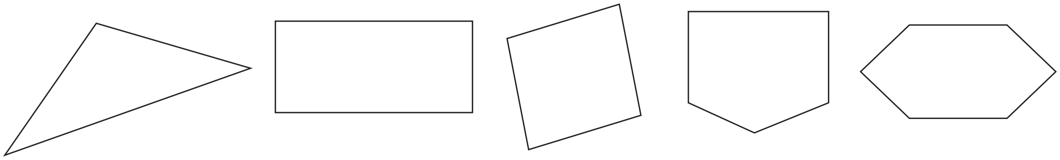
5 ත්‍රිකෝණ අංගසාම්‍යය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට
- තලරූප දෙකක් අංගසම වීම යනු කුමක්දැයි හඳුනා ගැනීමට
- ත්‍රිකෝණ දෙකක් අංගසම වීමේ අවස්ථා හඳුනා ගැනීමට
- ත්‍රිකෝණ අංගසාම්‍යය ඇසුරෙන් අනුමේයයන් සාධනය කිරීමට

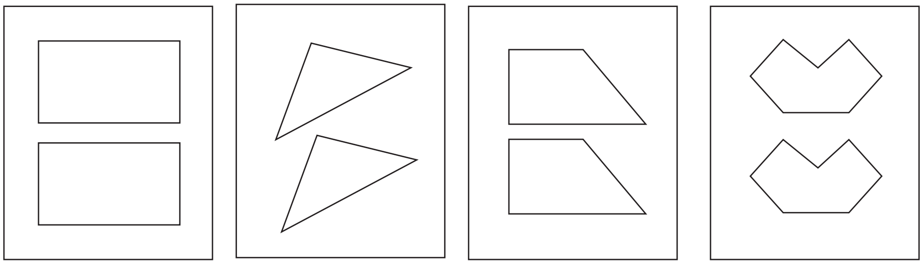
හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

තලරූප දෙකක අංගසාම්‍යය



ඉහත දැක්වෙන රූප සටහන් පරීක්ෂා කිරීමේ දී ඒවා සියල්ල සරල රේඛා ඛණ්ඩවලින් සෑදී ඇති සංවෘත තලරූප බව පැහැදිලි වේ. එවැනි රූප සරල රේඛීය තලරූප ලෙස හැඳින්වේ. කෝණ හා පාදවලට එම රූපවල අංග යැයි කියනු ලැබේ.

පහත (i) සිට (iv) දක්වා රූප සටහන්වල ඉදිරිපත් කර ඇති, හැඩයෙන් හා ප්‍රමාණයෙන් සමාන එක් එක් සරල රේඛීය තලරූප යුගලයෙහි ඇති තලරූප දෙක එකිනෙක සම්පාත කළ හැකි වේ.



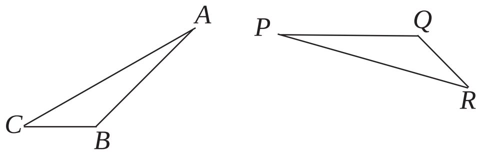
(i) (ii) (iii) (iv)

එකිනෙකට සම්පාත කළ හැකි තලරූප යුගලයක් **අංගසම තලරූප** යුගලයක් ලෙස හැඳින්වේ. මෙම පාඩමේ දී ත්‍රිකෝණ යුගලයක අංගසම වීම පිළිබඳ ව අපගේ අවධානය යොමු කෙරේ.

5.1 ත්‍රිකෝණ දෙකක අංගසාම්‍යය

ත්‍රිකෝණයක අංග හයක් ඇත. ඒවා නම්, පාද තුන සහ කෝණ තුනයි.

පහත දැක්වෙන ABC සහ PQR ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ යැයි සිතමු. එම ත්‍රිකෝණ දෙක එකක් මත එකක් තබා සම්පාත කළහොත් AB සමග PQත් AC සමග PRත් BC සමග QR ත් සම්පාත වේ යැයි ද සිතමු. එවිට, ත්‍රිකෝණ දෙකේ, ABට අනුරූප පාදය PQ ද ACට අනුරූප පාදය PR ද, BCට අනුරූප පාදය QR ද යැයි කියනු ලැබේ. මෙලෙසම $B\hat{A}C$ ට අනුරූප කෝණය $Q\hat{P}R$ ද, $A\hat{B}C$ ට අනුරූප කෝණය $P\hat{Q}R$ ද, $A\hat{C}B$ට අනුරූප කෝණය $P\hat{R}Q$ ද යැයි කියනු ලැබේ.



මේ අනුව, අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

ත්‍රිකෝණ දෙකක් අංගසම වන බව "≡" ලකුණ යොදා දක්වනු ලැබේ. නිදසුනක් ලෙස, ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම නම් ඒ බව $ABC\Delta \equiv PQR\Delta$ මගින් දැක්වේ.

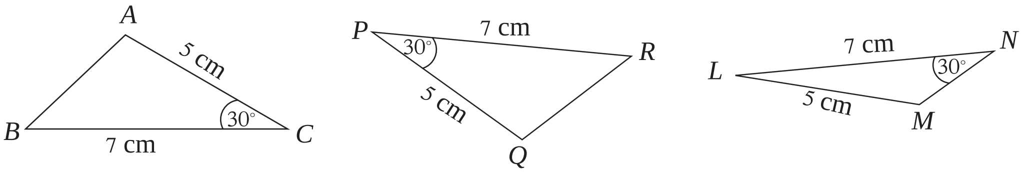
ත්‍රිකෝණ යුගලයක් අංගසම බව පෙන්වීමට ඉහත සඳහන් කරන ලද ආකාරයට, එක් ත්‍රිකෝණයක අංග හය, තවත් ත්‍රිකෝණයක අංග හයට සමාන විය යුතු යැයි පෙන්වීම අවශ්‍යම නොවේ. යම් අංග තුනක් පමණක් සමාන බව පෙන්වීම ප්‍රමාණවත් ය. නමුත් ත්‍රිකෝණයක ඕනෑම අංග තුනක් තවත් ත්‍රිකෝණයක ඕනෑම අංග තුනකට සමාන වූ පමණින් ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම නොවේ. සමහර අවස්ථාවල දී පමණක් ත්‍රිකෝණයක අංග තුනක් තවත් ත්‍රිකෝණයක අංග තුනකට සමාන වූ විට ඉතිරි අංග ද සමාන වී ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ. එවැනි අවස්ථා හතරක් ඇත. එම අවස්ථා හතර පිළිබඳ ව දැන් සලකා බලමු.

(*a*) පළමු අවස්ථාව

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් හා අන්තර්ගත කෝණය තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකකට හා අන්තර්ගත කෝණයට සමාන වන අවස්ථාව

ක්‍රියාකාරකම

පාද දෙකක දිග 5 cm හා 7 cm ද කෝණයක වටිනාකම 30°ක් වන ත්‍රිකෝණ තුනක් පහත දැක්වේ.



