19 ලඝුගණක I

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

ලඝුගණක ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත්මක ප්‍රකාශන සුළු කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

දර්ශක

2, හතර වාරයක් ගුණ කිරීම 2^4 ලෙස ලියා දැක්වේ.
එනම්, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
එබැවින් 2^4 හි අගය 16 වේ.

ඒ ආකාරයට ම, $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.

2^4, 3^3 ආදී ප්‍රකාශන බල ලෙස හැඳින්වේ. 2^4 හි පාදය 2 වන අතර, දර්ශකය 4 වේ. ඔබ දර්ශක පිළිබඳ ව මෙතෙක් උගත් කරුණු පුනරීක්ෂණය සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත A කොටුව තුළ ඇති එක් එක් පදයට සමාන පදය B කොටුව තුළින් තෝරා යා කරන්න.

A	**B**
$a \times a$	5^{-1}
a^{-2}	$a \times a \times b \times b$
a	5^5
a^2b^2	$\frac{a}{b}$
5^1	a^2
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{a^2}$
x°	1
$5^3 \times 5^2$	a^1
ab^{-1}	5

2. හිස්තැන් පුරවන්න.

(i) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^{\cdots}} = 2^{\cdots}$ (ii) $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^{\cdots}} = 10^{\cdots}$ (iii) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^{\cdots}} = 5^{\cdots}$

(iv) $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^{\cdots}} = 3^{\cdots}$ (v) $0.01 = \frac{1}{\cdots} = \frac{1}{10^{\cdots}} = \cdots$ (vi) $0.001 = \frac{1}{\cdots} = \frac{1}{\cdots} = \cdots$

3. සුළු කරන්න.

(i) $a^2 \times a^3$ (ii) $x^5 \times x$ (iii) $\frac{x^5 \times x^7}{x^{11}}$

(iv) $\frac{a^3 \times a^5}{a^2 \times a^6}$ (v) $\frac{p^3 \times p^{-1}}{p}$ (vi) $\frac{x^{\circ} \times x^5}{x}$

4. සුළු කර අගය සොයන්න.

(i) $2^2 \times 2^3$ (ii) $\frac{3^7}{3^4}$ (iii) $\frac{3^2 \times 3^8}{3^5}$

(iv) $\frac{5^3 \times 5^0}{5}$ (v) $\frac{10^2 \times 10^3}{10 \times 10^4}$ (vi) $\frac{2^5 \times 2^3}{2^6 \times 2^2}$

19.1 ලඝුගණක

දර්ශක භාවිතයෙන් සුළු කිරීම් පහසුවෙන් කර ගන්නා ආකාරය පිළිබඳ ව සලකා බලමු. ඒ සඳහා පහත දැක්වෙන 2 හි බල සහිත වගුව යොදා ගනිමු.

2 හි බලය	2°	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
අගය	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

වගුව භාවිතයෙන්, $\frac{64 \times 512}{128}$ හි අගය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

මුලින් ම, මෙම සංඛ්‍යා එක ම පාදයේ බල ලෙස ලියමු.

$$\frac{64 \times 512}{128} = \frac{2^6 \times 2^9}{2^7} \quad \text{(වගුව අනුව)}$$

$$= 2^{6+9-7} \quad \text{(දර්ශක නීති අනුව)}$$

$$= 2^8$$

$$= \underline{\underline{256}} \quad \text{(වගුව අනුව)}$$

දර්ශක නීති භාවිතයෙන් ඉහත සුළු කිරීම පහසුවෙන් හා කෙටියෙන් කර ඇති බව පෙනේ. මෙම නිදසුනෙහි ඇති සංඛ්‍යා, 2 හි බල ලෙස ලිවිය හැකි විය. ලඝුගණක වගු භාවිතයෙන් ඕනෑ ම ආකාරයක සංඛ්‍යාවල ගුණිත හා බෙදීම් අඩංගු ප්‍රකාශන පහසුවෙන් සුළු කළ හැකි ය. 'ලඝු' යන්නෙන් 'කෙටි' යන්න අර්ථවත් වේ. මුලින්ම ලඝුගණක වගු හඳුන්වා දීමේ

ගෞරවය ඉංග්‍රීසි ජාතික ජෝන් නේපියර් (ක්‍රි.ව. 1550 - 1617) නමැති ගණිතඥයාට හිමි වේ. ඔහුගේ සමකාලිනයෙකු වූ හෙන්රි බ්‍රිග්ස් නැමැති ගණිතඥයා ක්‍රි.ව. 1615 දී ලඝුගණක වගු තවදුරටත් සංවර්ධනය කර ඉදිරිපත් කළේ ය. ගණක යන්ත්‍ර භාවිතය නිසා නූතන යුගයේ දී ලඝුගණක වගු භාවිතය ඉතා අල්ප වී ඇතත් ඒ හා සම්බන්ධ ගණිතමය සංකල්ප හැදෑරීම ඉතා වැදගත් මෙන්ම අපූර්වත්වයෙන් ද යුක්ත වේ.

