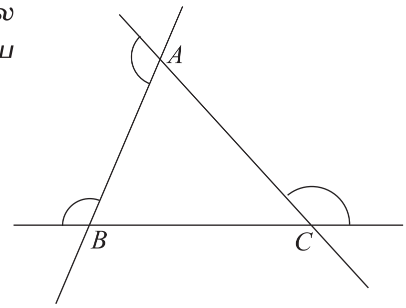
முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC ஐ நீட்டுவதால் உண்டாகும் கோட்டில் D என்னும் புள்ளி குறிக்கப்பட்டுள்ளது. CD என்ற கோட்டுத் துண்டத்திற்கும் பக்கம் AC இற்கும் இடையில் உள்ள கோணம் $A\hat{C}D$ ஆனது உச்சி C இலுள்ள ஒரு புறக்கோணம் ஆகும்.

தரப்பட்டுள்ள உருவில் காட்டியவாறு பக்கம் AC ஐ நீட்டுவதாலும் புறக்கோணம் ஒன்று உருவாகும். அது $B\hat{C}E$ ஆகும்.

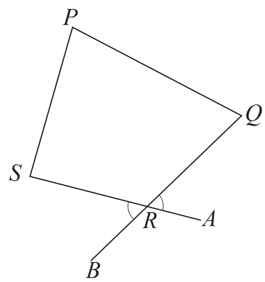


குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும். ஆகையால் இப்புறக்கோணத்தின் பருமனும் புறக்கோணம் $A\hat{C}D$ இன் பருமனுக்குச் சமனாகும். ஆகவே இவற்றில் எந்தக் கோணத்தையும் உச்சி C இல் வரைந்த புறக்கோணமாகக் கருதலாம். ஆனால் $D\hat{C}E$ ஐப் புறக்கோணமாகக் கருத முடியாது.

முக்கோணியின் A, B ஆகிய உச்சிகளிலும் மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளவாறு புறக்கோணங்களை வரைய முடியும்.



மேலே குறிப்பிட்டவாறு, நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்களையும் வரையறுக்க முடியும்.



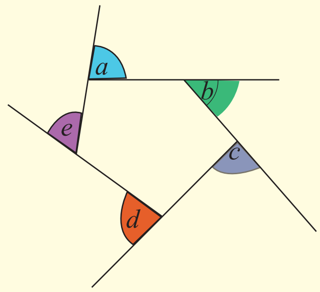
நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் பக்கம் SR ஐ A வரை நீட்டுவதால் $Q\hat{R}A$ என்ற புறக்கோணமும் பக்கம் QR ஐ நீட்டுவதால் $S\hat{R}B$ என்ற புறக்கோணமும் பெறப்படும். குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம் ஆகையால் புறக்கோணங்களும் சமம் ஆகும்.
மேலும் $A\hat{R}B$ ஐ ஒரு புறக்கோணமாகக் கருதுவதில்லை.

இவ்வாறு எந்தவொரு பல்கோணிக்கும் புறக்கோணங்களை வரையறுக்கலாம்.

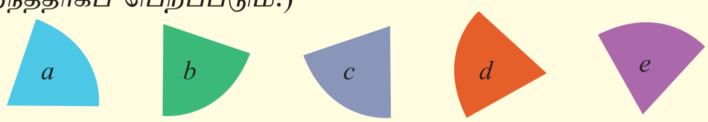
இப்போது நாம் பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

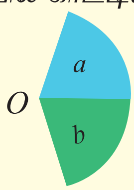
படி 1 : ஒரு தாளில் ஐங்கோணி ஒன்றை வரைந்து அதன் புறக்கோணங்களை a, b, c, d, e எனக் குறித்து நிழற்றுக.



படி 2 : நிழற்றிய (புறக்கோணங்களை ஆரைச்சிறை வடிவத்தில்) வெட்டி வேறாக்குக. (வரையும்போது ஒரே ஆரையில் இவற்றை வரைந்தால் முடிவு சிறந்ததாகப் பெறப்படும்.)



படி 3 : வேறாக்கிய ஆரைச்சிறைகளின் உச்சிகள் ஒரே புள்ளியில் அதாவது O இல் பொருந்துமாறு அடுத்தடுத்து வருமாறு ஒன்றன்மீது ஒன்று படியாதவாறு உருவில் காட்டியவாறு ஒட்டுக.



படி 4 : அறுகோணி ஒன்றுக்கும் எழுகோணி ஒன்றிற்கும் மேற்குறிப்பிட்ட படிமுறையைச் செய்க.

படி 5: இவற்றின் புறக்கோணங்களையும் மேற்குறிப்பிட்டவாறு ஒட்டுவதன் மூலம் பெறப்படும் பேறுகளின் பொது இயல்பையும் அதிலிருந்து பெறக்கூடிய முடிவினையும் எழுதுக.

மேலேயுள்ள செயற்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும் புறக்கோணங்கள் எல்லாம் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி அமையும் என்பதை அவதானிக்க முடியும். இதிலிருந்து பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையானது ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும் என்ற முடிபுக்கு வரலாம். ஒரு

புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகையால் மேலே எடுத்த பல்கோணியின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையும் 360° ஆகும்.

இப்போது நாம் n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் புறக்கோணங்களில் கூட்டுத்தொகைக்கான ஒரு கோவையை இன்னொரு முறையில் பெறுவோம்.

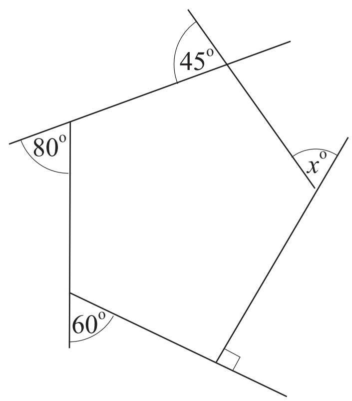
n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியில் n அகக்கோணங்களும் n புறக்கோணங்களும் உள்ளன என்பதை அறிவோம்.

பல்கோணியின் எந்தவொரு உச்சியிலும்
அகக்கோணத்தின் பெறுமானம் + புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் $= 180^\circ$
$\therefore$ n அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை + n புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^\circ \times n$ ஆகும்.
ஆனால் n அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= (2n - 4)$ செங்கோணங்கள் ஆகையால்
$180^\circ(n-2)$ + n புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^\circ n$
$\therefore$ n புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^\circ n - 180^\circ(n-2)$
$= 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ$
$= 360^\circ$

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள ஐங்கோணியில் x° எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள புறக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



புறக்கோணத்தின் கூட்டுத்தொகை $= 360^\circ$

$\therefore \; x + 45^\circ + 80^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

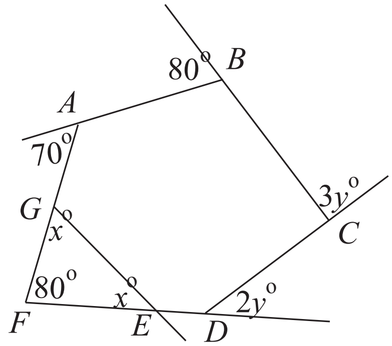
$x + 275^\circ = 360^\circ$

$x = 360^\circ - 275^\circ$

$x = 85^\circ$

உதாரணம் 2

உருவில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப
(i) x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) முக்கோணி EFG இன் அகக்கோணங்களின்

$$\begin{aligned} \text{கூட்டுத்தொகை} &= 180^\circ \\ \therefore\ 80^\circ + x + x &= 180^\circ \\ 2x &= 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \\ x &= \frac{100^\circ}{2} \\ x &= 50^\circ \end{aligned}$$

(ii) அறுகோணி $ABCDEG$ இன் புறக்கோணங்களின்

$$\begin{aligned} \text{கூட்டுத்தொகை} &= 360^\circ \\ \therefore\ 70^\circ + 80^\circ + 3y + 2y + x + x &= 360^\circ \\ 70^\circ + 80^\circ + 5y + 50^\circ + 50^\circ &= 360^\circ \\ 5y &= 360^\circ - 250^\circ \\ 5y &= \frac{110^\circ}{5} \\ y &= 22^\circ \end{aligned}$$

உதாரணம் 3

நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் $2 : 2 : 3 : 3$ என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளன. ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 360^\circ$

4 புறக்கோணங்களினதும் விகிதம் $= 2 : 2 : 3 : 3$

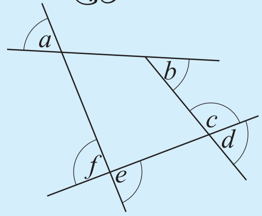
$\therefore$ சிறிய கோணம் $= \cancel{360}^\circ \times \frac{2}{\cancel{10}} = 72^\circ$

பெரிய கோணம் $= \cancel{360}^\circ \times \frac{3}{\cancel{10}} = 108^\circ$

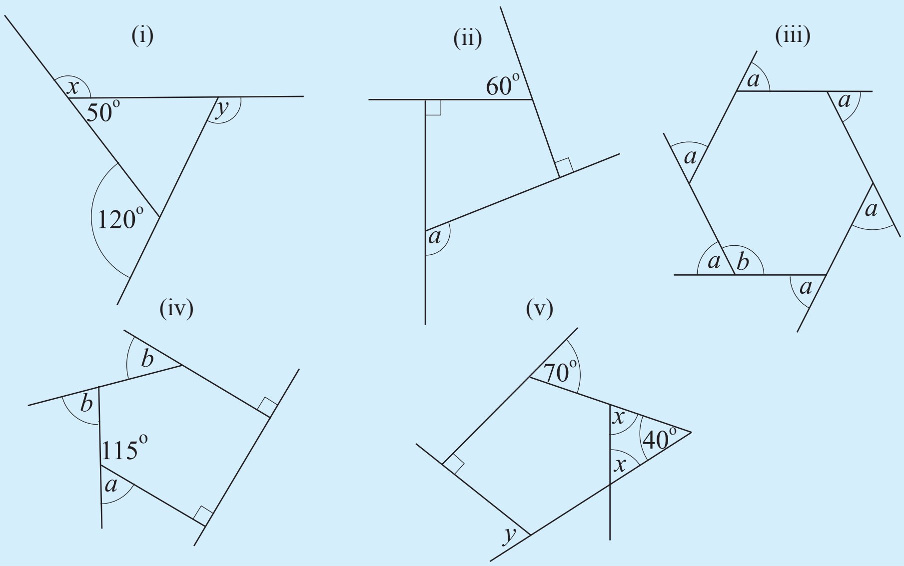
$\therefore$ புறக்கோணங்கள் $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$ ஆகும்.

பயிற்சி 25.2

1. உருவில் a, b, c, d, e, f என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் கோணங்களில் நாற்பக்கலின் புறக்கோணங்கள் எவை என எழுதுக.



2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பல்கோணியிலும் ஆங்கில எழுத்தினால்/ எழுத்துக்களினால் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



3. நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் x°, $2x^{\circ}$, $3x^{\circ}$, $4x^{\circ}$ எனக் குறிப்பிடப் பட்டுள்ளன.
   (i) ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.
   (ii) ஒவ்வொரு அகக்கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

4. ஐங்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் $1 : 1 : 2 : 3 : 3$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அதில் ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தினதும் பருமனையும் காண்க.

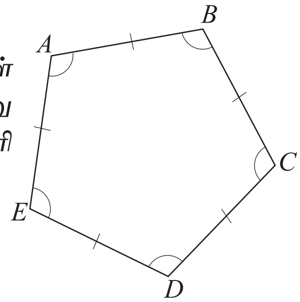
5. பன்னிருகோணியின் புறக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆகும். அதன் ஒரு புறக்கோணத்தின் பருமனைக் காண்க.

6. புறக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமான பல்கோணி ஒன்றின் ஒரு புறக் கோணம் 18° ஆகும். அப்பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

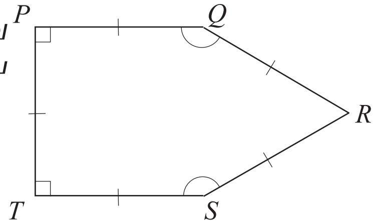
25.3 ஒழுங்கான பல்கோணிகள்

பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் அகக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் உள்ளபோது அப்பல்கோணி **ஒழுங்கான பல்கோணி** எனப்படும்.

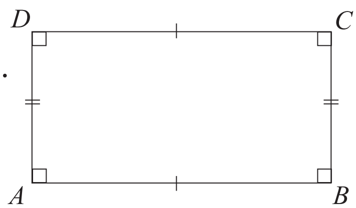
உருவில் தரப்பட்டுள்ள ஐங்கோணி $ABCDE$ இல் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் உள்ளன. எனவே அது ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஆகும்.



ஐங்கோணி $PQRST$ இல் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம். கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமல்ல. எனவே $PQRST$ ஒழுங்கான ஐங்கோணியன்று.



செவ்வகம் ஒன்றின் கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆனால் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமல்ல. எனவே செவ்வகம் ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியன்று.



சில ஒழுங்கான பல்கோணிகளுக்கு விசேட பெயர்கள் உள்ளன. ஒழுங்கான முக்கோணி ***சமபக்க முக்கோணி*** எனப்படும். ஒழுங்கான நாற்பக்கல் ***சதுரம்*** எனப்படும்.

உதாரணம் 1

ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்றின் ஒரு புறக்கோணத்தைக் கண்டு, அதிலிருந்து ஒரு அகக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6 புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 360^{\circ}$

$\therefore$ ஒரு புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் $= \dfrac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$

புறக்கோணம் + அகக்கோணம் $= 180^{\circ}$

60° + அகக்கோணம் $= 180^{\circ}$

$\therefore$ அகக்கோணம் $= 180^{\circ} - 60^{\circ}$

$= 120^{\circ}$

உதாரணம் 2

ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணம் ஒன்றின் பெறுமானம் 150°ஆகும். அதன்

(i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க.

(ii) பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் + அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் $= 180^{\circ}$

$\therefore$ புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் $+ 150^{\circ} = 180^{\circ}$

$\therefore$ புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் $= 180^{\circ} - 150^{\circ}$

$= 30^{\circ}$

(ii) $\therefore$ பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{360^{\circ}}{30^{\circ}} = 12$

பயிற்சி 25.3

1. ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க. அதிலிருந்து அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்போம்.

2. 15 பக்கங்களை உடைய ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க. அதிலிருந்து அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க.

3. (i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் 120° ஆகவுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை யாது? அதன் விசேட பெயரை எழுதுக.
   (ii) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் 90°ஆகவுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணியின் விசேட பெயரைக் காரணங்களுடன் எழுதுக.
   (iii) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் 40° ஆகவுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் விசேட பெயரை எழுதுக.

4. புறக்கோணத்தைப் போன்று 4 மடங்கு பருமனுள்ள அகக்கோணத்தைக் கொண்டிருக்கும் ஒழுங்கான பல்கோணியின்
   (i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன்
   (ii) அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமன்
   (iii) பக்கங்களின் எண்ணிக்கை
   என்பவற்றைக் காண்க.

5. ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் எடுக்கக்கூடிய மிகக் கூடிய பெறுமானம் யாது? அச்சந்தர்ப்பத்தில் அப்பல்கோணி எப்பெயர் கொண்டு அழைக்கப்படும்?

பொழிப்பு

- n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகங்கோணங்ளின் கூட்டுத்தொகை $(2n - 4)$ செங்கோணங்கள் அல்லது $(n - 2)\ 180^{\circ}$ இனால் தரப்படும்.
- n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.
- பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனாகவும் அகக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் காணப்படும்போது அது ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணி எனப்படும்.