- ABC ත්‍රිකෝණය ට්‍රේසිං කඩදාසියක පිටපත් කර කපා ගන්න.
- කපා ගත් ත්‍රිකෝණය PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ සමග සම්පාත වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.
- ඒ අනුව ABC ත්‍රිකෝණයට අංගසම ත්‍රිකෝණය තෝරන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව ABC ත්‍රිකෝණයට අංගසම වන්නේ PQR ත්‍රිකෝණය පමණක් බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත. එසේ නමුත්, ABC ත්‍රිකෝණයේ දී ඇති අංග තුනකට සමාන අංග තුනක් අනෙක් ත්‍රිකෝණ දෙකෙහිම ඇත. නමුත් ABC ත්‍රිකෝණය, PQR ත්‍රිකෝණයට පමණක් අංගසම වී ඇත. එනම් ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි සමාන අංග තුනක් තිබූ පමණින්ම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම නොවන බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත.

ABC ත්‍රිකෝණය, PQR ත්‍රිකෝණයට අංගසම බවත්, එය LMN ත්‍රිකෝණයට අංගසම නැති බවත් හඳුනා ගත හැකි තවත් ක්‍රමයක් පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

ABC ත්‍රිකෝණයේ 30° කෝණය අන්තර්ගත වී ඇත්තේ 5 cm හා 7 cm දිග පාද දෙකටය. PQR ත්‍රිකෝණයේ ද එය එසේම ය. නමුත්, LMN ත්‍රිකෝණයේ 30° කෝණය පිහිටන්නේ එසේ 5 cm හා 7 cm දිග පාද දෙකට අන්තර්ගතව නොවේ. ඒ අනුව ABC ත්‍රිකෝණයේ පාද දෙකක් හා අන්තර්ගත කෝණය PQR ත්‍රිකෝණයේ පාද දෙකකට හා **අන්තර්ගත කෝණයට** සමාන වී ඇත. නමුත්, ABC හා LMN ත්‍රිකෝණ සඳහා එසේ කිව නොහැකි ය. ඒ අනුව ABC හා LMN ත්‍රිකෝණ අංගසම යැයි කීමට ප්‍රමාණවත් කරුණු නොමැත.

සටහන : මෙහි දී 30°ක් වන $A\hat{C}B$ කෝණයට, AC හා BC පාද දෙකෙහි අන්තර්ගත කෝණය යැයි කියනු ලැබේ. එලෙසම, PQR ත්‍රිකෝණයෙහි $R\hat{P}Q$ යනු PR හා PQ පාද දෙකෙහි අන්තර්ගත කෝණයයි.

ඉහත ක්‍රියාකාරකම තුළින් ඔබ අත්දුටු මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රත්‍යක්ෂයක් ලෙස අතීතයේ සිටම ජ්‍යාමිතියේ දී භාවිත වේ.

එක් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් හා අන්තර්ගත කෝණය තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකකට සහ අන්තර්ගත කෝණයට සමාන නම්, එම ත්‍රිකෝණ යුගලය අංගසම වේ.

මෙලෙස ත්‍රිකෝණ යුගලයක් අංගසම වීම, පා.කෝ.පා. අවස්ථාවෙන් අංගසම වීම ලෙස කෙටියෙන් සඳහන් කෙරේ.

ඉහත සඳහන් කරන ලද අවස්ථාවට අනුව, පහත දැක්වෙන ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ යුගලය, දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් අංගසම බව පෙන්වීම පහත පරිදි ලියා දැක්විය හැකි ය.

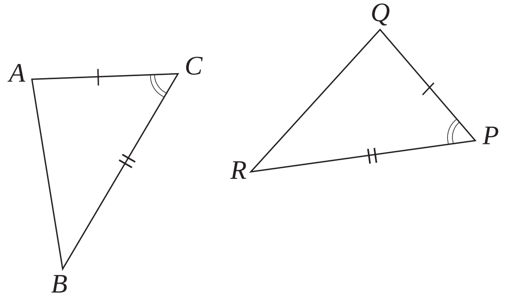
ABC හා PQR ත්‍රිකෝණවල

$AC = QP$ (දී ඇත)

$A\hat{C}B = Q\hat{P}R$ (දී ඇත)

$BC = PR$ (දී ඇත)

$\therefore \underline{\underline{ABC\Delta \equiv PQR\Delta}}$ (පා.කෝ.පා.)

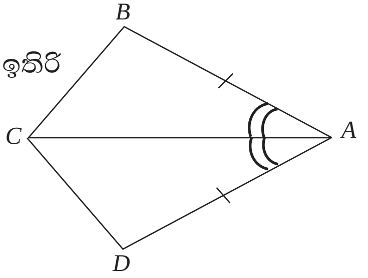


ඉහත ත්‍රිකෝණ යුගලය අංගසම නිසා ඉතිරි අනුරූප අංග ද සමාන වේ.
එනම්,
සමාන බව දන්නා $A\hat{C}B$ හා $Q\hat{P}R$ කෝණ ඉදිරියෙන් ඇති AB හා QR පාද ද සමාන වේ.
සමාන බව දන්නා AC හා PQ පාද ඉදිරියෙන් ඇති $A\hat{B}C$ හා $P\hat{R}Q$ කෝණ ද සමාන වේ.
සමාන බව දන්නා BC හා PR පාද ඉදිරියෙන් ඇති $B\hat{A}C$ හා $P\hat{Q}R$ කෝණ ද සමාන වේ.

දැන් නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

රූපයේ ලකුණු කර ඇති දත්ත අනුව, $ABC\Delta \equiv ACD\Delta$ බව පෙන්වා සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග ලියන්න.



සාධනය:

ABC හා ADC ත්‍රිකෝණවල

$AB = AD$ (දී ඇත)

$B\hat{A}C = D\hat{A}C$ (දී ඇත)

AC පොදු පාදය වේ.

$\therefore ABC\Delta \equiv ADC\Delta$ (පා.කෝ.පා.)

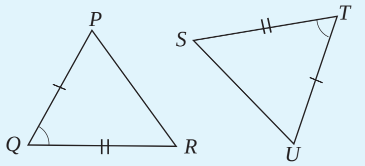
අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore BC = DC$ ද $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ද $A\hat{C}B = A\hat{C}D$ ද වේ.

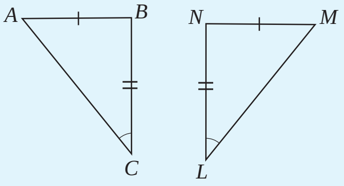
5.1 අභ්‍යාසය

1. දී ඇති දත්ත අනුව අංගසම බව පෙන්වීම සඳහා පා.කෝ.පා. අවස්ථාව යොදා ගත හැක්කේ පහත දැක්වෙන කුමන ත්‍රිකෝණ යුගලවලට දැයි නිර්ණය කරන්න. එවැනි අවස්ථාවල දී අදාළ ත්‍රිකෝණ අංගසම බව සාධනය කර සමාන වන අනෙක් අනුරූප අංග යුගල ලියා දක්වන්න.

