

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரīட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

* ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $k > 1$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன இம்மூலங்களெனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை k இல் எழுதி, α, β ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது $1 < k < 3$ எனக் கொள்வோம். $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k இல் காண்க.

(b) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ எனவும் $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $x^2 + x - 2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $x+1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும் a, b, c ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}$ எனக் காட்டுக.

12. (a) கீழே தரப்பட்டுள்ள 10 இலக்கங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் 4 இலக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு 4 இலக்க எண்ணை அமைக்க வேண்டியுள்ளது:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) தெரிந்தெடுக்கப்படும் எல்லா 4 இலக்கங்களும் வேறுபட்டனவாக இருப்பின்,

(ii) எந்த 4 இலக்கங்களும் தெரிந்தெடுக்கப்படலாமெனின்,

அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வேறுபட்ட 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் கண்டு,

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ ஒருங்குகின்றதென உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

மேலும் $C = AB^T$ எனவும் கொள்வோம். C ஐ a இற் கண்டு, எல்லா $a \neq 0$ இற்கும் C^{-1} இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

C^{-1} இருக்கும்போது அதனை a இல் எழுதுக.

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ எனின், } a = 2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

a இற்கான இப்பெறுமானத்துடன் $DC - C^T C = 8I$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் D ஐக் காண்க; இங்கு I ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(b) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ எனவும் $z_2 = 1 + i$ எனவும் கொள்வோம். $\frac{z_1}{z_2}$ ஐ வடிவம் $x + iy$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$.

மேலும் z_1, z_2 ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ இல் எடுத்துரைக்க;

இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும். இதிலிருந்து, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ எனக் காட்டுக.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ என உய்த்தறிக.}$$

(c) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $k \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $(1 + i \tan \theta)^n = \sec^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $(1 - i \tan \theta)^n$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று,

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$z = i \tan\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ ஆனது } (1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0 \text{ இன் ஒரு தீர்வென உய்த்தறிக.}$$

14. (a) $x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

$$x \neq 0, 2 \text{ இற்கு } f(x) \text{ இன் பெறுதி } f'(x) \text{ ஆனது } f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2} \text{ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

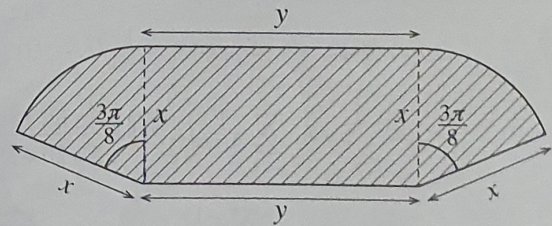
அணுகுகோடுகள், x -வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

இவ்வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $f(x) + |f(x)| > 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(b) இங்கு உள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம்

S ஆனது ஒரு செவ்வகத்தையும் ஒவ்வொன்றும் மையத்தில் கோணம் $\frac{3\pi}{8}$ ஐ எதிரமைக்கும் ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தைக் காட்டுகின்றது. அதன் பரிமாணங்கள் மீற்றரில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளன. S இன் பரப்பளவு 36 m^2 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இன் சுற்றளவு $p \text{ m}$ ஆனது $x > 0$ இற்கு $p = 2x + \frac{72}{x}$ இனால் தரப்படுகின்றது

எனவும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்போது p இழிவு எனவும் காட்டுக.



15. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + Cx^2$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx \text{ ஐக் காண்க.}$$

- (b) $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx$ எனக் கொள்வோம். $I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, I இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

- (c) $\frac{d}{dx}(x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x) = \ln(x^2 + 1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int \ln(x^2 + 1) dx$ ஐக் கண்டு, $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாகவுள்ளபோது பேறு $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ஐப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx \text{ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ எனவும் l ஆனது $ax + by + c = 0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P இனூடான l இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் $(x_1 + at, y_1 + bt)$ இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என உய்த்தறிக.

l ஆனது நேர்கோடு $x + y - 2 = 0$ எனக் கொள்வோம். $A \equiv (0, 6)$, $B \equiv (3, -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் l இன் இரு பக்கங்களிலும் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

l இற்கும் கோடு AB இற்குமிடையே உள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

l ஐத் தொடுவனவும் முறையே A, B ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l இனதும் கோடு AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளி C எனக் கொள்வோம். புள்ளி C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 ஆகியவற்றுக்கு C இனூடாக உள்ள மற்றைய பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தியினூடாகச் செல்வதும் S_1 இன் பரிதியை இருகூறிடுவதும் S_2 இற்கு நிமிர்கோணமானதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$ எனக் காட்டுக.

17. (a) $\cos(A+B)$, $\cos(A-B)$ ஆகியவற்றை $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$, $\sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

$\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ என உய்த்தறிக.

சமன்பாடு $\cos 9x + \cos 7x + \cot x (\cos 9x - \cos 7x) = 0$ ஐத் தீர்க்க.

(b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் கோசைன் நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

$n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம். $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC இல் $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, $\sin 2B = \frac{24}{25}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அத்தகைய இரு வேறுவேறான முக்கோணிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொன்றுக்கும் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.

(c) சமன்பாடு $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ ஐத் தீர்க்க.