26 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- அட்சரகணிதப் பின்னங்களை அறிந்துகொள்ளவும்
- அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டவும் கழிக்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

எண் சார்ந்த பின்னங்களைக் கூட்டவும் கழிக்கவும் அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்கவும் அவற்றின் அடைப்புக்குறிகளை நீக்கவும் காரணிகளை வேறாக்கவும் நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். நீங்கள் முன்னர் கற்றவற்றை மீட்பதற்குப் பின்வரும் மீட்டல் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சுருக்குக.

(i) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{12}{13}-\frac{2}{13}-\frac{1}{13}$ (iv) $\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$

2. வெற்றுக் கட்டத்துக்குப் பொருத்தமான எண்ணை எழுதுக.

(i) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{1\times\square}{2\times 2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{\square\ -1}{4}$

$=\frac{\square}{4}$

(ii) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

$=\frac{3\times\square}{4\times 3}-\frac{\square\times 4}{3\times 4}$

$=\frac{\square-\square}{12}$

$=\frac{\square}{12}$

(iii) $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}-\frac{1}{3}$

$=\frac{4\times\square}{5\times 6}-\frac{3\times\square}{10\times 3}-\frac{1\times 10}{3\times\square}$

$=\frac{\square-\square-10}{30}$

$=\frac{\square}{30}$

$=\frac{\square\ \div 5}{30\div 5}$

$=\frac{\square}{6}$

3. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குக.

(i) $2x+3x$ (ii) $3y-y$ (iii) $5a+4a+a$
(iv) $5x+3y+x+3y$ (v) $3y+2-y-2$ (vi) $4n-1+5-2n$
(vii) $-3y+2-y-3+2y$ (viii) $5xy-6xy+3x+y$

4. விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

(i) $2(x+y)+3x$ (ii) $3(2x-4y)+12y$

(iii) $-(4-3x)-1$ (iv) $2(3x-2)+3(x+2)$

(v) $3(m+1)-2(2m-1)$ (vi) $x(x-y)+2xy$

5. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றும் சரியாயின் "✓" எனவும் தவறாயின் "×" எனவும் எதிரே குறிக்க.

(i) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ இன் விடை $\frac{2+1}{3+4}$ என்னும் சுருக்கலுக்குச் சமனானது.

(ii) இரு பின்னங்களின் கூட்டலை அல்லது கழித்தலைச் செய்வதற்கு அவற்றின் தொகுதியெண்கள் சமனாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லாவிடின், அவற்றைச் சமப்படுத்திக்கொள்ள வேண்டும்.

(iii) இரு அலகுப் பின்னங்களைக் கூட்டிப் பெறப்படும் பின்னத்தின் தொகுதியெண் அவ்விரு பின்னங்களின் பகுதியெண்களின் கூட்டுத் தொகையாக இருப்பதுடன் பகுதியெண் அவற்றின் பெருக்கமாகும்.

(iv) சமனற்ற பகுதியெண்களைக் கொண்ட பின்னங்கள் இரண்டைக் கூட்டுவதற்கு அல்லது கழிப்பதற்கு, அமைத்துக் கொள்ள வேண்டிய பகுதியெண் முதற் பகுதியெண்கள் இரண்டினதும் பொ. ம. சி. ஆக இருக்க வேண்டும்.

(v) பின்னங்கள் இரண்டின் பகுதியெண்ணையும் தொகுதியெண்ணையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கி அப்பின்னத்தை எளிய சமவலுப் பின்னமாக மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

(vi) பின்னம் ஒன்றின் பகுதியெண்ணையும் தொகுதியெண்ணையும் ஒரே எண்ணால் வகுத்து அப்பின்னத்தை எளிய சமவலுப் பின்னமாக மாற்றலாம்.

(vii) $-3x-2x$ என்பதை $(-3x)+(-2x)$ என எழுதலாம்.

(viii) $-3(2x-5)$ என்பதன் அடைப்புக் குறிகளை நீக்குவதற்கு $2x$ ஐயும் -5 ஐயும் 3 ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

(ix) $-x-x$ என்பதைச் சுருக்கினால் $2x$ கிடைக்கும்.

(x) $3x+4y$ என்பதைச் சுருக்கும்போது $7xy$ எனப் பெறப்படும்.

26.1 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

பின்னம் ஒன்றின் தொகுதியில் அல்லது பகுதியில் அல்லது இரண்டிலும் அட்சரத்தை அல்லது அட்சரகணிதக் கோவையைக் கொண்டுள்ள ஒரு பின்னம் அட்சரகணிதப் பின்னம் எனப்படும்.

- தொகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணித உறுப்பை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x}{2}, \frac{3x}{5}, \frac{7y}{20}, \frac{6mn}{3}, \frac{2t^2}{5}$$

- தொகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணிதக் கோவையை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x+1}{5}, \frac{2x-1}{3}, \frac{x+y}{2}, \frac{m-n}{7}, \frac{3m-2n-1}{10}$$

- பகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணித உறுப்பை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{3}{x}, \frac{2}{3m}, \frac{5}{2y}, \frac{4}{3xy}, \frac{5}{m^2}$$

- பகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்றைக் கொண்ட 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{3}{2x+1}, \frac{2}{a+b}, \frac{5}{2m-n}, \frac{4}{3x-2y}, \frac{1}{3x\ cy+2}$$

- பகுதியிலும் தொகுதியிலும் அட்சரகணித உறுப்புகளை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{a}{c}, \frac{2a}{d}, \frac{2m}{3n}, \frac{4x^2}{5y^2}, \frac{2xy}{3pq}$$

- பகுதியில் அட்சரகணித உறுப்பையும் தொகுதியில் அட்சரகணிதக் கோவையையும் கொண்ட 5 பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x+1}{2x}, \frac{2a+b}{c}, \frac{3a+d}{4a}, \frac{2x-1}{c}, \frac{4x^2y-a^2}{b}$$

- பகுதியில் அட்சரகணிதக் கோவையையும் தொகுதியில் அட்சரகணித உறுப்பையும் கொண்ட 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x}{2x+5},\ \frac{a}{5b+d},\ \frac{3c}{a+b},\ \frac{4xy}{5x-3},\ \frac{a^2}{a-b}$$

- பகுதி, தொகுதி ஆகிய இரண்டிலும் அட்சரகணிதக் கோவைகளை உடைய 5 பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x+1}{2x-1},\ \frac{x+y}{3x+2y},\ \frac{3x-4}{x+1},\ \frac{4m-3n}{5m+2n},\ \frac{4x-y}{2x+3y-4}$$

26.1 பகுதியில் நிறைவெண்களை உடைய அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

பகுதியும் தொகுதியும் நிறைவெண்களை உடைய பின்னங்களைக் கூட்டியும் கழித்தும் உள்ள விதத்திலேயே அட்சரகணிதப் பின்னங்களையும் கூட்டவும் கழிக்கவும் முடியும்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{5x}{9} + \frac{2x}{9}$

$\frac{5x}{9} + \frac{2x}{9} = \frac{5x + 2x}{9}$ (இரு பின்னங்களிலும் பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)

$= \frac{7x}{9}$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{5y}{7} - \frac{3y}{7}$

$\frac{5y}{7} - \frac{3y}{7} = \frac{5y-3y}{7}$ (பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)

$= \frac{2y}{7}$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\frac{4x}{15} + \frac{7x}{15} - \frac{2x}{15}$

$$\frac{4x}{15} + \frac{7x}{15} - \frac{2x}{15} = \frac{11x - 2x}{15} \quad \text{(பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)}$$

$$= \frac{9x}{15} \quad \text{(9, 15 ஆகிய எண்களின் பொ. கா.பெ. ஐ 3 ஆல் வகுத்தல்)}$$

$$= \frac{3x}{5}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{5}$

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{5} = \frac{x+1+x+2}{5} \quad \text{(இரு பின்னங்களினதும் பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)}$$

$$= \frac{x+x+1+2}{5}$$

$$= \frac{2x+3}{5}$$

உதாரணம் 5

சுருக்குக. $\frac{2b+3}{7} - \frac{b+2}{7}$

$$\frac{2b+3}{7} - \frac{b+2}{7} = \frac{2b+3-(b+2)}{7}$$

(கழிக்கப்படும் அட்சரகணிதக் கோவையை அடைப்புக் குறிக்குள் எழுத வேண்டும்.)

$$= \frac{2b+3-b-2}{7}$$

$$= \frac{2b-b+3-2}{7}$$

$$= \frac{b+1}{7}$$

உதாரணம் 6

சுருக்குக. $\dfrac{7c+1}{8} - \dfrac{2c+1}{8} - \dfrac{c-2}{8}$

$$\frac{7c+1}{8} - \frac{2c+1}{8} - \frac{c-2}{8} = \frac{7c+1-(2c+1)-(c-2)}{8}$$

$$= \frac{7c+1-2c-1-c+2}{8}$$

$$= \frac{4c+2}{8}$$

$$= \frac{2(2c+1)}{8}$$

$$= \frac{2c+1}{4}$$

பயிற்சி 26.1

1. சுருக்கி எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\dfrac{a}{5} + \dfrac{a}{5}$ (ii) $\dfrac{3d}{15} + \dfrac{2d}{15}$ (iii) $\dfrac{2t}{3} - \dfrac{t}{3}$

(iv) $\dfrac{7k}{8} - \dfrac{3k}{8}$ (v) $\dfrac{3k}{7} + \dfrac{2k}{7} + \dfrac{k}{7}$ (vi) $\dfrac{5h}{9} - \dfrac{2h}{9} - \dfrac{h}{9}$

(vii) $\dfrac{7v}{10} - \dfrac{3v}{10} + \dfrac{v}{10}$ (viii) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{3x}{8}$ (ix) $\dfrac{p}{9} - \dfrac{4q}{9} - \dfrac{5p}{9}$

2. சுருக்கி எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\dfrac{3y+1}{5} + \dfrac{2y+2}{5}$ (ii) $\dfrac{4m-1}{7} + \dfrac{3m-2}{7}$ (iii) $\dfrac{5n+3}{8} + \dfrac{2n-1}{8}$

(iv) $\dfrac{5c-2}{10} + \dfrac{3c+4}{10}$ (v) $\dfrac{6d+1}{10} - \dfrac{2d-3}{10}$

(vi) $\dfrac{3x+1}{6} - \dfrac{2x-3}{6} + \dfrac{x+4}{6}$

26.2 சமனற்ற நிறைவெண் பகுதியைக் கொண்ட அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

$\frac{x}{6} + \frac{3x}{4}$ போன்ற சமனற்ற நிறைவெண் பகுதியைக் கொண்ட அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்கும் விதத்தை நோக்குவோம். இவ்வாறான அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சாதாரண ரீதியிலான பின்னங்களைப் போலவே சுருக்க வேண்டும். தரப்பட்ட பின்னங்களின் பகுதியெண்களின் பொது மடங்கு ஒன்றைப் பொதுப் பகுதியாகக் கொள்ள வேண்டும். இருப்பினும் பொது மடங்குகளில் சிறியதைப் பொதுப் பகுதியெண்ணாகக் கொண்டால் சுருக்கல் இலகுவாகும்.
உதாரணமாக, மேற்குறித்த இரு பின்னங்களிலும் பகுதிகளின் 6 உம் 4 உம் உள்ளன. அவற்றின் பொது மடங்குகளில் சிறியது 12 ஆகும். எனவே ஒவ்வொரு பின்னத்தினதும் பகுதி 12 ஆகுமாறு உள்ள சமவலுப் பின்னத்தைப் பெறவேண்டும் $\frac{x}{6}$ இல் பகுதி 12 ஐப் பெறுவதற்காகப் பகுதியெண்ணை 2 ஆல் பெருக்க வேண்டும் ($\frac{12}{6}$ ஆகையால் 2 பெறப்படுகிறது). அதே விதமாக $\frac{3x}{4}$ இல் பகுதி 12 ஐப் பெறுவதற்காகப் பகுதியெண்ணை 3 ஆல் பெருக்க வேண்டும் ($\frac{12}{4}$ ஆகையால் 3 பெறப்படுகிறது). ஆகவே தரப்பட்ட இரு பின்னங்களையும் சுருக்குவதற்காகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

இப்பின்னங்களின் பகுதியையும் தொகுதியையும் சுருக்கும்போது
$\frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = \frac{2}{2} \times \frac{x}{6} + \frac{3}{3} \times \frac{3x}{4}$ எனப் பெறப்படும்.

இரு பின்னங்களிலும் ஒரே பகுதியெண் இருப்பதால், இவ்வாறு எழுதலாம்.

$\frac{2x}{12} + \frac{9x}{12}$

ஆகவே $\frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = \frac{11x}{12}$ ஆகும்.

இதனை மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் காண்க.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{2y}{5} + \frac{y}{4}$

$$\frac{2y}{5} + \frac{y}{4} = \frac{4 \times 2y}{4 \times 5} + \frac{5 \times y}{5 \times 4}$$

(5, 4 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 20 ஆகையால் பொதுப் பகுதியெண் 20 ஆகுமாறு சமவலுப் பின்னங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளல்)

$$= \frac{8y}{20} + \frac{5y}{20}$$

$$= \frac{13y}{20}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\dfrac{2t}{3} - \dfrac{t}{2}$

$$\frac{2t}{3} - \frac{t}{2} = \frac{2 \times 2t}{2 \times 3} - \frac{3 \times t}{3 \times 2}$$

(3, 2 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 6 ஆயையால் பொதுப் பகுதியெண் 6 ஆகுமாறு சமவலுப் பின்னங்களைப் பெற்றுக்கொள்ளுதல்)

$$= \frac{4t}{6} - \frac{3t}{6}$$

$$= \frac{4t - 3t}{6}$$

$$= \frac{t}{6}$$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\dfrac{3v}{2} - \dfrac{4v}{5} + \dfrac{3v}{4}$

$$\frac{3v}{2} - \frac{4v}{5} + \frac{3v}{4} = \frac{10 \times 3v}{10 \times 2} - \frac{4 \times 4v}{4 \times 5} + \frac{5 \times 3v}{5 \times 4}$$

(2, 5, 4, ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 20 ஆகையால் பகுதியெண் 20 ஆகும்மாறு சமவலுப் பின்னங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளல்)

$$= \frac{30v}{20} - \frac{16v}{20} + \frac{15v}{20}$$

$$= \frac{29v}{20}$$

பகுதிகள் சமனற்றுக் காணப்படும் வேளைகளில் பகுதிகளின் பொ.ம.சி. பொதுப் பகுதியெண் ஆகுமாறு பின்னங்களை மாற்றியமைத்துச் சுருக்குவது இலகு வாகிவிடும் என்பது உதாரணங்களின் மூலம் தெளிவாகிறது. அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்று எண் ஒன்றினால் பெருக்கப்படும் சந்தர்ப்பத்தை நோக்குவோம். இங்கே அட்சரகணிதக் கோவைகளை அடைப்புக் குறிக்குள் எழுதுவது முக்கியமானது.