දර්ශක ආකාරය හා ලඝුගණක ආකාරය

$2^3 = 8$ වන බව අපි දනිමු. එහි 8 යන්න 2 හි පාදයට දර්ශකයකින් දක්වා ඇත. මෙවැනි ප්‍රකාශන දර්ශක ආකාරයේ ප්‍රකාශන ලෙස හැඳින්වේ. එය දෙකේ පාදයට 8 හි ලඝුගණකය 3 ලෙස ද ප්‍රකාශ කෙරේ.
එවිට එය $\log_2 8 = 3$ ලෙස ලියා දක්වනු ලැබේ.

$\log_2 8 = 3$ යන්න '**ලඝුගණක ආකාරය**'ලෙස හැඳින්වේ.
දර්ශක හා ලඝුගණක ආකාරවලින් එකම ප්‍රකාශය දෙයාකාරයකට ලියා දැක්වීම සිදු කෙරෙන බව දැන් ඔබට වැටහෙන්නට ඇත.

මේ අනුව $2^3 = 8$ නිසා එවිට $\log_2 8 = 3$.
එලෙස ම $\log_2 8 = 3$ නිසා එවිට $2^3 = 8$.
තවත් නිදසුන් කිහිපයක් සලකා බලමු.

- $3^2 = 9$ නිසා තුනේ පාදයට 9 හි ලඝුගණකය 2 වේ. එනම්, $\log_3 9 = 2$.
- $5^1 = 5$ නිසා පහේ පාදයට 5 හි ලඝුගණකය 1 වේ. එනම්, $\log_5 5 = 1$.
- $10^3 = 1000$ නිසා දහයේ පාදයට 1000 හි ලඝුගණකය 3 වේ. එනම්, $\log_{10} 1000 = 3$.

මෙය පොදුවේ, a ධන සංඛ්‍යාවක් වන විට

$\boxed{a^x = N \text{ නම් } \log_a N = x}$ හෝ $\boxed{\log_a N = x \text{ නම් } a^x = N}$

ලෙස දැක්විය හැකි ය.

$a^x = N$ දර්ශක ආකාරය ලෙසත් $\log_a N = x$ ලඝුගණක ආකාරය ලෙසත් සැලකේ. මෙහි a හා N ධන අගය පමණක් ගනු ලැබේ (ධන සංඛ්‍යාවක ඕනෑම බලයක් ධන වන නිසා ඉහත සම්බන්ධයේ a ධන වන විට N ද ධන සංඛ්‍යාවක් වේ). මේ අනුව ලඝුගණක සැලකීමේ දී සෑම විට ම පාදය ධන වූ සංඛ්‍යා පමණක් ගනු ලැබේ.
ලඝුගණකවල ගුණ කිහිපයක් දැන් හඳුනා ගනිමු.

(i) ඕනෑ ම පාදයක් යටතේ, එම පාදයේ ලඝුගණකය 1 වේ.
එනම්, $\log_a a = 1$
මෙයට හේතුව $a^1 = a$ වීම යි.
නිදසුන් ලෙස, $\log_2 2 = 1$ හා $\log_{10} 10 = 1$.

(ii) ඕනෑම පාදයකට (1 හැර), 1 හි ලඝුගණකය 0 වේ.
එනම්, $\log_a 1 = 0$
මෙයට හේතුව $a^0 = 1$ වීම යි.
නිදසුන් ලෙස $\log_2 1 = 0$ හා $\log_{10} 1 = 0$.

ලඝුගණක ලෙස ධන අගයක් ලැබෙන නිදසුන් පමණක් අපි මෙතෙක් දුටුවෙමු. එහෙත් ලඝුගණක සඳහා සෘණ අගයන් ද තිබිය හැකි ය. එකට අඩු වන සංඛ්‍යාවක ලඝුගණකය සෑම විට ම සෘණ වේ.
නිදසුන් ලෙස

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} \text{ නිසා } \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3.$$

$$0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2} \text{ නිසා } \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2.$$

$$0.5 = \frac{5}{10} = 2^{-1} \text{ නිසා } \log_2(0.5) = -1.$$

දැන් අපි ලඝුගණක අඩංගු සමීකරණ විසඳන ආකාරය විමසා බලමු.

නිදසුන 1

එක් එක් අවස්ථාවේ දී x මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

(i) $\log_2 64 = x$ (ii) $\log_x 81 = 4$ (iii) $\log_5 x = 2$

(i) $\log_2 64 = x$

$2^x = 64$ (දර්ශක ආකාරය)

$2^x = 2^6$

$\therefore \underline{\underline{x = 6}}$

(ii) $\log_x 81 = 4$

$x^4 = 81$

$x^4 = 3^4$

$x = \pm 3$

$x = +3$ හෝ -3

ලඝුගණක පාදය සෘණ නොවන නිසා

$\underline{\underline{x = +3}}$

(iii) $\log_5 x = 2$

$x = 5^2$

$\underline{\underline{x = 25}}$

19.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනය ලඝුගණක ආකාරයෙන් දක්වන්න.
   (i) 2 පාදයට 32 හි ලඝුගණකය 5 වේ.
   (ii) 10 පාදයට 1000 හි ලඝුගණකය 3 වේ.
   (iii) 5 පාදයට x හි ලඝුගණකය y වේ.
   (iv) p පාදයට q හි ලඝුගණකය r වේ.
   (v) q පාදයට r හි ලඝුගණකය p වේ.