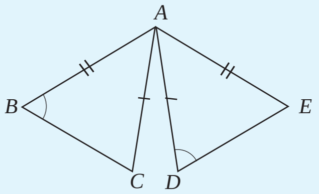
(i)



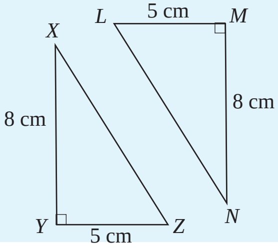
(ii)



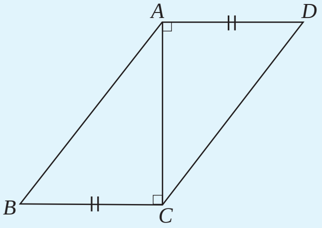
(iii)



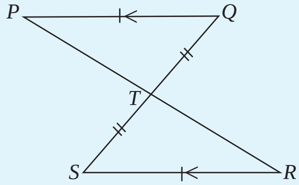
(iv)



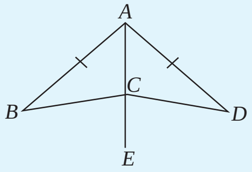
(v)



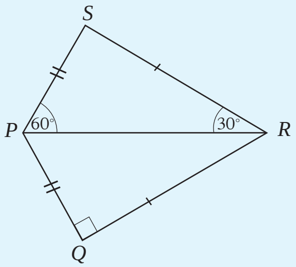
(vi)



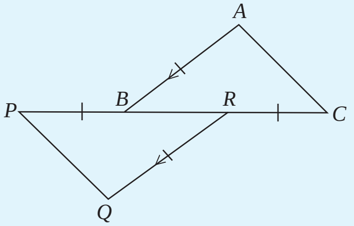
(vii)



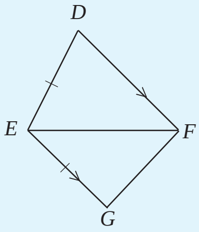
(viii)



(ix)



(x)



2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවට අදාළ ත්‍රිකෝණ යුගලවල දළ සටහන් අඳින්න. එම ත්‍රිකෝණ යුගල අතරින් අංගසම වන ත්‍රිකෝණ යුගල තෝරා, එහි සමාන වන අනෙක් අනුරූප අංග යුගල ලියා දක්වන්න.

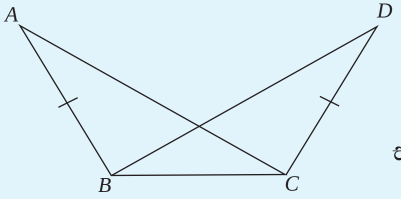
(i) PQR හා XYZ ත්‍රිකෝණවල $PQ = XZ,\ QR = XY,\ P\hat{Q}R = Y\hat{X}Z.$

(ii) ABC හා LMN ත්‍රිකෝණවල $AC = LN,\ BC = LM,\ A\hat{B}C = L\hat{M}N = 50^\circ.$

(iii) DEF හා STU ත්‍රිකෝණවල $EF = TU,\ DF = SU,\ E\hat{F}D = T\hat{U}S.$

(iv) ABC හා PQR ත්‍රිකෝණවල $BC = PQ,\ C\hat{B}A = Q\hat{P}R,\ AC = PR.$

3.



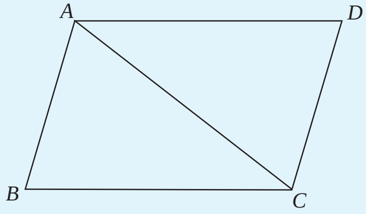
දී ඇති රූපයේ $AB = DC$ හා $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ වේ.

(i) $ABC\Delta \equiv DCB\Delta$ බව

(ii) $AC = BD$ බව

සාධනය කරන්න.

4.



රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AD හා BC පාද දිගින් සමාන වන අතර එම පාද සමාන්තර ද වේ. දී ඇති දත්ත ලකුණු කොට

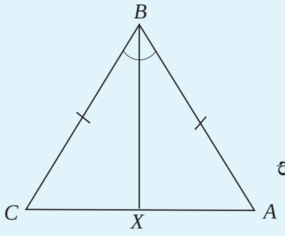
(i) $ABC\Delta \equiv ADC\Delta$ බව

(ii) $AB = DC$ බව

(iii) AB හා DC සමාන්තර බව

සාධනය කරන්න.

5.



ABC ත්‍රිකෝණයේ ලකුණු කර ඇති දත්ත ඇසුරෙන්

(i) $ABX\Delta \equiv CBX\Delta$ බව

(ii) $A\hat{X}B = 90^\circ$ බව

සාධනය කරන්න.

6. *ABCD* චතුරස්‍රයේ *AC* හා *BD* විකර්ණ *O* හි දී එකිනෙක සමච්ඡේද වේ.

(i) $AOD\Delta \equiv BOC\Delta$ බව

(ii) *AD* හා *BC* රේඛා සමාන්තර බව

සාධනය කරන්න.

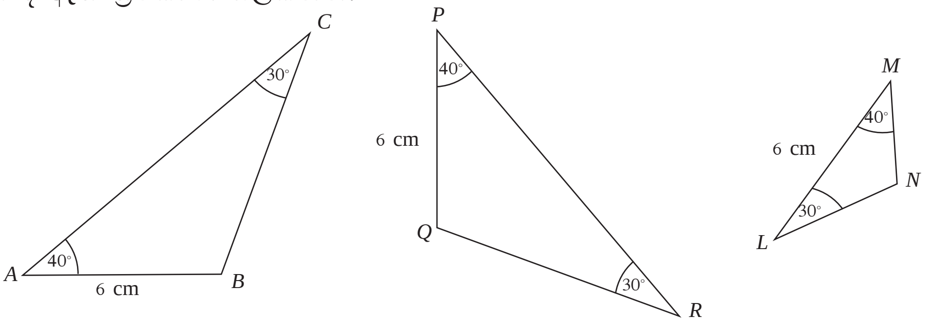
දැන් ත්‍රිකෝණ දෙකක් අංගසම බව හඳුනා ගත හැකි දෙවන අවස්ථාව සලකා බලමු.

(*b*) දෙවන අවස්ථාව

ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් හා පාදයක්, තවත් ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකකට හා අනුරූප පාදයට සමාන වන අවස්ථාව

ක්‍රියාකාරකම

පහත දී ඇති ත්‍රිකෝණ සලකන්න.



- *ABC* ත්‍රිකෝණය ට්‍රෙසිං කඩදාසියක පිටපත් කර ගෙන කපා ගන්න.
- එය *PQR* හා *LMN* ත්‍රිකෝණ මත තබමින් සම්පාත වන්නේ කුමන ත්‍රිකෝණය සමග දැයි පරීක්ෂා කරන්න.
- ඒ අනුව *ABC* ත්‍රිකෝණය අංගසම වන ත්‍රිකෝණය කුමක් ද?

ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව *ABC* ත්‍රිකෝණය අංගසම වන්නේ *PQR* ත්‍රිකෝණයට පමණක් බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

මෙම අවස්ථාවේ දී ත්, ඉහත (a) අවස්ථාවේ දී මෙන්ම *ABC* ත්‍රිකෝණයෙහි ඇති අංග තුනකට සමාන අංග තුනක් අනෙක් ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි ම ඇත.
නමුත් *ABC* ත්‍රිකෝණය *PQR* ත්‍රිකෝණයට අංගසම වී ඇතත් *LMN* ත්‍රිකෝණයට අංගසම නොවේ. එනම් ත්‍රිකෝණයක අංග තුනක් තවත් ත්‍රිකෝණයක අංග තුනකට සමාන වූ පමණින්ම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම නොවන බව තවදුරටත් ඔබට වැටහෙන්නට ඇත.
එසේනම් *ABC* ත්‍රිකෝණය *PQR* ත්‍රිකෝණයට අංගසම වන බව හඳුනාගත හැකි තවත් ක්‍රමයක් විමසා බලමු. *ABC* ත්‍රිකෝණයේ දී ඇති 6 cm දිග පාදය පිහිටා ඇත්තේ, දී ඇති 30° කෝණය ඉදිරියෙන් ය. *PQR* ත්‍රිකෝණයේ ද එය එසේම ය. නමුත්, *LMN* ත්‍රිකෝණයේ එසේ නොවේ. මේ අනුව, *ABC* ත්‍රිකෝණයෙහි කෝණ දෙකක් *PQR* ත්‍රිකෝණයේ කෝණ දෙකකට සමාන වී ඇති අතර, ඊට අමතර ව, *ABC* ත්‍රිකෝණයේ එක් පාදයක් *PQR* ත්‍රිකෝණයේ අනුරූප පාදයට සමාන වී ඇත. නමුත් *LMN* හි අනුරූප පාදයට සමාන වී නොමැත.

සටහන: මෙහි දී, ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි අනුරූප පාද ලෙස හැඳින්වූයේ සමාන වන කෝණ ඉදිරියෙන් ඇති පාදයි.

එක් ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් හා පාදයක් තවත් ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකකට හා අනුරූප පාදයට සමාන වේ නම් එම ත්‍රිකෝණ යුගලය අංගසම වේ. මෙලෙස ත්‍රිකෝණ යුගලයක් අංගසම වීම කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාවෙන් අංගසම වීම ලෙස කෙටියෙන් සඳහන් කෙරේ.

ඉහත අවස්ථාවට අනුව පහත දැක්වෙන *STU* හා *LMN* ත්‍රිකෝණ යුගලය, දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් අංගසම බව පෙන්වන්නේ මෙසේ ය.

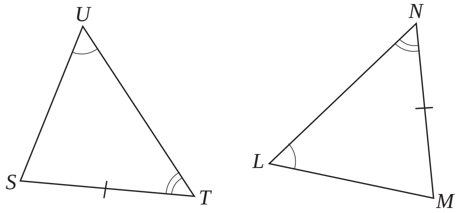
STU හා *LMN* ත්‍රිකෝණවල

$S\hat{T}U = L\hat{N}M$ (දී ඇත)

$T\hat{U}S = M\hat{L}N$ (දී ඇත)

$ST = MN$ (දී ඇත)

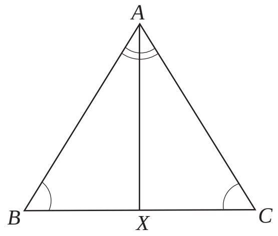
$\therefore STU\,\Delta \equiv LMN\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)



සටහන: ඉහත දී ඇති ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි *ST* හා *MN* අනුරූප පාද වන අතර ඒවා සමාන වේ. ඒවා අනුරූප පාද වන්නේ, සමාන කෝණ වන $S\hat{U}T$ හා $M\hat{L}N$ ඉදිරියෙන් පිහිටන නිසා බව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

නිදසුන 1

රූපයේ ලකුණු කර ඇති දත්ත අනුව, $ABX\,\Delta \equiv ACX\,\Delta$ බව සාධනය කොට සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග ලියන්න.



සාධනය: ABX හා ACX ත්‍රිකෝණවල

$A\hat{B}X = A\hat{C}X$ (දී ඇත)

$B\hat{A}X = C\hat{A}X$ (දී ඇත)

AX පොදු පාදය වේ.

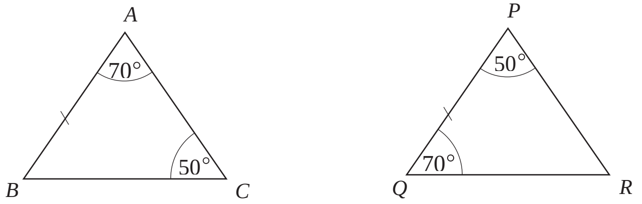
$\therefore ABX\,\Delta \equiv ACX\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore BX = CX,\ A\hat{X}B = A\hat{X}C,\ AB = AC$

නිදසුන 2

පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ යුගලය කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

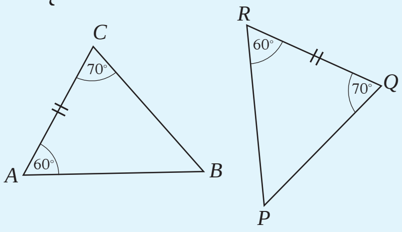


ABC ත්‍රිකොණයේ කෝණ දෙකක්, PQR ත්‍රිකෝණයෙහි කෝණ දෙකකට සමාන වී ඇත. තවද, $AB = PQ$ වේ. නමුත් ඒවා අනුරූප පාද නොවේ. එයට හේතුව, එම පාද ඉදිරියෙන් ඇති ACB හා PRQ කෝණ සමාන නොවීමයි. ($A\hat{C}B = 50^\circ$ වන අතර $P\hat{R}Q = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$ වේ.) එමනිසා මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම යැයි කීමට ප්‍රමාණවත් හේතු නොමැත.

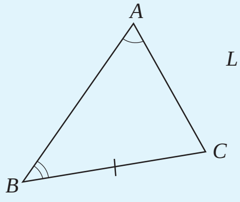
5.2 අභ්‍යාසය

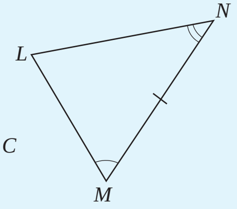
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණ යුගල අතරින් අංගසම බව පෙන්වීම සඳහා කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව යොදා ගත හැක්කේ කුමන ත්‍රිකෝණ යුගලවලටදැයි සඳහන් කරන්න. එම ත්‍රිකෝණ යුගල අංගසම බව සාධනය කොට සමාන වන අනුරූප අංග ලියා දක්වන්න.