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\dfrac{x + 1}{2} + \dfrac{2x + 1}{3}$ (2, 3 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 6 ஆகும்)

$$\frac{x + 1}{2} + \frac{2x + 1}{3} = \frac{3\,(x + 1)}{3 \times 2} + \frac{2\,(2x + 1)}{2 \times 3}$$

(அட்சரகணிதக் கோவையை அடைப்புக்குள் எழுதுதல்)

$$= \frac{3x + 3}{6} + \frac{4x + 2}{6}$$

(அடைப்பு நீக்குதல்)

$$= \frac{3x + 3 + 4x + 2}{6}$$

$$= \frac{7x + 5}{6}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\frac{5y-1}{6} - \frac{3y-2}{4}$

$\frac{5y-1}{6} - \frac{3y-2}{4} = \frac{2\,(5y-1)}{2\times 6} - \frac{3\,(3y-2)}{3\times 4}$ (4, 6 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 12 ஆகும்)

$= \frac{2\,(5y-1)}{12} - \frac{3\,(3y-2)}{12}$ (2 இனாலும் – 3 இனாலும் பெருக்கி அடைப்புகளை நீக்குதல்)

$= \frac{2\,(5y-1) - 3\,(3y-2)}{12}$

$= \frac{10y - 9y - 2 + 6}{12}$

$= \frac{y+4}{12}$

உதாரணம் 6

சுருக்குக. $\frac{3m+2n}{5} - \frac{2m-n}{10} - \frac{3m-2n}{15}$

$\frac{3m+2n}{5} - \frac{2m-n}{10} - \frac{3m-2n}{15}$ (5,10, 15 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 30 ஆகும்)

$= \frac{6\,(3m+2n)}{6\times 5} - \frac{3\,(2m-n)}{3\times 10} - \frac{2\,(3m-2n)}{2\times 15}$

$= \frac{6\,(3m+2n)}{30} - \frac{3\,(2m-n)}{30} - \frac{2\,(3m-2n)}{30}$

$= \frac{6m+19n}{30}$

பயிற்சி 26.2

1. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{a}{3} + \frac{a}{6}$ (ii) $\frac{b}{4} + \frac{b}{12}$ (iii) $\frac{5x}{3} - \frac{3x}{5}$

(iv) $\frac{3y}{4} - \frac{5y}{16}$ (v) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$ (vi) $\frac{c}{3} - \frac{c}{4}$

(vii) $\frac{3d}{10} + \frac{2d}{15}$ (viii) $\frac{5m}{6} - \frac{3m}{10}$ (ix) $\frac{3n}{7} + \frac{n}{5}$

2. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$ (ii) $\frac{c}{5} + \frac{3c}{16} + \frac{2c}{15}$

(iii) $\frac{3x}{5} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{15}$ (iv) $\frac{3n}{4} - \frac{3n}{8} - \frac{n}{2}$

3. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{2a}{5} + \frac{3a-2}{6}$ (ii) $\frac{2b-1}{8} + \frac{3b}{12}$

(iii) $\frac{3c+2}{6} + \frac{2c-1}{9}$ (iv) $\frac{5t-3}{10} - \frac{3t}{15}$

(v) $\frac{2m-n}{12} - \frac{3m+n}{9}$ (vi) $\frac{3y+1}{10} + \frac{2y-1}{5} + \frac{4-y}{20}$

(vii) $\frac{3x-y}{4} + \frac{2x+y}{6} - \frac{5x-2y}{3}$ (viii) $\frac{3y+2}{3} - \frac{y-1}{4} - \frac{2y-3}{8}$

26.3 பகுதியில் சமனான அட்சரகணித உறுப்புள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

இவ்வாறான அட்சரகணிதப் பின்னங்களுக்கு உதாரணமாக $\frac{2}{5x} + \frac{1}{5x}$ ஐக் கூட்டலாம். இப்பின்னங்களின் பகுதிகள் அட்சரகணித உறுப்புகளாயினும் அவை சமன் ஆகையால் சாதாரணமான பின்னங்களைச் சுருக்கும் விதத்திலேயே சுருக்கலாம். அதற்கேற்ப

$$\frac{2}{5x} + \frac{1}{5x} = \frac{2+1}{5x}$$
$$= \frac{3}{5x}$$

எனச் சுருக்கலாம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{4}{7m} + \frac{2}{7m}$

$$\frac{4}{7m} + \frac{2}{7m} = \frac{4+2}{7m}$$
$$= \frac{6}{7m}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{5}{6n} - \frac{1}{6n}$

$$\frac{5}{6n} - \frac{1}{6n} = \frac{5-1}{6n}$$
$$= \frac{4}{6n}$$ (பொதுக் காரணியான 2 ஆல் வகுத்தால் எளிய பின்னமாகும்)
$$= \frac{2}{3n}$$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\frac{3a}{4b} + \frac{1}{4b} - \frac{a}{4b}$

$$\frac{3a}{4b} + \frac{1}{4b} - \frac{a}{4b} = \frac{3a + 1 - a}{4b} \quad \text{(பொதுப் பகுதி } 4b \text{ ஆகும்.)}$$

$$= \frac{2a + 1}{4b}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x + 1}$

இவற்றின் பகுதிகளில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் இருப்பினும் அவை சமன் ஆகையால் மேற்குறிப்பிட்டவாறே சுருக்கலைச் செய்யலாம்.

$$\frac{3}{x + 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{3 + 2}{x + 1}$$

$$= \frac{5}{x + 1}$$

உதாரணம் 5

சுருக்குக. $\frac{7}{x - 3} - \frac{4}{x - 3}$

$$\frac{7}{x - 3} - \frac{4}{x - 3} = \frac{7 - 4}{x - 3} \quad \text{(பொதுப் பகுதி } x - 3 \text{ ஆகும்.)}$$

$$= \frac{3}{x - 3}$$

பயிற்சி 26.3

1. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{5}{a} + \frac{2}{a}$ (ii) $\frac{8}{x} + \frac{2}{x}$ (iii) $\frac{3}{y} - \frac{1}{y}$

(iv) $\frac{4}{3y} - \frac{2}{3y}$ (v) $\frac{3}{5t} + \frac{2}{5t}$ (vi) $\frac{h}{2k} + \frac{5h}{2k}$

(vii) $\frac{7}{2n} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n}$ (viii) $\frac{8}{3v} - \frac{4}{3v} - \frac{1}{3v}$ (ix) $\frac{5}{m} + \frac{2}{m} + \frac{1}{m}$

(x) $\frac{8}{7xy} - \frac{8}{7xy} + \frac{8}{7xy}$

2. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\dfrac{5}{m+3} + \dfrac{2}{m+3}$ (ii) $\dfrac{8}{n+5} + \dfrac{3}{n+5}$ (iii) $\dfrac{4}{a+b} + \dfrac{6}{a+b}$

26.4 தொகுதி, பகுதி ஆகிய இரண்டும் அட்சரகணிதக் கோவைகளைக் கொண்ட பின்னங்களைச் சுருக்குதல்

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\dfrac{5x}{2x+1} + \dfrac{3x}{2x+1}$

$$\frac{5x}{2x+1} + \frac{3x}{2x+1} = \frac{5x+3x}{2x+1}$$ (பொதுப் பகுதி $2x+1$ ஆகும்.)

$$= \frac{8x}{2x+1}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\dfrac{7y}{3y-1} + \dfrac{2y}{3y-1}$

$$\frac{7y}{3y-1} + \frac{2y}{3y-1} = \frac{7y-2y}{3y-1}$$ (பொதுப் பகுதி $3y-1$ ஆகும்.)

$$= \frac{5y}{3y-1}$$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\dfrac{2x-1}{5x+1} + \dfrac{3x+2}{5x+1}$

$$\frac{2x-1}{5x+1} + \frac{3x+2}{5x+1} = \frac{2x-1+3x+2}{5x+1}$$ (பொதுப் பகுதி $5x+1$ ஆகும்.)

$$= \frac{2x+3x-1+2}{5x+1}$$

$$= \frac{5x+1}{5x+1}$$

$$= 1$$

உதாரணம் 4

$\dfrac{9m-1}{5m-1}+\dfrac{3m}{5m-1}-\dfrac{2m+1}{5m-1}$ சுருக்குக.

$\dfrac{9m-1}{5m-1}+\dfrac{3m}{5m-1}-\dfrac{2m+1}{5m-1} = \dfrac{9m-1+3m-(2m+1)}{5m-1}$ (கழிக்கப்படும் அட்சர கணிதக் கோவைகளை அடைப்புக் குறிக்குள் எழுத வேண்டும்)

$= \dfrac{9m-1+3m-2m-1}{5m-1}$ (– 1 இனால் பெருக்கி அடைப்பு நீக்குதல்)

$= \dfrac{9m+3m-2m-1-1}{5m-1}$

$= \dfrac{10m-2}{5m-1}$

$= \dfrac{2\cancel{(5m-1)}}{\cancel{(5m-1)}}$ (தொகுதியில் பொதுக் காரணியை வேறாக்கி எளிய வடிவத்தில் எழுதுதல்)

$= 2$

பயிற்சி 26.4

1. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\dfrac{k}{3k-1}+\dfrac{2}{3k-1}$

(ii) $\dfrac{2h}{5h-2}-\dfrac{h}{5h-2}$

(iii) $\dfrac{3t}{3t-1}-\dfrac{1}{3t-1}$

(iv) $\dfrac{2k+1}{5k+1}-\dfrac{k-2}{5k+1}$

(v) $\dfrac{2y}{3y+2}-\dfrac{y}{3y+2}+\dfrac{1}{3y+2}$

(vi) $\dfrac{2a+1}{5a-2}-\dfrac{3a}{5a-2}-\dfrac{3}{5a-2}$

(vii) $\dfrac{8m+10}{2m+3}-\dfrac{4m+1}{2m+3}+\dfrac{2m}{2m+3}$

(viii) $\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m-n}{m+n}$

27 அளவிடைப் படங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

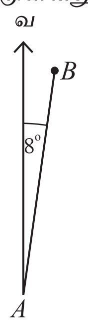
- திசைகோளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- கிடைத் தளத்தின் மீதுள்ள அமைவிடங்களின் திசைகோள், தூரம் என்பன தரப்படுமிடத்து உரிய அளவிடைப் படத்தை வரைந்து தெரியாத கணியங்களைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

27.1 திசைகோள்

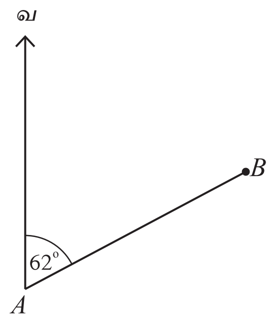
திசைகோள் என்பது கிடைத் தளத்தில் பொருள் ஒன்றின் அமைவைக் காட்டுவதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் மற்றுமொரு அளவீடாகும். புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B இன் திசைகோள் என்பது புள்ளி A இலிருந்து முதலில் வடக்கு திசையை நோக்கிய பின் புள்ளி B ஐ நோக்குவதற்காக வலஞ்சுழியாகத் திரும்பும் கோணம் ஆகும். பின்வரும் உருக்களில் ஒரு புள்ளி குறித்து மற்றுமொரு புள்ளியின் திசைகோள் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i)



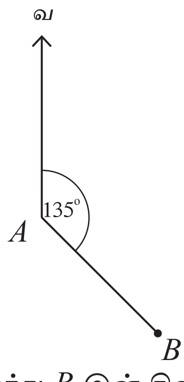
A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 008°

(ii)



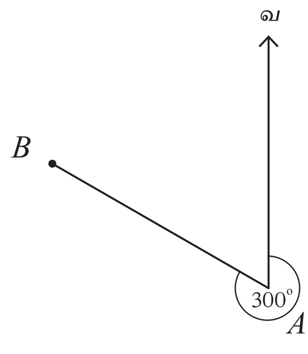
A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 062°

(iii)



A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 135°

(iv)



A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 300°

திசைகோள் 360° இலும் குறைந்த பெறுமானம் ஆகையால் பயன்படுத்தப்படும் எண் குறிகளின் உயர்ந்தபட்ச எண்ணிக்கை மூன்று ஆகும். எனவே திசைகோள் மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதப்படுவது வழக்கம். வடக்குடன் வலஞ்சுழியாக ஆக்கும் சுழற்சிக் கோணம் 1°, 2°, ..., 9° என்பன திசைகோளாக முறையே 001°, 002°, ..., 009° எனவும் 10°, 11°, ..., 99° என்பன முறையே 010°, 011°, ..., 099° எனவும் எழுதப்படும்.

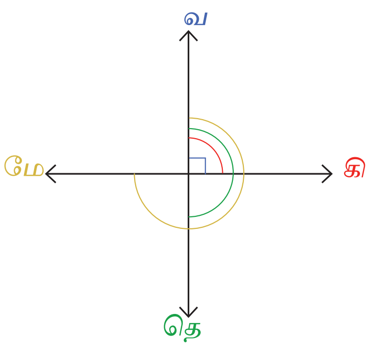
எனவே திசைகோள்
(i) வடக்குத் திசையை அடிப்படையாகக் கொண்டு அளக்கப்படும்.
(ii) அளக்கும் போக்கு வடக்குடன் வலஞ்சுழியாக அமையும்.
(iii) திசைகோள் மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதப்படும்.

திசையறிகருவி ஒன்றின் மூலம் வடக்குத் திசையை இலகுவாக அறிந்துகொள்ள முடியும் ஆகையால் கப்பல் மற்றும் ஆகாயவிமானப் பயணங்களின்போது இவ்வளவீடு பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களின் மூலம் திசைகோள் பற்றிய அறிவை விருத்திசெய்து கொள்ளலாம்.

உதாரணம் 1

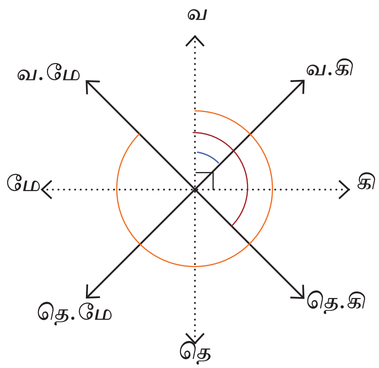
(i) நான்கு பிரதான திசைகளைத் திசைகோளில் தருக.
(ii) நான்கு உப திசைகளைத் திசைகோளில் தருக.

(i)



திசை	திசைகோள்
வடக்கு	000°
கிழக்கு	090°
தெற்கு	180°
மேற்கு	270°

(ii)

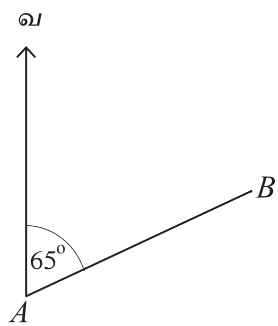


திசை	திசைகோள்
வட கிழக்கு	045°
தென் கிழக்கு	135°
தென் மேற்கு	225°
வட மேற்கு	315°

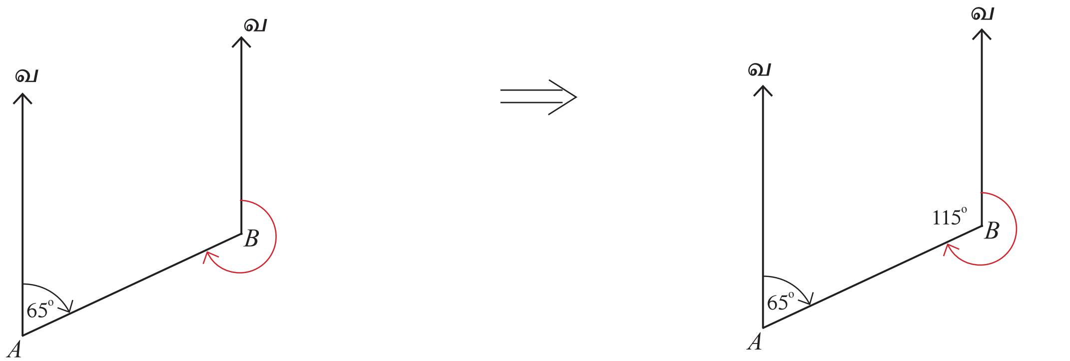
உதாரணம் 2

A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 065° ஆகும். இத்தகவலைப் பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டி, B இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்க.

A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 065° ஆகையால் A இல் வரையப்பட்ட வடக்குத் திசையுடன் AB என்ற திசைவரை வலஞ்சுழியாக 65° கோணத்தை ஆக்குகின்றது.



B இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்பதற்கு B இல் வரையப்பட்ட வடக்குத் திசையுடன் BA என்ற திசைவரை வலஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணத்தைக் காண வேண்டும்.



A இலும் B இலும் வடக்கைக் காட்டும் கோடுகள் சமாந்தரமானவை. அக்கோடுகள் இரண்டும் AB என்னும் குறுக்கோடியினால் வெட்டப்பட்டு ஏற்படும் நேயக் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும். அதன் மூலம் 115° என்னும் பெறுமானம் பெறப்பட்டுள்ளது.

ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகையால்

B இலிருந்து A இன் திசைகோள் $= 360^{\circ} - 115^{\circ}$

$= 245^{\circ}$

பயிற்சி 27.1

1. பாகைமானியைப் பயன்படுத்திக் கோணங்களை வரைவதன் மூலம் பின்வரும் ஒவ்வொரு திசைகோளையும் வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.

(i) E இலிருந்து F இன் திசைகோள் 005°

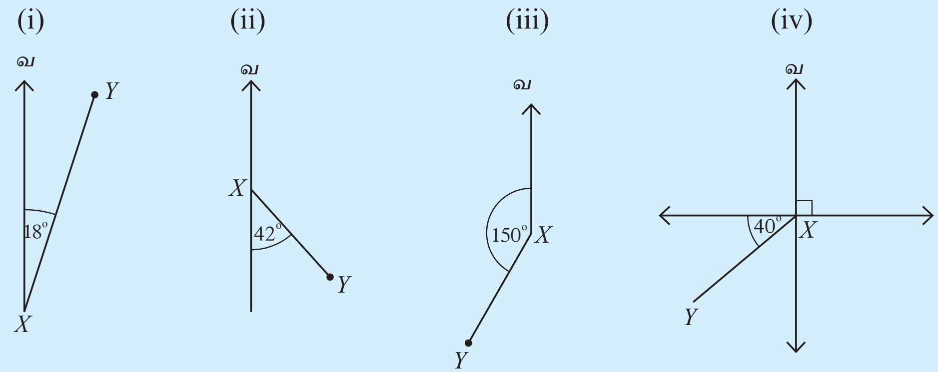
(ii) P இலிருந்து Q இன் திசைகோள் 075°

(iii) M இலிருந்து N இன் திசைகோள் 105°

(iv) J இலிருந்து H இன் திசைகோள் 270°

(v) C இலிருந்து D இன் திசைகோள் 310°

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் X இலிருந்து Y இன் திசைகோளைக் காண்க.



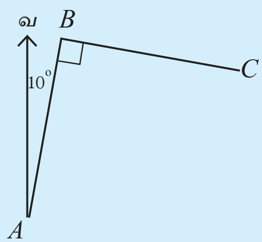
3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப

(i) A இலிருந்து B இன் திசைகோள்

(ii) B இலிருந்து A இன் திசைகோள்

(iii) C இலிருந்து B இன் திசைகோள்

என்பவற்றைக் காண்க.



4. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆகும். A இற்கு வடக்கே B அமைந்துள்ளது.

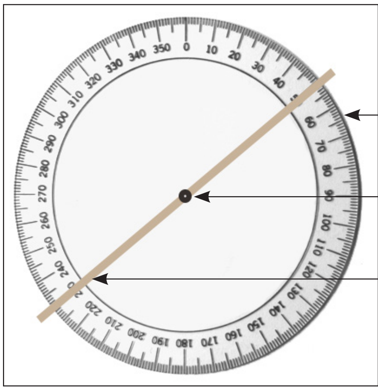
(i) இத்தகவல்களைப் பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.
(ii) அதிலிருந்து பின்வரும் திசைகோள்களைக் காண்க.

(a) A இலிருந்து B இன் திசைகோள் (b) A இலிருந்து C இன் திசைகோள்
(c) B இலிருந்து C இன் திசைகோள் (d) C இலிருந்து B இன் திசைகோள்
(e) C இலிருந்து A இன் திசைகோள் (f) B இலிருந்து A இன் திசைகோள்

27.2 கோணமானி

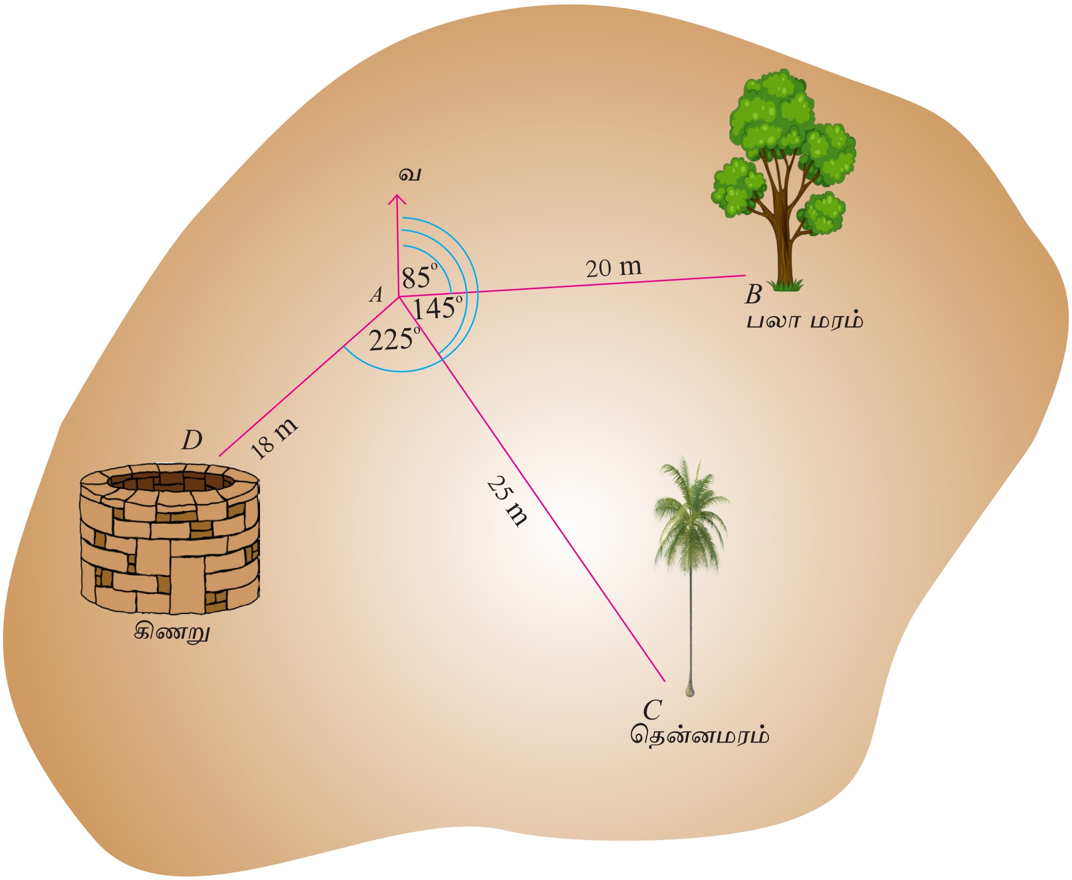
திசைகோள், தூரம் என்பவற்றின் மூலம் தளம் ஒன்றின் மீதுள்ள அமைவிடங்களை விவரிக்க முடியும். இதற்காகத் திசைகோளைக் காண்பதற்கு ஒரு கோணமானியைப் பயன்படுத்தலாம்.

கோணமானி



- அளவீடுகளை எழுத வேண்டிய இடத்தில் கிடையான பலகையைக் கொண்ட மேசையின் (கிடைத் தளம்) மீது திசையறிகருவியை வைத்து, மேசையின் மீது வடக்குத் திசையைக் குறித்துக் கொள்க.
- இப்போது தயாரித்துக் கொண்ட கோணமானியை மேசையின் மீது வைத்து "0" என்ற வாசிப்பு வடக்குத் திசையுடன் பொருந்துமாறு அமைத்துக் கொள்க.
- பானம் உறிஞ்சும் குழாயைச் சுழற்றி அதனூடாகத் தேவையான இடத்தை அவதானித்து வடக்குடன் வலஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணத்தை அளந்து கொள்க.
- அதனை மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டதாக எழுதிக் கொள்ளும்போது தேவையான இடத்தின் திசைகோள் பெறப்படும்.
- அளவீட்டைப் பெற்ற புள்ளியிலிருந்து அவதானிக்கப்பட்ட இடத்துக்குரிய தூரத்தை அளவு நாடாவின் மூலம் பெறுக.
- அவ்விடத்தின் அமைவைப் பெறப்பட்ட தூரம், திசைகோள் என்பவற்றின் மூலம் விவரிக்க முடியும்.

கீழே உதாரணம் ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது.

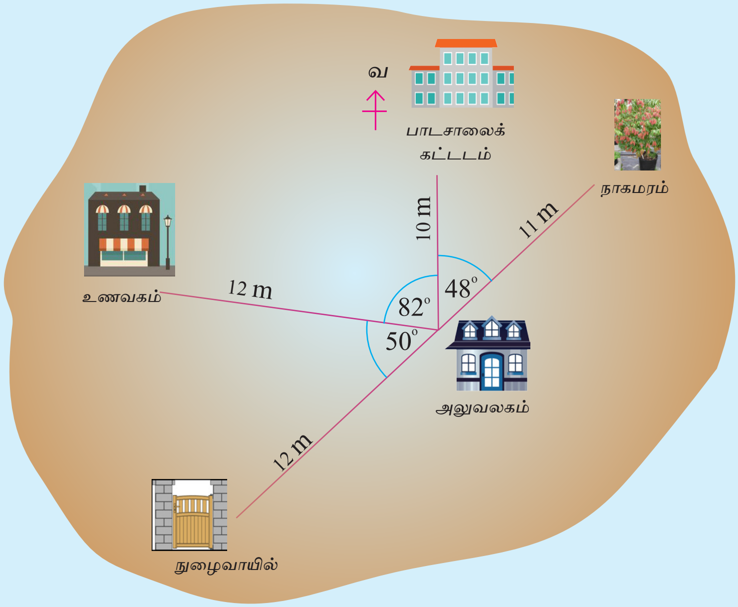


அவதானிக்கப்பட்ட பொருள்	திசை கோள்	தூரம்
பலா மரம் (B)	085°	20 m
தென்னமரம் (C)	145°	25 m
கிணறு (D)	225°	18 m

கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியைச் செய்வதன் மூலம் மேலும் விளக்கத்தைப் பெறுக.

பயிற்சி 27.2

1. கீழே காணப்படுவது ஒரு பாடசாலை அமைந்துள்ள நிலப் பகுதியின் பருமட்டான வரிப் படம் ஆகும்.

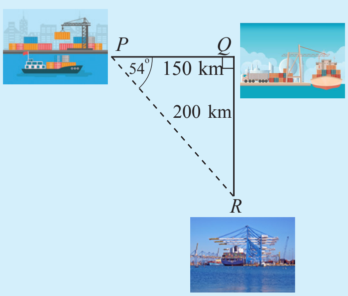


இதிலிருந்து பின்வரும் அமைவிடங்களை விவரிக்க.

(i) அலுவலகத்திலிருந்து நாகமரத்தின் அமைவிடம்
(ii) அலுவலகத்திலிருந்து நுழைவாயிலின் அமைவிடம்
(iii) அலுவலகத்திலிருந்து உணவகத்தின் அமைவிடம்

2. ஒரே கடலில் அமைந்துள்ள P, Q, R என்னும் மூன்று துறைமுகங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. P இற்குக் கிழக்கே Q அமைந்துள்ளது.
   (i) P இலிருந்து Q இனூடாக R இற்குச் செல்வதற்கும்
   (ii) P இலிருந்து R இற்கு நேரடியாகச் செல்வதற்கும்

   தேவையான பாதையின் விவரத்தைத் திசைகோள், தூரம் என்பனவற்றின் மூலம் தருக.

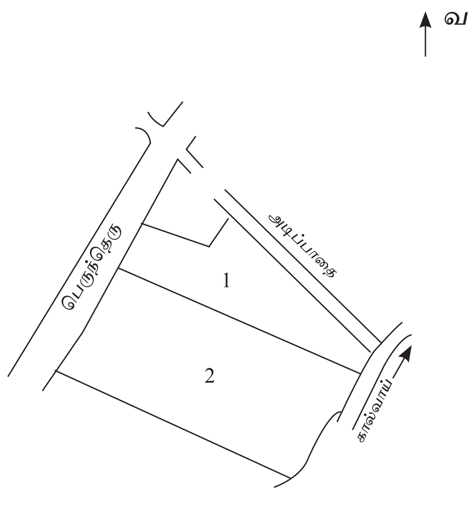


3. கொழும்பிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட விமான நிலையத்துக்குப் பயணிக்க வேண்டிய விமானத்தின் விமானிக்குக் கொழும்பிலிருந்து 020° திசைகோளில் 100 km தூரம் விமானத்தைச் செலுத்தி, பின்னர் 080° திசைகோளில் மேலும் 100 km தூரம் விமானத்தைச் செலுத்த வேண்டும் என அறிவுறுத்தப்பட்டது.

   (i) இத்தகவல்களைப் பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.
   (ii) அவ்விமான நிலையத்திலிருந்து கொழும்புக்கு அதே பாதையில் திரும்புவதற்காக விமானிக்கு வழங்கப்பட வேண்டிய அறிவுறுத்தல்களைத் தருக.

27.3 கிடைத் தளத்தின் மீது அளவிடைப் படங்கள்

கிடைத் தளத்தின்மீது அமைவிடங்களைக் காட்டும் அளவிடைப்படங்களுக்குரிய இரண்டு உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



அளவிடை 1 : 1000

தெங்குப் பயிர்ச்செய்கை பரந்துள்ள பிரதேசங்கள்

அளவிடை 1 : 3300000

எல்லா அளவிடைப் படங்களிலும் அது வரையப்பட்டுள்ள அளவிடையும் வடக்குத் திசையும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அளவிடைப் படத்திலுள்ள அளவிடையினால் (விகிதத்தினால்) காட்டப்படுவது யாது என்பதைத் தெளிவாக விளங்குவது முக்கியம். உதாரணமாக 1 : 500 000 என்ற அளவிடையினால் கருதப்படுவது அளவிடைப் படத்தில் 1 cm நீளத்தினால் 500 000 cm என்ற உண்மை நீளம் குறிக்கப்படுகின்றது என்பதாகும். வேறு விதமாகக் கூறுவதாயின் அளவிடைப் படத்தில் இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் அப்புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள உண்மைத் தூரத்தின் $\frac{1}{500\ 000}$ பங்காகும். மேலும் 500 000 cm ஆனது 5 km இற்குச் சமம் ஆகையால் அளவிடைப் படத்தின் 1 cm இனால் காட்டப்படும் உண்மைத் தூரம் 5 km எனவும் கூறலாம்.

இப்போது கிடைத்தளத்தில் அளவிடைப் படங்களை வரையும் முறையை உதாரணங்கள் சிலவற்றின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

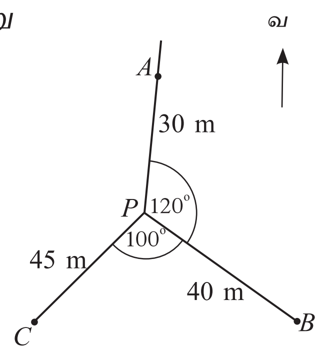
முக்கோணி வடிவமான காணித் துண்டு ஒன்றின் மூலைகள் A, B, C ஆகும். இக்காணித் துண்டினுள் அமைந்துள்ள P என்ற இடத்திலிருந்து உச்சிகளின் அமைவிடங்கள் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன.