(i)

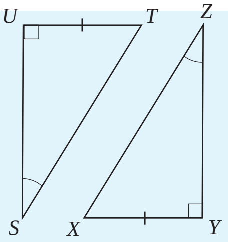


(ii)

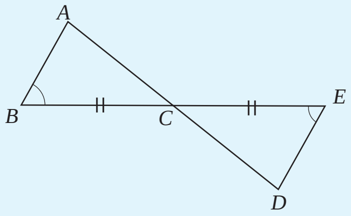




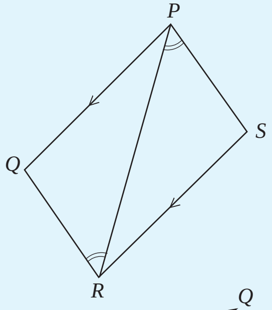
(iii)



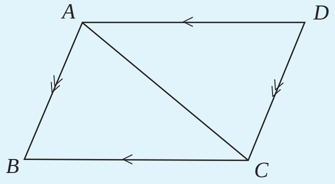
(iv)



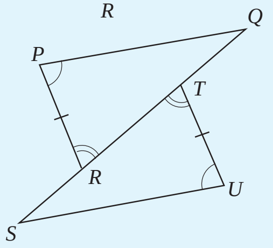
(v)



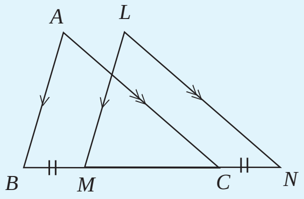
(vi)



(vii)



(viii)



2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවට අදාළ ත්‍රිකෝණයේ දළ සටහනක් අඳින්න. කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වන ත්‍රිකෝණ යුගලය තෝරා ඒවායේ සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග ලියා දක්වන්න.

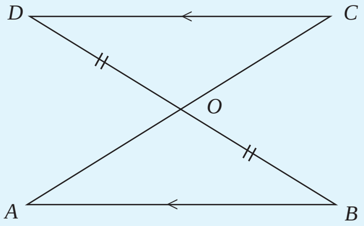
(i) ABC හා PQR ත්‍රිකෝණවල $A\hat{B}C = P\hat{Q}R$, $A\hat{C}B = P\hat{R}Q$, $BC = QR$

(ii) XYZ හා LMN ත්‍රිකෝණවල $X\hat{Y}Z = L\hat{M}N = 90^\circ$, $Y\hat{X}Z = 30^\circ$, $M\hat{N}L = 60^\circ$, $YZ = MN$

(iii) STU හා PQR ත්‍රිකෝණවල $T\hat{S}U = Q\hat{R}P$, $TU = PR$, $T\hat{U}S = P\hat{Q}R$

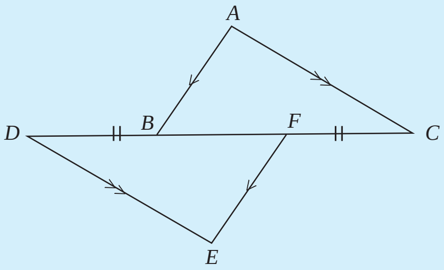
(iv) DEF හා ABC ත්‍රිකෝණවල $E\hat{D}F = B\hat{A}C = 40^\circ$, $D\hat{F}E = A\hat{C}B = 60^\circ$, $DE = BA$

3.

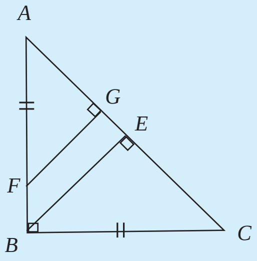


දී ඇති රූපයේ AB සහ CD රේඛා සමාන්තර වේ. $BO = OD$ ද වේ. $AOB\,\Delta \equiv DOC\,\Delta$ බව පෙන්වන්න.

4. AB හා EF රේඛා සහ AC හා DE රේඛා යුගල එකිනෙකට සමාන්තර වේ.
$ABC\Delta \equiv EFD\Delta$ බව පෙන්වන්න.



5. ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 90^\circ$ වේ.
$AF = BC$ වේ නම්,
$AFG\Delta \equiv BCE\Delta$ බව සාධනය කරන්න.



6. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ වේ. BD මගින් $A\hat{D}C$ හා $A\hat{B}C$ සමච්ඡේදනය වේ.
$ABD\Delta \equiv CBD\Delta$ බව සාධනය කරන්න.

ත්‍රිකෝණ දෙකක අංගසම බව හඳුනා ගත හැකි තුන්වන අවස්ථාව සලකා බලමු.

(c) තුන්වන අවස්ථාව

එක් ත්‍රිකෝණයක පාද තුන, තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද තුනට සමාන වන අවස්ථාව

ත්‍රිකෝණයක පාද තුනෙහි දිග දී ඇති විට අනන්‍ය ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කළ හැකි වේ ද? එසේ හැකිදැයි පසක් කර ගැනීමට පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි නියැලෙන්න.

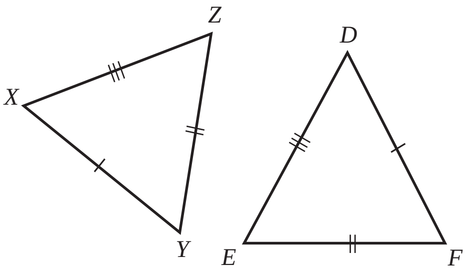
ක්‍රියාකාරකම

දිග සෙන්ටිමීටර 5ක්, 6ක්, හා 7ක් වන ඉරටු කැබලි දෙක බැගින් කඩා ගන්න. ඒවා භාවිතයෙන්, පාදවල දිග සෙන්ටිමීටර 5, 6 හා 7 බැගින් වන ත්‍රිකෝණ දෙකක් තනන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම විය යුතු බව ඔබට පෙනෙනවා ද? එක් ත්‍රිකෝණයක ඇති ඉරටු කැබලිවල පිහිටීම් වෙනස් කරමින්, අනෙක් ත්‍රිකෝණයට අංගසම නොවන ත්‍රිකෝණයක් ඔබට නිර්මාණය කළ හැකි ද? එසේ කළ නොහැකි බවට ඔබට පසක් වනු ඇත.

ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව ඔබ අත්දුටු මෙම ප්‍රතිඵලය ද ප්‍රත්‍යක්ෂයක් ලෙස ජ්‍යාමිතියේ දී භාවිත කළ හැකි ය.

ත්‍රිකෝණයක පාද තුන තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද තුනට සමාන වන්නේ නම්, එම ත්‍රිකෝණ යුගලය අංගසම වේ. මෙලෙස ත්‍රිකෝණ යුගලයක් අංගසම වීම පා.පා.පා. අවස්ථාවෙන් අංගසම වීම ලෙස කෙටියෙන් සඳහන් කෙරේ.

XYZ හා DEF ත්‍රිකෝණ යුගලය ඉහත අවස්ථාවට අනුව අංගසම වන බව පහත පරිදි සාධනය කොට දැක්විය හැකි ය.