P இலிருந்து
- 000° திசைகோளில் 30 m தூரத்தில் A அமைந்துள்ளது.
- 120° திசைகோளில் 40 m தூரத்தில் B அமைந்துள்ளது.
- 220° திசைகோளில் 45 m தூரத்தில் C அமைந்துள்ளது.

இத்தரவுகளுக்கு ஏற்ப அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைந்து காணித் துண்டின் சுற்றளவைக் காண்க.

படி 1: தாளின் வலது பக்கத்தின் மேற்பகுதியில் வடக்குத் திசையை உருவில் காட்டியவாறு குறித்துக் கொள்க.

படி 2: தரவுகளுக்கேற்ப உருவில் காட்டியுள்ளவாறு பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றை வரைக.



படி 3: 30 m, 40 m, 45 m தூரங்களைக் காட்டுவதற்கு 1 cm இனால் 10 m காட்டப்படும் வகையில் அதாவது 1:1000 என்ற அளவிடையைத் தெரிவுசெய்க. இங்கு அளவிடையானது அளவிடைப் படத்தை வரைவதற்குரிய தாளின் அளவுக்கு ஏற்பவே தெரிவுசெய்யப்பட வேண்டும். அத்தோடு 1000 போன்ற விசேட எண்களைத் தெரிவுசெய்வதால் அளவிடைப் படத்தைப் பரிசீலிப்பவருக்கு உண்மைத் தூரங்கள் பற்றிய தெளிவை இலகுவாகப் பெற்றுக் கொள்ள முடியும்.

படி 4 இவ்வளவிடைக்கு ஏற்பத் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நீளத்தையும் அளவிடைப் படத்தில் காட்டுவதற்குரிய நீளத்தைக் கணிக்க.

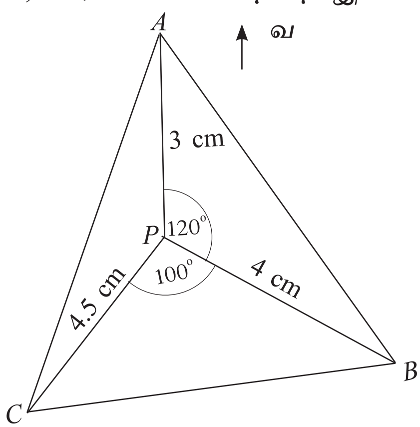
$$PA = 3000 \times \frac{1}{1000} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$PB = 4000 \times \frac{1}{1000} \text{ cm} = 4 \text{ cm},$$

$$PC = 4500 \times \frac{1}{1000} \text{ cm} = 4.5 \text{ cm}$$

படி 5 : cm அளவீட்டைக் கொண்ட நேர்விளிம்பையும் பாகைமானியையும் பயன்படுத்திப் பென்சிலால் கீழே குறிப்பிட்டவாறு அளவிடைப் படத்தை வரைக.

- முதலில் 3 cm நீளமுள்ள AP என்ற கோட்டுத் துண்டத்தை நிலைக்குத்தாக வரைக.
- PA உடன் 120° ஐ அமைக்கும் 4 cm நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டம் PB ஐ வரைக.
- PB உடன் 100° ஐ அமைக்கும் 4.5 cm நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டம் PC ஐ வரைக.
- AB, BC, AC என்பவற்றை இணைக்க.



படி 6: AB, BC, AC என்பவற்றின் நீளங்களை அளக்க. AB = 6 cm, AC = 7.1 cm, BC = 6.5 cm எனப் பெறுவீர்கள். எனவே அளவிடைப் படத்தின் சுற்றளவு
$6 + 7.1 + 6.5 = 19.6$ cm

படி 7: 1 cm $\longrightarrow$ 10 m என்ற அளவிடைக்கு ஏற்ப உண்மை நீளத்தைக் கணிக்கலாம்.
காணியின் சுற்றளவு = $19.6 \times 10 = 196$ m

உதாரணம் 2

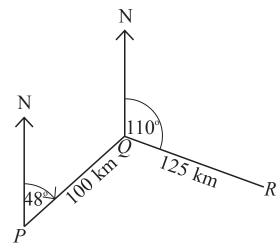
கப்பல் ஒன்று P என்னும் துறைமுகத்திலிருந்து 048^{o} திசைகோளில் 100 km தூரம் பயணம் செய்து Q என்னும் துறைமுகத்தை அடைகின்றது. பின்னர் Q இலிருந்து 110^{o} திசைகோளில் 125 km தூரம் பயணம் செய்து R என்னும் துறைமுகத்தை அடைகின்றது. அளவிடைப் படத்தை வரைந்து P இலிருந்து R இன் அமைவிடத்தை விவரிக்க.

படி 1: தாள் ஒன்றின் மீது P என்னும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. P இல் வடக்குத் திசையைக் குறிக்க.

படி 2 : கீழே வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைக் காட்டும் பருமட்டான வரிப்படத்தை வரைந்து கொள்க.

- P இலிருந்து Q இன் திசைகோள் 048^{o} P ஆகையால் இலுள்ள வடக்குடன் PQ ஆக்கும் கோணம் வலஞ் சுழியாக 48^{o} ஆகும்.

- Q இலிருந்து R இன் திசைகோள் 110^{o} ஆகையால் Q இலுள்ள வடக்குடன் QR ஆக்கும் கோணம் வலஞ் சுழியாக 110^{o} ஆகும்.



P இலுள்ள வடக்கும் Q இலுள்ள வடக்கும் சமாந்தரமாகையால் Q இலுள்ள வடக்குடன் PQ ஆக்கும் கோணம் $= 132^{o}$ (நேயக் கோணங்கள்)

இப்போது, $P\hat{Q}R = 360^{o} - (132 + 110)$
$= 360^{o} - 242^{o}$
$= 118^{o}$

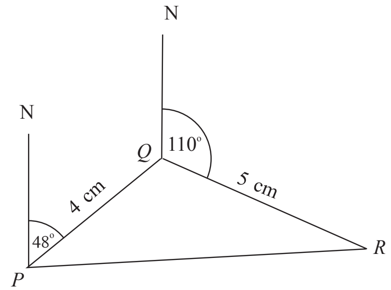
படி 3: 100 km ஐயும் 125 km ஐயும் வகைகுறிப்பதற்கும் 1 cm இனால் 25 km காட்டப்படும் வகையில் அதாவது 1:2 500 000 என்ற அளவிடையைத் தெரிவு செய்க. (தாளின் அளவு போதுமானதாயின்) 1:1 250 000 என்ற அளவிடையையும் தெரிவுசெய்யலாம்.

படி 4: அளவிடைக்கு ஏற்ப PQ, QR ஆகிய தூரங்களை அளவிடைப் படத்தில் காட்டுவதற்கு வேண்டிய நீளங்களைக் கணிக்க.

$$PQ = \frac{100}{25} \text{ cm} = 4 \text{ cm}, \; QR = \frac{125}{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

(அளவிடைப் படத்தை வரையும்போது கோணங்கள் மாறுவதில்லை)

படி 5: மேலே குறிப்பிட்ட அளவீடுகளுக்கு ஏற்ப நேர் விளிம்பு, பாகைமானி, பென்சில் என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி அளவிடைப் படத்தை வரைக.



படி 6: PR ஐ அளப்பதன் மூலம் $PR = 7.7$ cm எனப் பெறுவீர்கள். $N\hat{P}R$ ஐ அளப்பதன் மூலம் $N\hat{P}R = 82^{\circ}$ எனவும் பெறுவீர்கள்.

படி 7: அளவிடைக்கு ஏற்ப PR இன் உண்மை நீளத்தைக் கணிக்க.

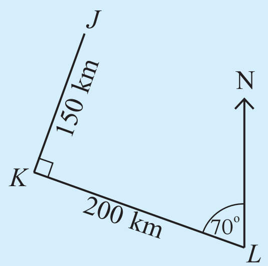
PR இன் உண்மை நீளம் $= 7.7 \times 25$ km
$= 192.5$ km

படி 8: R இன் அமைவிடத்தைப் பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்.
துறைமுகம் P இலிருந்து 082° திசைகோளில் 192.5 கிலோமீற்றர் தூரத்தில் துறைமுகம் R அமைந்துள்ளது.

பயிற்சி 27.3

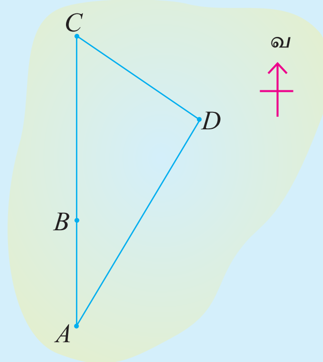
1. L என்ற துறைமுகத்திலிருந்து K என்ற துறைமுகத்திற்குச் சென்று அங்கிருந்து J என்ற துறைமுகத்திற்குச் சென்ற கப்பல் ஒன்றின் பயணப் பாதையின் பருமட்டான வரிப்படம் இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.

   (i) இப்பருமட்டான வரிப்படத்திற்கு ஏற்பப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
   (a) L இலிருந்து K இன் திசைகோள்
   (b) K இலிருந்து J இன் திசைகோள்
   (c) 1 cm இனால் 50 km காட்டப்படும் அளவிடைக்கு ஏற்ப LK, KJ ஆகிய தூரங்களை அளவிடைப் படத்தில் காட்டுவதற்கு எடுக்க வேண்டிய நீளங்களின் அளவுகளைக் காண்க.



   (ii) மேற்கண்ட அளவிடைகளைக் கொண்டு கடல் மார்க்கத்தின் அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைக.
   (iii) அளவிடைப் படத்தின் மூலம்
   (a) துறைமுகம் L இலிருந்து துறைமுகம் J இற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.
   (b) துறைமுகம் L இலிருந்து துறைமுகம் J இற்குள்ள திசை கோளைக் காண்க.
   (iv) பைதகரசின் தொடர்பைப் பயன்படுத்தித் துறைமுகம் L இலிருந்து துறைமுகம் J இற்கு உள்ள தூரத்தைக் கணித்து மேலே (iii) b இல் நீங்கள் பெற்ற விடையைப் பரிசீலிக்க.

2. 1 : 50 000 என்ற அளவிடைக்கு வரையப்பட்ட படம் ஒன்றிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரு பகுதி உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. A, B, D ஆகிய நகரங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதோடு A இற்கு வடக்கே C அமைந்துள்ளது.



(i) AB, BC, CD, AD ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்களையும் $A\hat{C}D$, $A\hat{D}C$, $C\hat{A}D$ ஆகிய கோணங்களின் பருமன்களையும் அளந்து எழுதுக.

(ii) AB, BC, CD, AD ஆகியற்றின் உண்மையான தூரங்களைக் கணிக்க.

(iii) A இலிருந்து B, C, D ஆகிய நகரங்களின் அமைவிடங்களைத் திசைகோள், தூரம் என்பனவற்றின் மூலம் விவரிக்க.

3. பாடசாலை ஒன்றின் கொடிக் கம்பத்திலிருந்து 025^{o} திசைகோளிலும் 10 m தூரத்திலும் அலுவலகம் அமைந்துள்ளதோடு கொடிக் கம்பத்திலிருந்து 310^{o} திசைகோளிலும் 12 m தூரத்திலும் பிரதான மண்டபம் அமைந்துள்ளது.

(i) இத்தகவல்களைக் காட்டும் வரிப்படம் ஒன்றை வரைக.

(ii) 1 cm இனால் 2 m காட்டப்படும் அளவிடையைக் கொண்டு இவற்றின் அளவிடைப் படத்தை வரைக.

(iii) அளவிடைப் படத்தின் மூலம் பாடசாலைக்கும் பிரதான மண்டபத்திற்கும் இடையிலுள்ள கிட்டிய தூரத்தைக் காண்க.

(iv) அலுவலகத்திலிருந்து பிரதான மண்டபத்தின் அமைவிடத்தை விவரிக்க.

4. விமானி ஒருவர் A என்ற விமான நிலையத்திலிருந்து 150^{o} திசைகோளின் வழியே 80 km தூரம் தனது விமானத்தைச் செலுத்திய பின், அவ்விடத்திலிருந்து 200^{o} திசைகோளின் வழியே 150 km தூரம் விமானத்தைச் செலுத்தி B என்னும் விமான நிலையத்தை அடைகின்றார்.

(i) இத்தகவல்களைக் காட்டும் பரும்படிப் படத்தை வரைக.

(ii) பொருத்தமான அளவிடையைக் கொண்டு அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைவதன் மூலம்

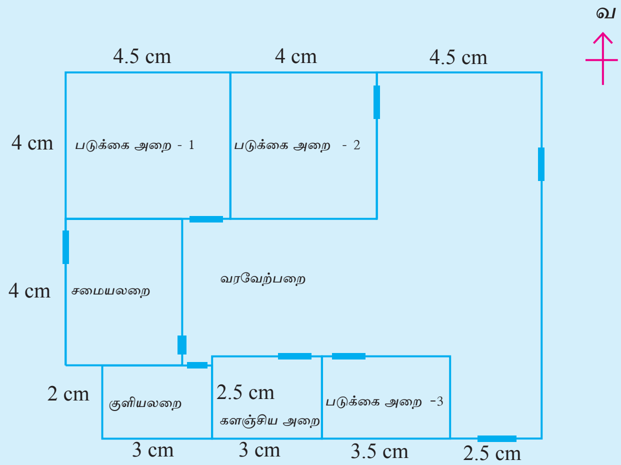
(a) A இலிருந்து B இன் திசைகோள்

(b) A இலிருந்து B இன் தூரம்

(c) B இலிருந்து A இன் திசைகோள்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. கட்டுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ள வீடு ஒன்றின் தளத்தின் கிடைப்படத்திற்கான அளவிடைப்படம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதனைக் கொண்டு கீழே தரப்பட்டுள்ள வினாக்களுக்கு விடை தருக.



(i) படுக்கை அறை 2 இன் உண்மையான நீளம் 4 m எனின், இக்கிடைப்படம் வரையப்பட்டுள்ள அளவிடையை விகிதமாகத் தருக.

(ii) வீட்டின் உண்மையான அகலத்தைக் காண்க.

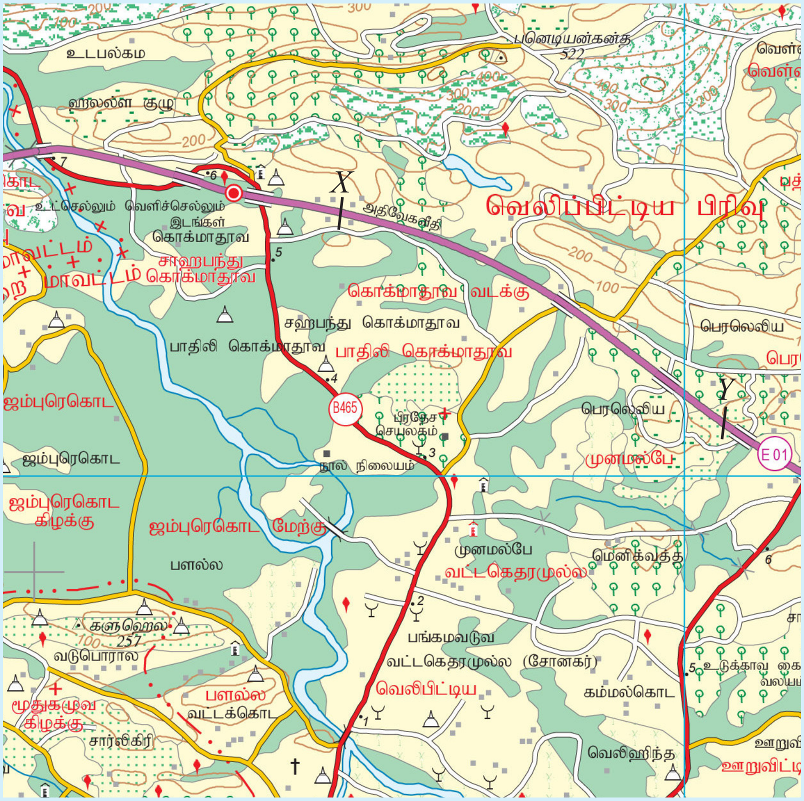
(iii) குளியலறையின் தளத்தின் பரப்பளவைச் சதுர மீற்றரில் காண்க.

6. களியாட்டத் தரை ஒன்றுக்குக் குறுக்காக மேற்கிலிருந்து கிழக்காக அமைந்துள்ள நேரான பாதை ஒன்றின் மீது நிற்கும் பயணி ஒருவர் 115^{o} திசைகோளில் கொடிக் கம்பம் ஒன்றை அவதானிக்கின்றார். அவர் கிழக்கு நோக்கி 220 m நடந்த பின்னர் அக்கொடிக் கம்பத்தை 210^{o} திசைகோளில் அவதானிக்கிறார்.

(i) கொடிக் கம்பத்திலிருந்து பயணி இரண்டாவது தடவை அவதானித்த இடத்தின் அமைவை விவரிக்க.

(ii) அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைந்து கொடிக் கம்பத்திலிருந்து பாதைக்குள்ள கிட்டிய தூரத்தைக் காண்க.

7.



1 : 1 000 000 என்ற அளவிடைக்கு வரையப்பட்ட இலங்கையின் வீதிகள் தொடர்பான தேசப்படத்தின் ஒரு பகுதி இங்கு தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு கருஞ் சிவப்பு நிறத்தில் காணப்படுவது A தரத்திலான பெருந்தெருவாகும்.

(i) படத்தில் 1 cm இனால் காட்டப்படும் உண்மையானத் தூரத்தை கிலோமீற்றரில் காண்க.

(ii) A தரத்திலான பெருந்தெருவில் X இலிருந்து Y வரை அமைந்துள்ள பகுதியின் நீளத்தை ஒரு நூலினால் அளந்து உண்மையான தூரத்தைக் கிலோமீற்றரில் காண்க.

28 தரவு வகைக்குறிப்பும் விளக்கமளித்தலும்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- தரப்பட்டுள்ள பச்சைத் தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குவதற்கும்
- ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் காண்பதற்கும்
- தரப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குவதற்கும்
- ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

ஒரு தரப்பட்ட பச்சைத் தரவுத் தொகுதியின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் காணும் விதம் பற்றி நீங்கள் தரம் 8 இற் கற்றுள்ளீர்கள். அதனை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. ஒரு பாடசாலைக் கிறிக்கெற்றுக் குழுவின் விளையாட்டு வீரர்களின் வயதுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

15, 16, 15, 16, 16, 19, 17, 18, 17, 16, 18

இத்தரவுகளின்

(i) வீச்சு (ii) ஆகாரம் (iii) இடையம் (iv) இடை

ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. குறித்த ஒரு மாதத்தின் முதல் இரு வாரங்களின்போது ஒரு வளிமண்டல நிலையத்தினால் சேகரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு நாளிலும் இருந்த கூடுதலான வெப்பநிலை கீழே (செல்சியஸ் பாகையில்) தரப்பட்டுள்ளது.

26, 28, 28, 29, 27, 28, 29, 30, 31, 28, 30, 31, 32, 27

இத்தரவுகளின்

(i) வீச்சு (ii) ஆகாரம்

(iii) இடையம் (iv) இடை

ஆகியவற்றைக் காண்க.

28.1 கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல்கள்

தரப்பட்ட பச்சைத் தரவுகளைப் (Raw data) பயன்படுத்தி எமக்குத் தேவையான தகவல்களைப் பெறும்போது தரவுகளை உகந்தவாறு ஒழுங்குபடுத்த வேண்டும். ஓர் உதாரணமாக ஒரு தரவுப் பந்தியின் இடையம் போன்ற ஒரு வகைக்குறிப்புப் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்குத் தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்த வேண்டும்.

குறைந்த எண்ணிக்கையில் தரவுகள் இருக்கும்போது தரவுகளை எளிதாக ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தலாம். எனினும், கூடிய எண்ணிக்கையில் தரவுகள் இருக்கும்போது அவ்வாறு ஒழுங்குபடுத்தல் ஓரளவுக்குக் கடினமாகும். அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் அட்டவணைகள் பயன்படுத்தப்படும்.

ஒரு குறித்த வகுப்பின் மாணவர்கள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

42, 70, 68, 68, 56, 62, 74, 74. 74, 56, 62, 85, 91, 91, 74, 74, 56, 68, 68, 68, 74

இத்தகவல்களைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

வரவுக்குறிகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் இவ்வட்டணையை மேலும் எளிதாகவும் சரியாகவும் தயாரித்துக் கொள்ளலாம்.

புள்ளிகள் (தரவு)	வரவுக் குறி	மாணவர் எண்ணிக்கை (மீடிறன்)
42	/	1
56	///	3
62	//	2
68	~~////~~	5
70	/	1
74	~~////~~ /	6
85	/	1
91	//	2

இந்த அட்டவணையின் மூன்றாம் நிரலினை **மீடிறன்** என்போம்.

முதலில் மீடிறன் என்பதன் கருத்துப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

இங்கு 42 என்னும் தரவு ஒரு தடவையும் 56 என்னும் தரவு மூன்று தடவைகளும் வந்துள்ளன. இவ்வாறு ஒரு குறித்த தரவு வந்துள்ள தடவைகளின் எண்ணிக்கை அத்தரவின் **மீடிறன்** எனப்படும்.

இதற்கேற்ப 42 இன் மீடிறன் 1 உம்
56 இன் மீடிறன் 3 உம்
62 இன் மீடிறன் 2 உம்
ஆகும்.

இவ்வாறு தரவுகளையும் அவற்றை ஒத்த மீடிறன்களையும் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அட்டவணை **கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல்** எனப்படும். மேற்குறித்த தரவுக் கூட்டத்தைக் காட்டுவதற்குத் தயாரிக்கப்பட்ட கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

புள்ளிகள் (தரவு)	மாணவர் எண்ணிக்கை (மீடிறன்)
42	1
56	3
62	2
68	5
70	1
74	6
85	1
91	2

கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் ஆகாரம்

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தில் கூடுதலான தடவைகள் வரும் தரவு அத்தரவுக் கூட்டத்தின் **ஆகாரம்** ஆகுமெனக் கற்றுள்ளீர்கள்.

மேற்குறித்த அட்டவணையின் மீடிறன் நிரலில் கூடுதலான மீடிறன் 6 ஆகும். மீடிறன் 6 ஐ ஒத்த தரவு 74 ஆகும். அதாவது, இத்தரவுகளின் ஆகாரம் 74 ஆகும்.

கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் இடையம்

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும்போது நடுவில் இருக்கும் தரவு அக்கூட்டத்தின் **இடையம்** ஆகுமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

இங்கு மேலே நாம் தயாரித்த மீடிறன் அட்டவணையில் 21 தரவுகள் உள்ளன. அதற்கேற்ப நடுவில் உள்ளது 11 ஆம் தரவாகும். இப்போது 11 ஆம் தரவைக் காண வேண்டும். அதனைக் காணும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

மேற்குறித்த தரவுகளில்

1 ஆம் தரவு 42 உம்
2 ஆம் தரவு 56 உம்
3 ஆம் தரவு 56 உம்
.
.
.
6 ஆம் தரவு 62 உம் ஆகும் என்பதைக் அவதானிக்க. அதற்கேற்ப 11 ஆம் தரவை மீடிறன் நிரலின் கூட்டுத்தொகையைக் கொண்டு காணலாம். அதற்காக மீடிறன் நிரலின் கூட்டுத்தொகையைப் பக்கத்தில் எழுதுவோம்.

தரவு	மீடிறன்
42	1
56	3
62	2
68	5
70	1
74	6
85	1
91	2
	21

மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$1$$
$$3 + 1 = 4$$
$$2 + 3 + 1 = 6$$
$$5 + 2 + 3 + 1 = 11$$

தரவுக் கூட்டத்தின் 11 ஆம் தரவு 68 என மீடிறன் நிரலின் கூட்டுத்தொகையைக் கொண்டு எளிதாகக் காணலாம்.

தரவுகளின் எண்ணிக்கை கூடுதலாக இருக்கும்போது நடுவே வரும் தரவு இருக்கும் தானம் பற்றி ஒரே தடவையில் சிந்தித்துப் பார்த்தல் கடினமாக இருக்கலாம். ஆகவே நடுத் தானத்தைக் கண்டுபிடிப்பதற்குப் பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றுக.

குறிப்பு

தரவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஒற்றை எண்ணாக இருக்கும்போது நடுவில் இருக்கும் தரவின் தானத்தைத் $\dfrac{\text{தரவு எண்ணிக்கை} + 1}{2}$ இலிருந்து பெறலாம்.

மேலே பார்த்ததற்கேற்ப

$$\text{தரவுக் கூட்டத்தின் தரவு எண்ணிக்கை} = 21$$

$$\text{தரவுக் கூட்டத்தின் இடையத்தின் அமைவு} = \frac{21+1}{2}$$

$$= \frac{22}{2}$$

$= 11$ ஆம் ஈட்டாகும்.

11 ஆவது இடத்தில் அமைந்திடும் தரவு 68 ஆகும்.

$\therefore$ தரவுக் கூட்டத்தின் இடையம் 68 ஆகும்.

அதாவது மாணவர்கள் பெற்றுள்ள இடையப் புள்ளி 68 ஆகும்.

கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் இடை

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் இடையைக் காண்பதற்குத் தரவுகளின் கூட்டுத்தொகையைத் தரவுகளின் எண்ணிக்கையினால் வகுக்க வேண்டுமெனத் தரம் 8 இல் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். பின்வரும் கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலைக் கொண்டு தரவுகளின் இடையைக் காணும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

இங்கு 42 ஆனது ஒரு தடவையும் 56 ஆனது 3 தடவைகளும் என்றவாறு காணப்படுகின்றது. இடையைக் காண்பதற்கு முழுத் தரவுகளினதும் கூட்டுத்தொகை காணப்பட வேண்டும்.

அதற்காகப் பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவோம்.

தரவு	மீடிறன் f	fx
42	1	$42 \times 1 = 42$
56	3	$56 \times 3 = 168$
62	2	$62 \times 2 = 124$
68	5	$68 \times 5 = 340$
70	1	$70 \times 1 = 70$
74	6	$74 \times 6 = 444$
85	1	$85 \times 1 = 85$
91	2	$91 \times 2 = 182$
	21	1455

தரவுகளின் கூட்டுத்தொகை $= 1455$

தரவுகளின் இடை $= \frac{1455}{21}$

$= 69.28$

≈ 69 (கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டும்போது)

மாணவர்கள் பெற்றுள்ள இடைப் புள்ளி கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு 69 ஆகும்.

உதாரணம் 1

ஓர் ஆரம்பப் பாடசாலையில் தரம் 3 இன் 36 மாணவர்களின் திணிவுகள் (kg) கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

27	25	20	23	21	26	20	23	21	22	24	25
26	24	23	23	26	24	26	20	24	22	24	25
26	22	23	26	22	24	23	25	24	21	27	27

(i) தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

(ii) மேற்குறித்த தகவல்களைக் கொண்டு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

(iii) அட்டவணையைக் கொண்டு மாணவர்களின் திணிவுகளின்
(a) ஆகாரம் (b) இடையம் (c) இடை
ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) ஒரு மாணவனின் திணிவின் கூடிய பெறுமானம் $= 27$ kg
ஒரு மாணவனின் திணிவின் குறைந்த பெறுமானம் $= 20$ kg
$\therefore$ தரவுகளின் வீச்சு $= 27 - 20$
$= 7$

(ii)

ஒரு மாணவனின் திணிவு x (kg)	மீடிறன் f	மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை
20	3	3
21	3	6
22	4	10
23	6	16
24	7	23
25	4	27
26	6	33
27	3	36

(iii) (a) தரவுகளின் ஆகாரம் = 24 kg

(b) இங்கு 36 தரவுகள் உள்ளன. 36 ஓர் இரட்டை எண் ஆகையால், நடுவில் 2 தரவுகள் உள்ளன. அத்தகைய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் இடையத் தரவானது நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளினதும் சராசரியாகும். முதலில் நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளினதும் அமைவுகளைக் காண்போம்.

குறிப்பு

தரவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஓர் இரட்டை எண்ணாக இருக்கும்போது நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளினதும் தானங்கள் முறையே $\frac{\text{தரவு எண்ணிக்கை}}{2}$, $\frac{\text{தரவு எண்ணிக்கை}}{2} + 1$ ஆகியவற்றிலிருந்து பெறப்படும்.

இடையத்தின் அமைவிடம் $= \frac{36}{2},\ \frac{36}{2} + 1$

$= 18,\ 19$ ஆம் தரவுகள் ஆகும்.

நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளும் 18 ஆம் தரவும் 19 ஆம் தரவும் ஆகும்.

18 ஆம் தானத்தில் இடம்பெறும் தரவு $= 24$

19 ஆம் தானத்தில் இடம்பெறும் தரவு $= 24$

$\therefore$ தரவுகளின் இடையம் $= \frac{24 + 24}{2}$

$= \frac{48}{2}$

$= 24$ kg

(c)

ஒரு மாணவனின் திணிவு kg x	மீடிறன் f	$f \times x$
20	3	60
21	3	63
22	4	88
23	6	138
24	7	168
25	4	100
26	6	156
27	3	81
கூட்டுத்தொகை	36	854

தரவுகளின் கூட்டுத்தொகை $= 854$ kg

தரவுகளின் எண்ணிக்கை $= 36$

$\therefore$ தரவுகளின் இடை $= \frac{854 \text{ kg}}{36}$

$= 23.72$ kg (கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானத்திற்கு)

பயிற்சி 28.1

1. ஒரு குறித்த வளிமண்டல நிலையத்தினால் 2016 டிசெம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளில் இருந்த கூடுதலான வெப்பநிலை பற்றிச் சேகரிக்கப்பட்ட ஒரு தகவற் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

28 26 28 28 29 30 28 26 27 27 27
28 26 25 24 24 25 25 26 27 28
28 27 26 28 27 28 29 30 28 27

(i) தரவுகளின் வீச்சு யாது?
(ii) இத்தரவுகளின் மீடிறன் பரம்பலுக்கான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(iii) அட்டவணையைக் கொண்டு தரவுகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க.
(iv) 2016 டிசெம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளின் இடைய வெப்பநிலையைக் காண்க.
(v) 2016 டிசெம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளின் இடை வெப்பநிலையைக் காண்க.

2. ஒரு காய்கறிச் சந்தையில் எலுமிச்சம் பழங்கள் விற்பனைக்காகப் பொதிசெய்யப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பொதியிலும் அடங்கும் எலுமிச்சம் பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

5 3 4 6 2 3 4 5 3 4 6 5 3 4
4 2 4 3 5 3 3 4 2 5 3 2 4 3

(i) இத்தரவுகளின் வீச்சு யாது?
(ii) இத்தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.
(iii) தரவுகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க.
(iv) ஒரு பொதியில் உள்ள எலுமிச்சம் பழங்களின் எண்ணிக்கையின் இடையத்தைக் காண்க.
(v) ஒரு பொதியுறையில் உள்ள எலுமிச்சம் பழங்களின் எண்ணிக்கையின் இடையைக் காண்க.

3. ஒரு கடையில் தினமும் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் மூலம் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு நாளில் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை	8	9	10	11	12	13	14
நாட்களின் எண்ணிக்கை	3	5	8	6	4	3	1

(i) மீடிறன் பரம்பலின் வீச்சு யாது?