XYZ හා DFE ත්‍රිකෝණවල

$XY = DF$ (දී ඇත)

$YZ = FE$ (දී ඇත)

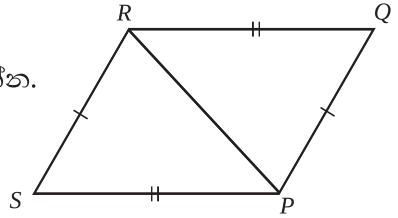
$ZX = ED$ (දී ඇත)

$\therefore XYZ\,\Delta \equiv DFE\,\Delta$ (පා.පා.පා.)

නිදසුන 1

රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව

$PQR\,\Delta \equiv PSR\,\Delta$ බව සාධනය කර ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග ලියන්න.



සාධනය:

PQR හා PSR ත්‍රිකෝණවල

$PQ = RS$ (දී ඇත)

$QR = PS$ (දී ඇත)

PR පොදු පාදය වේ.

$\therefore PQR\,\Delta \equiv RSP\,\Delta$ (පා.පා.පා.)

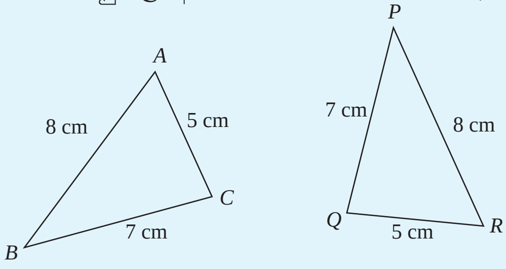
අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore R\hat{S}P = P\hat{Q}R,\ S\hat{R}P = Q\hat{P}R,\ S\hat{P}R = Q\hat{R}P$ වේ.

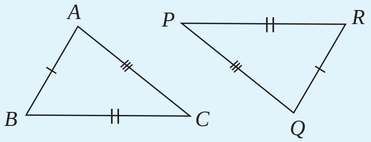
5.3 අභ්‍යාසය

1. දී ඇති දත්ත අනුව අංගසම බව පෙන්වීම සඳහා පා.පා.පා. අවස්ථාව යොදා ගත හැක්කේ පහත දැක්වෙන කුමන ත්‍රිකෝණ යුගලවලට දැයි නිර්ණය කරන්න. එවැනි ත්‍රිකෝණ යුගල අංගසම බව සාධනය කර, සමාන වන අනුරූප අංග ලියා දක්වන්න.

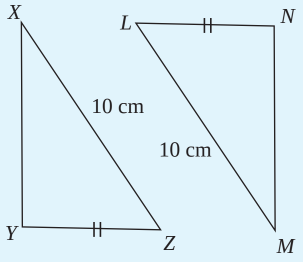
(i)



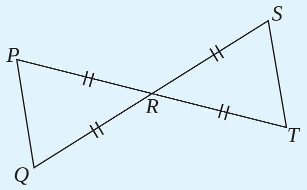
(ii)



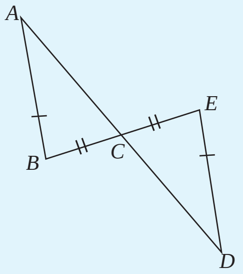
(iii)



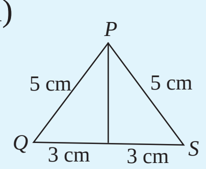
(iv)



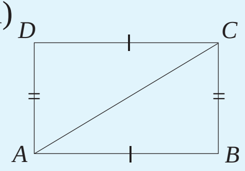
(v)



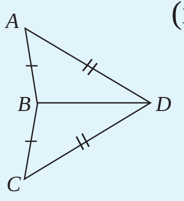
(vi)



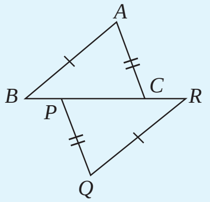
(vii)



(viii)



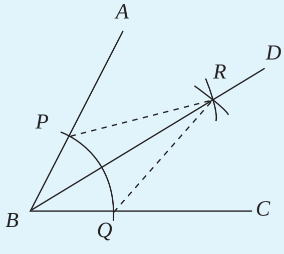
(ix)



2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාව සඳහා ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් අදාළ ත්‍රිකෝණයේ දළ සටහනක් අඳින්න. පා.පා.පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වන ත්‍රිකෝණ යුගල (ඇත්නම්) තෝරා, ඒවායේ සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග ලියා දක්වන්න.

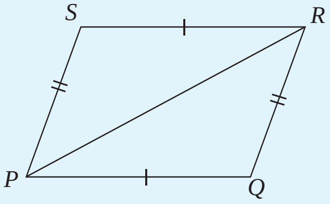
PQR ත්‍රිකෝණයේ $PQ = 4$ cm, $QR = 6$ cm, $RP = 5$ cm
XYZ ත්‍රිකෝණයේ $XY = 6$ cm, $YZ = 8$ cm, $ZX = 10$ cm
LMN ත්‍රිකෝණයේ $LM = 5$ cm, $NM = 4$ cm, $NL = 6$ cm
DEF ත්‍රිකෝණයේ $DE = 8$ cm, $EF = 10$ cm, $FD = 6$ cm
ABC ත්‍රිකෝණයේ $BC = 8$ cm, $CA = 7$ cm, $AB = 9$ cm
STU ත්‍රිකෝණයේ $ST = 9$ cm, $TU = 7$ cm, $SU = 5$ cm

3.



ශිෂ්‍යයකු රූපයේ දැක්වෙන ABC කෝණය සමච්ඡේද කිරීම සඳහා කේන්ද්‍රය වශයෙන් B ලක්ෂ්‍යය තෝරා ගෙන චාපයක් අඳියි. එමගින් AB හා BC බාහු ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q ලෙස නම් කෙරේ. P හා Q සිට සමාන දිගක් සහිත චාප දෙකක් R හි දී එකිනෙක ඡේදනය වන සේ අඳියි. $P\hat{B}R = Q\hat{B}R$ බව සාධනය කරන්න.

4.



$PQRS$ චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද දිගින් සමාන වේ.
(i) $PSR\,\Delta \equiv RQP\,\Delta$ බව
(ii) $P\hat{S}R = P\hat{Q}R$ බව
(iii) සම්මුඛ පාද සමාන්තර බව සාධනය කරන්න.

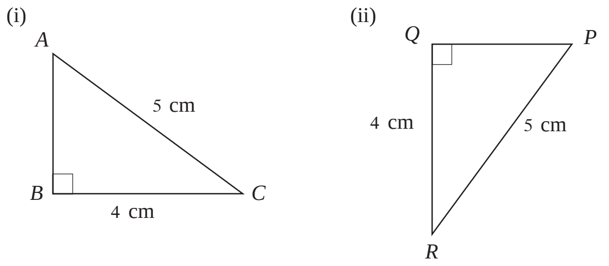
5. සමපාද ත්‍රිකෝණයක එක් ශීර්ෂයක සිට ඊට සම්මුඛ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඇඳි රේඛාව, එම සම්මුඛ පාදයට ලම්බක බව සාධනය කරන්න.