(ii) அட்டவணையைக் கொண்டு ஒரு நாளில் செலவிடப்படும் மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கையின் ஆகாரப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க.

(iv) தகவல்கள் பெறப்பட்ட நாட்களில் ஒரு நாளில் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கையின் இடையைக் காண்க.

4. ஒரு கிராமிய மருத்துவமனையில் வெளிநோயாளர் பிரிவிலிருந்து தினமும் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை பற்றிச் சேகரிக்கப்பட்ட தகவல் களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

ஒரு நாளில் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	29	30	31	32	33	34	35
நாட்களின் எணிக்கை	2	4	6	8	12	6	2

(i) தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

(ii) அத்தரவுகளின்

(a) ஆகாரம்

(b) இடையம்

(c) இடை

ஆகியவற்றைக் காண்க.

28.2 கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்கள்

இப்பகுதியில் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் என்பதன் கருத்தைப் பற்றியும் அதன் தேவை பற்றியும் அது தயாரிக்கப்படும் விதம் பற்றியும் பார்ப்போம்.
அதற்காகப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கருதுக.

ஒரு பரீட்சையில் பிள்ளைகள் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

21	26	28	32	34
36	36	38	39	39
39	40	41	41	41
41	42	45	48	48
52	53	56	66	68
70	75	80	81	83

இச்சந்தர்ப்பத்தில் தரவுகளின் கூடிய பெறுமானம் 83 ஆக இருக்கும் அதேவேளை குறைந்த பெறுமானம் 21 ஆகும்.

இதற்கேற்பத் தரவுகளின் வீச்சு $= 83 - 21$
$= 62.$

இங்கு தரவுகளின் வீச்சு பெரிதாகையால் ஒவ்வொரு பெறுமானத்தின் கீழும் ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிக்கையில் மிகவும் நீளமான மீடிறன் பரம்பல் கிடைக்கும். அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் அத்தரவுகளின் வீச்சைக் கருதி எல்லாத் தரவுகளும் அடங்குமாறு கூட்டங்களாக வகுத்து வகைகுறிக்கப்படும். அத்தகைய ஒரு கூட்டம் **வகுப்பாயிடை** எனப்படும். வகுப்பாயிடைகளுடன் தயாரிக்கப்படும் மீடிறன் பரம்பல் **கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்** எனப்படும்.

அத்தகைய ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
10 - 19	3
20 - 29	6
30 - 39	5
40 - 49	2

இங்கு நான்கு வகுப்பாயிடைகள் உள்ளன.

வகுப்பாயிடை 10 - 19 இற்குத் தரப்பட்டுள்ள தரவுக் கூட்டத்தில் 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கும் தரவுகள் உள்ளன.

வகுப்பாயிடை 10 - 19 இற்குரிய 10 பெறுமானங்களின் தரவுகளை உள்ளடக்கலாம். ஆகையால் இவ்வகுப்பாயிடையின் **பருமன்** 10 ஆகக் கருதப்படும். எஞ்சிய வகுப்பாயி டைகளும் அவ்வாறேயாம்.

வகுப்பாயிடை 10 - 19 இன் மீடிறன் 3 என்பது கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலுக்குரிய தரவுக் கூட்டத்தில் 10, 11, 12, 13, ... , 19 என்னும் பெறுமானங்களிடையே 3 பெறுமானங்கள் மாத்திரம் இடம்பெறுகின்றன என்பதைக் கருதுகின்றது.

இப்போது நாம் ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் தயாரிக்கப்படும் விதத்தில் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

தரவுகளை வகுப்பாயிடைகளின் கீழ் அட்டவணைப்படுத்தும்போது முதலில் ஒரு வகுப்பாயிடையின் பரம்பல் அல்லது வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை பற்றித் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

தரவுகளைக் கூட்டமாக்கும் ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் தீர்மானிக்கப் பட்டிருக்கும்போது பின்வருமாறு வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையைப் பெறலாம்.

- தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
- தரவுகளின் பெறுமான வீச்சை ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனால் வகுக்க.
- அப்போது கிடைக்கும் பெறுமானத்தின் கிட்டிய கூடிய முழுவெண் வகுப்பாயி டைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.

பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் இதனைப் பார்ப்போம்.
30 பிள்ளைகள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

21	26	28	32	34
36	36	38	39	39
39	40	41	41	41
41	42	45	48	48
52	53	56	66	68
70	75	80	81	83

இத்தரவுகளை ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் 10 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரிக்க வேண்டியுள்ளதெனக் கருதுவோம்.

முதலில் வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனை 10 ஆக எடுக்க வேண்டும். ஆகையால்,

வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{62}{10}$

$= 6.2$

≈ 7 (கிட்டிய கூடுதலான முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டும்போது)

ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனை 10 ஆக எடுக்கும்போது 7 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கிடைக்கும்.
அதன் குறைந்த தரவு 21 ஆகையால் முதல் வகுப்பாயிடையை 20 உடன் ஆரம்பிப் போம். 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 என்னும் 10 பெறுமானங்களையும் முதலாம் வகுப்பாயிடைக்கும் அடுத்த 10 பெறுமானங்களை அடுத்த வகுப்பாயிடைக்கும் என்றவாறு வகுப்பாயிடைகளைப் பிரிப்போம். அதற்கேற்பப் பின்வருமாறு வகுப்பாயிடைகள் கிடைக்கும்.

20 - 29, 30 - 39, 40 - 49, 50 - 59, 60 - 69

குறிப்பு

- இங்கு முதலாம் வகுப்பாயிடை 20 இல் ஆரம்பித்தாலும் தேவையெனின் 21இலும் ஆரம்பிக்கலாம். அப்போது வகுப்பாயிடைகள் 21 - 30, 31 - 40, 41 - 50 என்றவாறு கிடைக்கும்
- வகுப்பாயிடைகளை ஆக்கும்போது உகந்தவாறு வேறுவிதமாகவும் வகுப்புகளைக் காணலாம்.

இப்போது ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடைக்கும் உரிய தரவுகளை வரவுக்குறிகளைக் கொண்டு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

வகுப்பாயிடை	வரவுக்குறி	மீடிறன்
20 - 29	///	3
30 - 39	~~////~~ ///	8
40 - 49	~~////~~ ////	9
50 - 59	///	3
60 - 69	//	2
70 - 79	//	2
80 - 89	///	3

குறிப்பு

வரவுக்குறி நிரலை மீடிறன் பரம்பலில் காட்ட வேண்டியது அவசியமில்லை.

தரவுகள் கூட்டமாக்கப்பட வேண்டிய வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை தீர்மானிக்கப்பட்டிருக்கும்போது பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றி ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனைப் பெறலாம்.

- தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
- பெறுமான வீச்சைத் தேவையான வகுப்புக்களின் எண்ணிக்கையினால் (வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை 10 இலும் குறைவாக இருத்தல் உகந்தது) வகுக்க.
- அப்போது கிடைக்கும் பெறுமானத்தின் கிட்டிய முழுவெண்ணை வகுப்பாயிடைகளின் பருமனாகக் கொள்க.

இத்தரவுகளைப் பயன்படுத்தி 5 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் உருவாக்கப்படும் விதத்தைப் பார்ப்போம். முதலில் ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனைக் காண்போம்.

தரவுகளின் வீச்சுப் பெறுமானம் $= 83 - 21$
$= 62$

வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையை 5 ஆக எடுக்க வேண்டும் ஆகையால்,

ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் $= \dfrac{62}{5}$

$= 12.4$

$\simeq 13$ (கிட்டிய அடுத்த முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டும்போது)

அதற்கேற்ப ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் 13 ஆகவுள்ள 5 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கிடைக்கும்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
20 - 32	4
33 - 45	14
46 - 58	5
59 - 71	4
72 - 84	3

இவ்வாறு எமது தேவைக்கேற்பத் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிக்கலாம்.

இங்கு தொடக்கக் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை மறுபடியும் கருதுக. அதில் முதலாம் வகுப்பாயிடை 20 - 29 ஆகவும் அடுத்த வகுப்பாயிடை 30 - 39 ஆகவும் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. 29 இற்கும் 30 இற்கும் இடையே புள்ளிகள் இருக்க முடியாது. ஆகையால் அவ்வாறு வகுப்பாயிடைகளைத் தெரிந்தெடுக்கலாம். அவ்வியல்பு இரண்டாம் மீடிறன் பரம்பலிலும் இருப்பதை அவதானிக்க.

எனினும் நீளம், நேரம், திணிவு போன்ற தரவுகளை வகுப்பாயிடைகளில் இடும்போது முதலாம் வகுப்பாயிடை முடிவடையும் தரவிலேயே அடுத்த தரவு ஆரம்பிக்க வேண்டும் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்க.

அத்தகைய ஓர் உதாரணத்தை இப்போது கருதுவோம்.

ஒரு வகுப்பின் 20 பிள்ளைகளின் திணிவுகள் கிட்டிய முழுவெண்ணிற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு தரப்பட்டுள்ள திணிவுகள் கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டப்பட்டுள்ளன.

31	31	31	32	32
32	32	33	33	34
34	34	35	36	36
38	39	39	40	41

இத்தரவுகளுக்கான ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் 3 ஆகவுள்ள 4 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிப்போம்.

முதலாம் வகுப்பாயிடை 30 - 33 ஆகவும் அடுத்த வகுப்பாயிடை 33 - 36 ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாகப் பின்வருமாறு வகுப்பாயிடைகளைத் தெரிந்தெடுப்போம்.

30 - 33

33 - 36

36 - 39

39 - 42

இவ்வாறு முதலாம் வகுப்பாயிடை முடிவடையும் பெறுமானமாகிய 33 இலேயே அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆரம்பிக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்குக் காரணம் இங்கு தரவுகள் திணிவு பற்றிச் சேகரிக்கப்பட்டிருப்பதாகும். 33 kg இற்கும் 34 kg இற்குமிடையே திணிவைக் கொண்ட பிள்ளைகள் இருக்கலாம். உதாரணமாக 33. 2 kg, 33.5 kg, 33.8 kg ஆகியவற்றைக் கருதலாம். ஆகவே ஒரு வகுப்பாயிடை முடிவடையும் பெறுமானத்திலேயே அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆரம்பிக்க வேண்டும்.

இங்கு முதலாம் வகுப்பாயிடை 33 இல் முடிவடையும் அதேவேளை இரண்டாம் வகுப்பாயிடை 33 இல் ஆரம்பிக்கின்றது. அப்போது பெறுமானம் 33 எவ்வகுப்பாயிடைக்கு உரியது என்னும் வினா எழுகின்றது. இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் இரு வகுப்பாயிடைகளில் யாதாயினும் ஒன்றுக்கு மாத்திரம் அப்பெறுமானம் எடுக்கப்படும். தேவை ஏற்படும்போது அவ்வாறு நீர் தெரிந்தெடுக்கும் வழக்கைக் குறிப்பிடுதல் உகந்தது. இவ்வத்தியாயத்தில் பின்வருமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு வகுப்பாயிடை 30 - 33 இல் 31, 32, 33 ஆகிய தரவுகளும்
வகுப்பாயிடை 33 - 36 இல் 34, 35, 36 ஆகிய தரவுகளும்
வகுப்பாயிடை 36 - 39 இல் 37, 38, 39 ஆகிய தரவுகளும்
வகுப்பாயிடை 39 - 42 இல் 40, 41, 42 ஆகிய தரவுகளும்
இடம்பெறுமாறு எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அவ்வாறு தயாரித்த கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
30 - 33	9
33 - 36	6
36 - 39	3
39 - 42	2

குறிப்பு

கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்களைத் தயாரிக்கும்போது தரவுகளின் இயல்பைக் கருதி வகுப்பாயிடைகளை அமைக்க வேண்டும் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்க.

பயிற்சி 28.2

1. 2017 ஜனவரி மாதத்தில் ஒரு வீடமைப்புத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு வீட்டிலும் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றி மானி வாசிப்பாளர் சேகரித்த தரவுக் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

63 68 75 54 56 58 85 69 62 72
90 73 63 76 62 69 78 66 74 67
50 74 64 58 88 85 72 70 69 78
71 53 82 68 73 67 75 84 59 72
74 67

மேற்குறித்த தரவுகளைக் கொண்டு இத்தரவுகளுக்குரிய மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

2. ஒரு பாடசாலையில் தரம் 9 இல் கற்கும் மாணவர்கள் கணித வினாத்தாளிற்குப் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

34 27 45 12 63 35 54 29
42 68 73 54 26 11 63 54
33 69 62 38 53 48 63 61
60 44 67 61 79 65 47

(i) வினாத்தாளிற்கு ஒரு மாணவன் பெற்ற
(a) கூடிய புள்ளியையும்
(b) குறைந்த புள்ளியையும்
காண்க.

(ii) தரவுகளின் வீச்சைக் காண்க.

(iii) மேற்குறித்த தரவுகளை 7 வகுப்பாயிடைகளின் கீழ் அட்டவணைப்படுத்தி ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

3. ஓர் ஆரம்ப பாடசாலையின் தரம் 4 இன் ஒரு வகுப்பின் பிள்ளைகளின் உயரங்களை (சென்ரிமீற்றரில்) அளந்து பெற்ற தரவுகளின் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஓர் உகந்த கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

124 124 138 125 122 129 122 128 131 127 125 120 125
120 121 125 120 132 127 124 126 130 125 131 122 130
129 128 125 122 133 138 125 123 126 125 135 126 132

28.2 கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காணல்

ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்கும் விதம் பற்றி மேற்குறித்த பகுதியில் நாம் கற்றோம். இப்போது ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காணும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்களின் வகுப்பாயிடைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றமையால் கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் ஆகாரத்தையும் இடையத்தையும் வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு காட்டலாம்.

கூடிய எண்ணிக்கையில் தரவுகள் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் **ஆகார வகுப்பு** ஆகும். எல்லாத் தரவுகளையும் ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும்போது நடுவில் கிடைக்கும் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை **இடைய வகுப்பு** ஆகும்.

உதாரணம் 1

பிள்ளைகள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு தயாரித்த கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு
(ii) இப்பரம்பலின் இடைய வகுப்பு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை
10 - 20	3	3
21 - 30	4	7
31 - 40	6	13
$\boxed{41 - 50}$	$\boxed{7}$	20
$\boxed{51 - 60}$	$\boxed{11}$	31
61 - 70	4	35

(i) கூடிய மீடிறன் 11 ஆகையால் தரவுகளின் ஆகார வகுப்பு $51 - 60$ ஆகும்.

(ii) தரவுக் கூட்டத்தின் இடையத்தின் அமைவு $= \dfrac{35 + 1}{2}$

$= 18$

18 ஆம் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை இடைய வகுப்பாகும்.

$\therefore$ இடைய வகுப்பு $41 - 50$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஓர் அலுவலகத்தில் பணியாற்றும் ஊழியர்களின் வயதுகளைக் கொண்டு தயாரிக்கப் பட்டுள்ள கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின்

(i) ஆகார வகுப்பு

(ii) இடைய வகுப்பு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

வயது (வருடங்களில்) வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை
20 - 27	3	3
27 - 34	5	8
34 - 41	$\boxed{11}$	19
41 - 58	6	25
48 - 55	3	28

(i) கூடிய மீடிறன் $= 11$

$\therefore$ தரவுகளின் ஆகார வகுப்பு $= 34 - 41$

(ii) தரவுக் கூட்டத்தின் இடையம் இருக்கும் தானம் $= \frac{28}{2}, \frac{28}{2} + 1$

$= 14, 15$ ஆம் தரவுகள்

14 ஆம் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை $= 34 - 41$

15 ஆம் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை $= 34 - 41$

$\therefore$ இடைய வகுப்பு 34 - 41 ஆகும்.