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගලයක් අංගසම බව හඳුනා ගත හැකි විශේෂ අවස්ථාවක් සලකා බලමු.

(*d*) හතරවන අවස්ථාව

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය සහ පාදයක් වෙනත් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයට සහ පාදයට සමාන වන අවස්ථාව

කර්ණයේ දිග 5 cm ද තවත් පාදයක දිග 4 cm ද වන පරිදි අඳිනු ලැබූ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගලයක් පහතින් පෙන්නුම් කෙරේ.

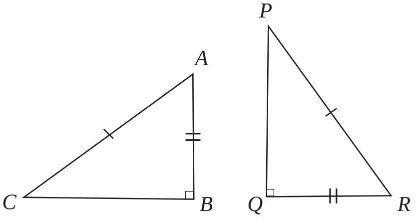


ක්‍රියාකාරකම

(i) රූපයේ දැක්වෙන ත්‍රිකෝණය ට්‍රේෂ් කඩදාසියක පිටපත් කර ගෙන එය (ii) රූපයේ දැක්වෙන ත්‍රිකෝණය සමඟ සම්පාත වන්නේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න. එම ත්‍රිකෝණ අංගසම වන බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගලයක, සමාන වන අංග දෙකක් ඇසුරෙන් අංගසම බව පහත ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය සහ පාදයක් වෙනත් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයට සහ පාදයකට සමාන වේ නම්, එම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ. මෙලෙස සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගලයක් අංගසම වීම කර්ණ පා. අවස්ථාවෙන් අංගසම වීම ලෙස කෙටියෙන් සඳහන් කෙරේ.

පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ දෙක, දී ඇති තොරතුරු අනුව, අංගසම වන බව සාධනය කරමු.



ABC හා PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල

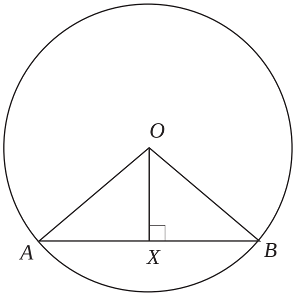
$AC = PR$ (දී ඇත)

$AB = QR$ (දී ඇත)

$\therefore ABC\Delta \equiv PQR\Delta$ (කර්ණ පා.)

ඉහත ත්‍රිකෝණ යුගලය අංගසම නිසා ඉතිරි අනුරූප අංග ද සමාන වේ. එනම්,
$BC = PQ,\ B\hat{A}C = P\hat{R}Q,\ A\hat{C}B = Q\hat{P}R$ වේ.

නිදසුන 1



රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව $OXA\Delta \equiv OXB\Delta$ බව පෙන්වා ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග යුගල ලියා දක්වන්න.

සාධනය :

OXA හා OXB සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල

$OA = OB$ (වෘත්තයේ අර)

OX පොදු පාදය වේ.

$\therefore OXA\Delta \equiv OXB\Delta$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

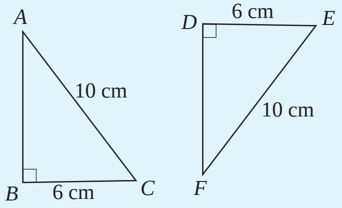
අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore O\hat{A}X = O\hat{B}X,\ AX = BX,\ A\hat{O}X = B\hat{O}X$

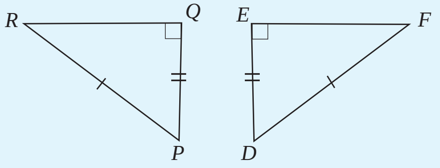
5.4 අභ්‍යාසය

1. දී ඇති දත්ත අනුව අංගසම බව පෙන්වීම සඳහා කර්ණ පා. අවස්ථාව යොදා ගත හැක්කේ පහත දැක්වෙන කුමන ත්‍රිකෝණ යුගලවලට දැයි නිර්ණය කරන්න. එවැනි අවස්ථාවල දී අදාළ ත්‍රිකෝණ යුගල අංගසම බව සාධනය කර, සමාන වන ඉතිරි අංග ලියා දක්වන්න.

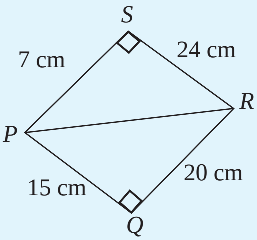
(i)



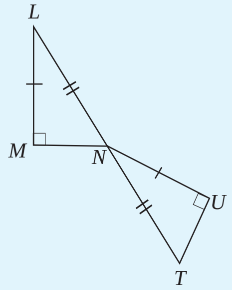
(ii)



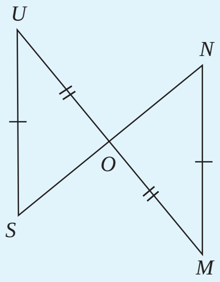
(iii)



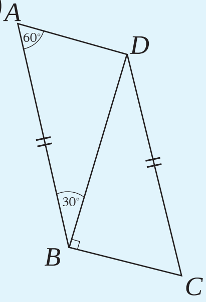
(iv)



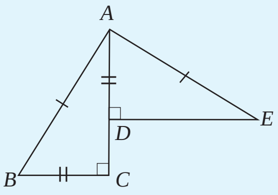
(v)



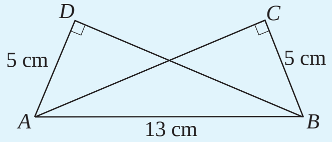
(vi)



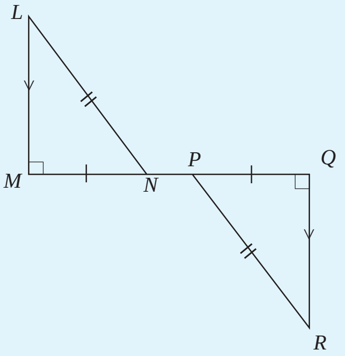
(vii)



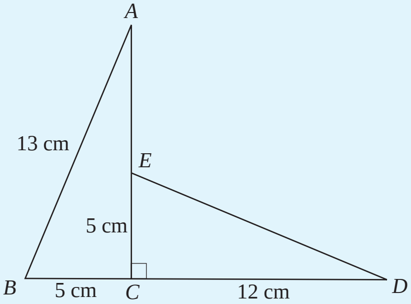
(viii)



(ix)



(x)



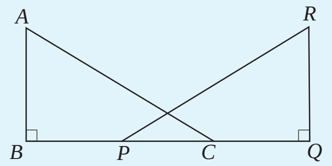
2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවට අදාළ ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න. කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වන ත්‍රිකෝණ යුගල ඇත්නම් ඒවා තෝරා ඒවායේ සමාන වන ඉතිරි අනුරූප අංග ලියා දක්වන්න.