பயிற்சி 28.3

1. லொத்தர்ச் சீட்டு விற்பனையாளர் ஒருவர் 2016 மார்ச் மாதத்தில் தினமும் விற்ற லொத்தர்ச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

380 390 379 402 370 385 397 386 377 405
400 381 390 375 392 384 391 385 387 395
390 393 373 386 378 395 379 396 395 391
373

(i) ஒரு நாளில் கூடுதலாக விற்ற லொத்தர்ச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(ii) ஒரு நாளில் குறைவாக விற்ற லொத்தர்ச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(iii) தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
(iv) பருமன் 6 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைப் பயன்படுத்தித் தரவுகளை அட்டவணைப்படுத்தி ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.
(v) அட்டவணையைக் கொண்டு

a. தரவுகளின் ஆகார வகுப்பைக் காண்க.
b. தரவுகளின் இடையம் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை யாது?

2. 2016 இன் முதல் தவணையில் ஒரு பாடசாலை நூலகத்திலிருந்து வெளியே கொண்டு செல்வதற்காக வழங்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகள் பற்றியத் தினசரி குறிக்கப்பட்ட தரவுக் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

27	20	33	37	40	25	15	29	33	32
29	32	25	36	16	35	37	28	34	27
41	36	40	28	27	23	32	33	24	38

(i) தரவுகளின் வீச்சு யாது?
(ii) இத்தரவுகளைக் கொண்டு 15 - 19, 20 - 24, ... எனப் பருமன் 4 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

(iii) அட்டவணையைக் கொண்டு ஒரு நாளுக்கு 30 இலும் கூடுதலாகப் புத்தகங்கள் வழங்கப்பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iv) 31 இற்கும் 26 இற்குமிடையே உள்ள எண்ணிக்கையில் புத்தகங்கள் வழங்கப் பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(v) தரவுகளின் ஆகார வகுப்பு யாது?

(vi) தினமும் வெளியே கொண்டு செல்வதற்கு வழங்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகளின் இடையம் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை யாது?

பலவினப்பயிற்சி

1. ஒரு தென்னந்தோட்டத்தில் தேங்காய்கள் பறிக்கப்படும் ஒரு பருவத்தில் ஒவ் வொரு தென்னையிலிருந்தும் பறிக்கப்பட்ட தேங்காய்களின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு பின்வரும் கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

தேங்காய்களின் எண்ணிக்கை	மீடிறன்
8	3
10	5
12	8
13	7
14	5
15	2

(i) தரவுகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க.

(ii) தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க.

(iii) ஒரு தென்னையிலிருந்து பறிக்கப்பட்ட தேங்காய்களின் எண்ணிக்கையின் இடையைக் காண்க.

2. ஒட்டுப்பலகையைத் தயாரிப்பதற்கு வழங்கப்பட்ட இறப்பர் மரங்களின் தண்டுகளின் சுற்றளவுகளை (cm இல்) அளந்து பெற்ற தரவுக் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

95	112	118	86	103	102	94	98	80	97
87	105	85	103	95	106	98	94	110	102
103	105	90	110	96	100	89	104	98	114
106	98	98	112	86	105	97	107	96	92
115									

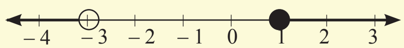
(i) மேற்குறித்த தரவுகளை 8 வகுப்பாயிடைகளின் கீழ் அட்டவணைப்படுத்துக.

(ii) தரவுகளின் ஆகார வகுப்பைக் காண்க.

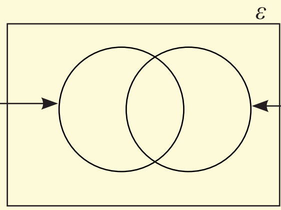
(iii) தரவுகளின் இடைய வகுப்பைக் காண்க.

மீட்டற் பயிற்சி 3
பகுதி I

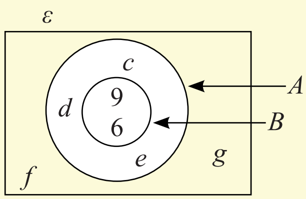
1. $x - 3 < -1$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

2. 

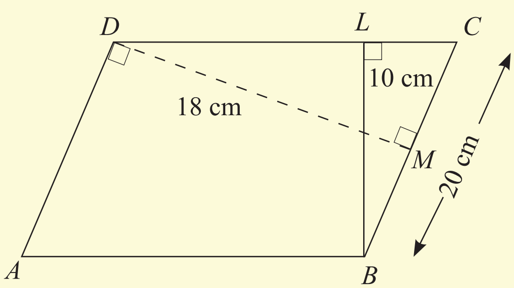
எண் கோட்டின் மீது நிழற்றியுள்ள பகுதியைச் சமனிலி மூலம் தருக.

3. 

குறித்த ஒரு பாடசாலையில் தரம் 9 மாணவர்களின் தகவல்களைக் குறிப்பதற்காக வரையப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தில் 13 வயதிலும் குறைந்த பெண் பிள்ளைகளைக் குறிக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

4. 

வென் வரிப்படத்திலிருந்து B' இன் மூலகங்களை எழுதுக. இத்தொடைக்குச் சமனாகும் இன்னொரு தொடையைப் பெயரிடுக.

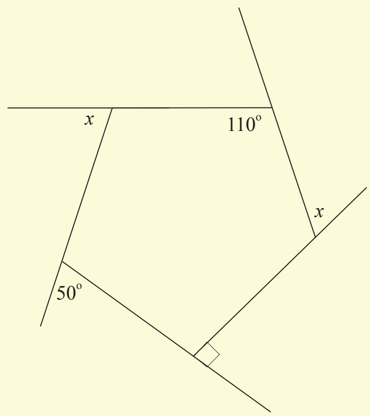
5. 

இணைகரம் $ABCD$ இல் $BC = 20$ cm, $BL = 10$ cm, $DM = 18$ cm ஆகும். இணைகரம் $ABCD$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

6. 1 இலிருந்து 20 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட அட்டைகளின் ஒரு தொகுதியிலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்ட அட்டையில் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண் ஒரு முக்கோண எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. **"numbers"** என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் தொடையை A எனப் பெயரிட்டு, அவ்வெழுத்துக்களின் தொடையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஓர் எழுத்தைத் தெரிந்தெடுத்தால் அது எழுத்து "m" ஆவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



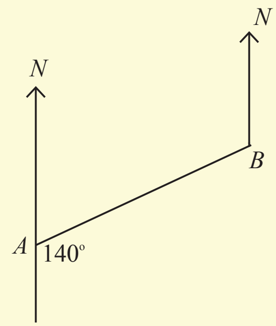
9. ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியில் ஓர் அகக்கோணத்தின் பெறுமானம் புறக் கோணத்தை விட 150° இனால் கூடியதாகும். பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

10. சுருக்குக . $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3x-2}{6}$

11. சுருக்குக . $\dfrac{a+1}{a-3} - \dfrac{4-2a}{a-3}$

12. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து

(i) A இலிருந்து B இன் திசைகோளையும்
(ii) B இலிருந்து A இன் திசைகோளையும்
காண்க.



13. 1 : 50 000 என்னும் அளவிடைக்கு வரையப்பட்ட ஓர் அளவிடைப் படத்தில் A, B ஆகிய இரண்டு நகரங்களுக்கிடையிலுள்ள உண்மையான தூரம் 8 km ஐக் குறிப்பதற்குத் தேவையான கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் யாது?

14. 12, 8, x, 5, 10 என்னும் தரவுக் கூட்டத்தின் இடை 10 ஆயின், இடையத்தைக் காண்க.

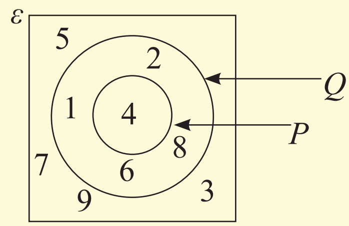
பகுதி II

1. (A) தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $\subset$, $\in$ ஆகிய குறியீடுகளைப் பொருத்தமான வகையில் பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) 4 —— Q (ii) 7 —— Q

(iii) P —— ε (iv) P —— Q

(v) $(P \cap Q)$ —— P



(B) i. $n(P)'$ ஐ எழுதுக.

ii. $(Q)'$ இற்கு எழுதக்கூடிய தொடைப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை யாது? அவற்றுள் நான்கை எழுதுக.

(C) ε = {1 இலிருந்து 20 வரையுள்ள எண்ணும் எண்கள்}

A = {1 இலிருந்து 20 வரையுள்ள 3 இன் மடங்குகளான எண்கள்}

B = {1 இலிருந்து 20 வரையுள்ள 2 இன் மடங்குகளான எண்கள்}

i. மேற்குறித்த மூன்று தொடைகளினதும் மூலகங்களை எழுதுக.

ii. பொருத்தமான வகையில் மேற்குறித்த தொடைகளை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

iii. மேலே (ii) இலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளின் மூலகங்களை எழுதுக.

a. $A \cap B$ **b.** $A \cup B$

c. A' **d.** B'

2. பாடசாலை ஒன்றில் உள்ள சிற்றுண்டிச்சாலையில் 50 தினங்களில் விற்கப்பட்ட பால் பைக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

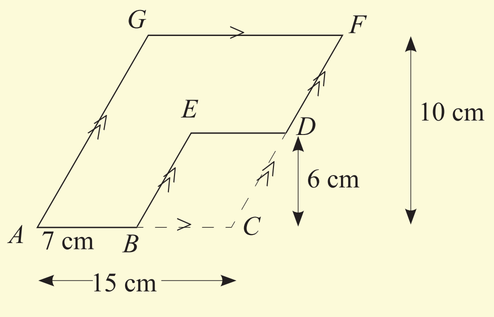
31	34	38	40	44	43	45	47	45	50
53	52	58	55	54	53	61	63	65	66
66	68	64	63	66	67	62	63	66	70
71	73	74	75	76	72	73	72	74	81
82	82	82	83	83	84	8	85	92	96

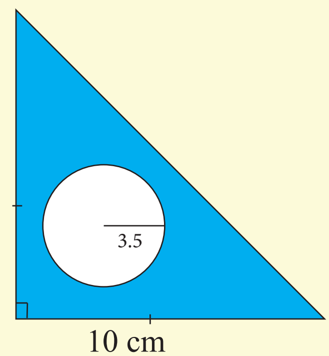
(i) இத்தரவுகளின் வீச்சைக் காண்க.

(ii) வகுப்பாயிடை 31 - 40, 41 - 51, 50 - 60 என்றவாறு அமையும் வகையில் கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் அட்டவணை ஒன்றைத் தயாரிக்க.

(iii) மேலே கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காண்க.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவங்களின் பரப்பளவுகளைக் கணிக்க





4. (*a*) ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியில் ஓர் அகக்கோணத்தின் பெறுமானம் ஒரு புறக் கோணத்தின் பெறுமானத்திலும் 100^{o} கூடியதாயின்,

(i) ஒரு புறக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

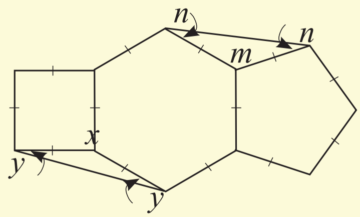
(ii) பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியில் ஓர் அகக்கோணத்திற்கும் ஒரு புறக்கோணத் திற்கும் இடையிலான விகிதம் 3 : 1 ஆயின், அகக்கோணங்கள் எல்லாவற் றினதும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

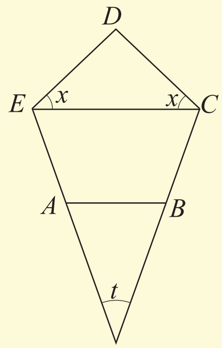
(*c*) ஒரு பல்கோணியில் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையின் ஐந்து மடங்காயின், அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*d*) குறித்தவொரு பல்கோணியில் நான்கு அகக்கோணங்களின் பெறுமானங்கள் முறையே 160^{o}, 140^{o}, 130^{o}, 110^{o} ஆவதுடன் அதன் எஞ்சிய புறக் கோணங்கள் அனைத்தும் 30^{o} வீதம் அமையுமாயின், இப்பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(e) உருவில் உள்ளவாறு குறித்தவொரு ஆக்கத்தில் ஒரு சதுரம், ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி, ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஆகியவை ஒன்றுடனொன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளன. x, y, m, n ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களை காண்க



(f) $ABCD$ ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணியாகும்.



(i) ஓர் உச்சியிலுள்ள அகக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) EC, AB ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

(iv) t இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. ***A*** i. $x-1\leq-3$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுத் தொடையை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

ii. $\frac{2x}{3} > -2$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

B 10 லீற்றரைக் கொள்ளத்தக்க ஒரு பாத்திரத்தில் 3 லீற்றர் நீர் உண்டு. அதற்கு மேலும் x l நீரைச் சேர்க்கும்போது நீரின் அளவை $3 + x \leq 10$ என்னும் சமனிலி மூலம் காட்டலாம். சமனிலியைத் தீர்த்து பாத்திரத்தில் சேர்த்த நீரின் அளவைக் காண்க.

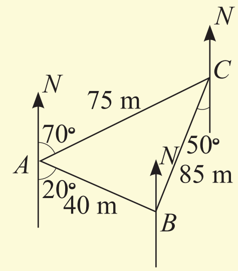
C சுருக்குக.

i. $\frac{m+1}{3} - \frac{1+2m}{2} + \frac{3m+2}{4}$

ii. $\frac{a+5}{a+3} - \frac{2-a}{3+a} + \frac{a}{a+3}$

6. ***A.*** கிடைத் தளம் ஒன்றில் அமைந்துள்ள A, B, C என்னும் 3 புள்ளிகளின் பருமட்டான அமைவுகளைக் குறிக்கும் ஒரு படம் இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.

   (i) A இலிருந்து B இன் திசைகோளைக் காண்க.
   (ii) B இலிருந்து A இன் அமைவை விவரிக்க.
   (iii) C இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்க.



B. வடக்குத் தெற்காகச் செல்லும் ஒரு நேர்ப் பாதையில் அமைந்துள்ள புள்ளி A இலிருந்து பாதையின் இடது பக்கத்தில் உள்ள ஒரு பாடசாலை வளவில் அமைந்துள்ள ஒரு நீர்த் தாங்கி 230^{o} திசைகோளில் தெரிகிறது. A இலிருந்து பாதை வழியே 140 m தெற்கு நோக்கி வந்து புள்ளி B இலிருந்து நீர்த் தாங்கியை அவதானித்தபோது திசைகோள் 300^{o} ஆக இருந்தது.

i. இத்தகவல்களை அடக்கிய பருமட்டான படம் ஒன்றை வரைக.
ii. பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் ஓர் அளவிடைப்படத்தை வரைந்து அதிலிருந்து நீர்த் தாங்கியிலிருந்து A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்குள்ள தூரத்தைக் கணிக்க.
iii. பாதையிலிருந்து நீர்த்தாங்கிக்கு உள்ள மிகவும் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

7. குறித்த ஒரு வங்கிக்கு வருகை தந்த வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையும், நாட்களின் எண்ணிக்கையும் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை	65	66	67	68	69	70	71	72
நாட்களின் எண்ணிக்கை	2	5	8	10	12	8	6	4

i. மேற்குறித்த பரம்பலின் வீச்சைக் காண்க.
ii. மேற்குறித்த தரவுகளின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் காண்பதற்குப் பொருத்தமான ஓர் அட்டவணையைத் தயாரித்துத் தரவுகளைக் குறிக்க.
iii. மேற்குறித்த அட்டவணையிலிருந்து தரவுப் பரம்பலின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் கணிக்க.