(i) ABC හා PQR ත්‍රිකෝණවල $A\hat{B}C = P\hat{Q}R = 90^\circ$, $AC = PR = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $QP = 4$ cm

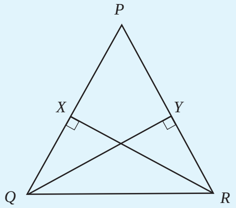
(ii) LMN හා XYZ ත්‍රිකෝණවල $L\hat{M}N = X\hat{Y}Z = 90^\circ$, $LM = XY$, $MN = YZ$

(iii) DEF හා PQR ත්‍රිකෝණවල $D\hat{E}F = P\hat{Q}R = 90^\circ$, $DF = PR$, $F\hat{D}E = 20^\circ$, $P\hat{R}Q = 70^\circ$, $EF = PQ$

(iv) ABD හා ABC ත්‍රිකෝණවල $A\hat{D}B = A\hat{C}B = 90^\circ$, $AD = CB$

3. 

දී ඇති රූපයේ $AC = PR$ ද $AB = RQ$ ද වේ නම් $BP = CQ$ බව පෙන්වන්න.

4. 

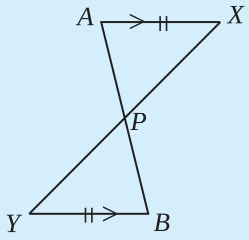
රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ Q හා R ලක්ෂ්‍යවල සිට පිළිවෙළින් RPට හා QPට ඇඳි QY හා RX ලම්බක දිගින් සමාන වේ.

(i) $XQR\,\Delta \equiv YRQ\,\Delta$ බව

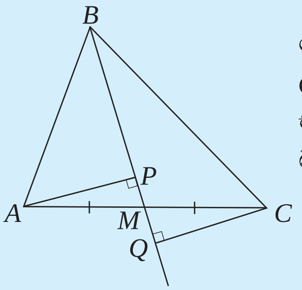
(ii) $X\hat{R}Q = Y\hat{Q}R$ බව

සාධනය කරන්න.

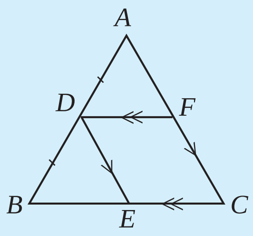
මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. 

රූපයේ $AX//YB$ හා $AX = YB$ වේ. AB හා YX රේඛා P හි දී එකින් එක සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

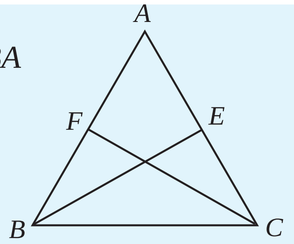
2. 

රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයෙහි AC පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M වේ. BM රේඛාවට A සිට ඇඳි ලම්බය AP ද C සිට දික්කළ BMට ඇඳි ලම්බය CQ ද වේ. $AMP\,\Delta \equiv CMQ\,\Delta$ බව පෙන්වන්න.

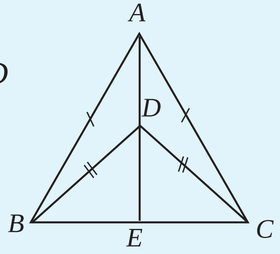
3. 

රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව $ADF\,\Delta \equiv DBE\,\Delta$ බව පෙන්වන්න.

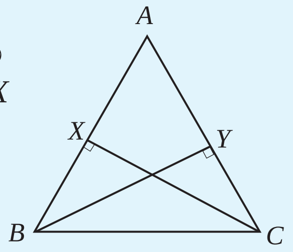
4. රූපයේ දැක්වෙන්නේ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. AC හා BA පාදවල මධ්‍යලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙලින් E හා F වේ.
   (i) AB හා FC ලම්බක බව
   (ii) AC හා BE ලම්බක බව
   (iii) $CF = BE$ බව
   පෙන්වන්න.



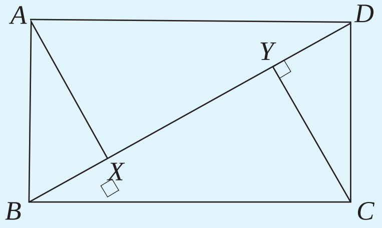
5. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = AC$ වන අතර D යනු $BD = CD$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. දික්කළ AD රේඛාවට BC පාදය E හිදී හමුවේ.
   (i) $ABD\,\Delta \equiv ACD\,\Delta$ බව
   (ii) $BAE\,\Delta \equiv CAE\,\Delta$ බව
   (iii) AE හා BC ලම්බක බව
   සාධනය කරන්න.



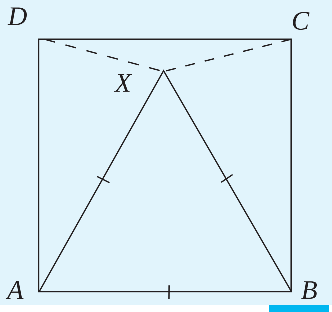
6. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ B හා C ශීර්ෂවල සිට AC හා AB පාදවලට ඇඳි ලම්බක පිළිවෙලින් BY හා CX වේ. $BY = CX$ වේ නම්
   (i) $AB = AC$ බව
   (ii) $X\hat{B}C = Y\hat{C}B$ බව
   පෙන්වන්න.



7. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ BD විකර්ණය මතට A හා C සිට ඇඳි ලම්බවල අඩි පිළිවෙලින් X හා Y වේ.
   (i) $AXD\,\Delta \equiv BYC\,\Delta$ බව
   (ii) $AX = CY$ බව
   (iii) $BX = DY$ බව
   (iv) $YDC\,\Delta \equiv XBA\,\Delta$ බව
   සාධනය කරන්න.



8. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමචතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තරව X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ XAB සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන පරිදි ය.
   (i) $AXD\,\Delta \equiv CBX\,\Delta$ බව
   (ii) DXC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව
   සාධනය කරන්න.



9. *ABCD* සමචතුරස්‍රයේ *BC* හා *DC* පාද මත සමචතුරස්‍රයට පිටතින් *BCF* හා *DCE* සමපාද ත්‍රිකෝණ ඇඳ ඇත.

(i) ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

(ii) $EDA\Delta \equiv FBA\Delta$ බව

(iii) *EAF* ත්‍රිකෝණය සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

පෙන්වන්න.

10. *ABC* ත්‍රිකෝණයේ *BC* පාදයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය *AE* වේ. මෙහි *D* යනු *AE* මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

(i) $ABE\Delta \equiv ACE\Delta$ බව

(ii) $BDE\Delta \equiv CDE\Delta$ බව

(iii) $ABD\Delta \equiv ACD\Delta$ බව

සාධනය කරන්න.

11. *ABCDE* යනු සවිධි පංචාස්‍රයකි.

(i) $ABC\Delta \equiv AED\Delta$ බව

(ii) *A* සිට *CD*ට ඇඳි ලම්බකයේ අඩිය *X* වේ නම් $CX = XD$ බව

පෙන්වන්න.