2. දර්ශක ආකාරයෙන් දක්වන්න.
   (i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_{10} 100\,000 = 5$ (iii) $\log_a x = y$
   (iv) $\log_p a = q$ (v) $\log_a 1 = 0$ (vi) $\log_m m = 1$

3. ලඝුගණක ආකාරයෙන් දක්වන්න.
   (i) $2^8 = 256$ (ii) $10^4 = 10\,000$ (iii) $7^3 = 343$
   (iv) $20^2 = 400$ (v) $a^x = y$ (vi) $p^a = q$

4. පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ x හි අගය සොයන්න.
   (i) $\log_3 243 = x$ (ii) $\log_{10} 100 = x$ (iii) $\log_6 216 = x$
   (iv) $\log_x 25 = 2$ (v) $\log_x 64 = 6$ (vi) $\log_x 10 = 1$
   (vii) $\log_3 x = 2$ (viii) $\log_{10} x = 4$ (ix) $\log_8 x = 2$

5. (i) 64 එකිනෙකට වෙනස් පාද යටතේ වූ බල ලෙස ආකාර හතරකින් දක්වන්න
   (ii) $\log_x 64 = y$ හි xට හා yට ගැළපෙන අගය යුගල හතරක් සොයන්න.

19.2 ලඝුගණක නීති

16×32 හි අගය, දර්ශක ආකාරයෙන් ලියා ලබා ගත හැකි අයුරු නැවත මතක් කර ගනිමු.

$16 \times 32 = 2^4 \times 2^5$ (දෙකේ බල ලෙස දැක්වීම)

$= 2^{4+5}$ (දර්ශක නීති භාවිතය)

$= 2^9$

මෙහි $16 \times 32 = 2^{4+5}$ යන්න සලකා බලමු.
එය ලඝුගණක ආකාරයට හරවමු.

$16 \times 32 = 2^{4+5}$ (දර්ශක ආකාරය)

$\therefore \log_2(16 \times 32) = 4+5$ (ලඝුගණක ආකාරය)

$= \log_2 16 + \log_2 32$ ($4 = \log_2 16$ හා $5 = \log_2 32$ නිසා)

එලෙස ම, $27 \times 81 = 3^3 \times 3^4 = 3^{3+4}$ නිසා

$\log_3(27 \times 81) = 3+4$

$= \log_3 27 + \log_3 81$ ($3 = \log_3 27$ හා $4 = \log_3 81$ නිසා)

මේ ආකාරයට ම, $\log_{10}(10 \times 100) = \log_{10} 10 + \log_{10} 100$

$\log_5(125 \times 25) = \log_5 125 + \log_5 25$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

බල ගුණ කිරීමේ දී ලඝුගණකවල හැසිරීම පිළිබඳ වැදගත් ලක්ෂණයක් මින් පැහැදිලි වේ. එම ලක්ෂණය පොදුවේ ඕනෑ ම බල ගුණ කිරීමක් සඳහා සත්‍ය වන අතර, එය මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

$$\boxed{\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n}$$

මෙම ප්‍රකාශය, "ගුණිතයෙහි ලඝුගණකය, ලඝුගණකවල එකතුවට සමාන වේ" ලෙස ද ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.
බෙදීමක ලඝුගණකය සඳහා ද මෙවැනි සූත්‍රයක් පවතී. දැන් ඒ පිළිබඳව විමසා බලමු.

දැන්, $128 \div 16$ හි අගය දර්ශක ආකාරයෙන් ලියා ලබා ගන්නා අයුරු නැවතත් මතක් කර ගනිමු.

$\frac{128}{16} = \frac{2^7}{2^4}$ (දෙකේ බල ලෙස දැක්වීම)

$= 2^{7-4}$ (දර්ශක නීති භාවිතය)

$\therefore \log_2\left(\frac{128}{16}\right) = 7 - 4$ (ලඝු ආකාරයට ලියූ විට)

$128 = 2^7$ නිසා $7 = \log_2 128$ ද

$16 = 2^4$ නිසා $4 = \log_2 16$ ද වේ.

මේ අනුව, $\log_2\left(\frac{128}{16}\right) = 7 - 4 = \log_2 128 - \log_2 16$

මෙලෙසම, $\log_5(125 \div 5) = \log_5 125 - \log_5 5$

$$\log_{10}\left(\frac{1000}{100}\right) = \log_{10} 1000 - \log_{10} 100$$

බල බෙදීමේ දී ලඝුගණකවල හැසිරීම පිළිබඳ වැදගත් ලක්ෂණයක් මින් පැහැදිලි වේ. එය පොදුවේ ඕනෑ ම බල බෙදීමක් සඳහා සත්‍ය වන අතර, එය මෙසේ දක්වමු.

$$\boxed{\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n}$$

මෙම ලක්ෂණවලට ලඝුගණක නීති යැයි ද කියනු ලැබේ.
දැන් මෙම ලඝුගණක නීති යොදා ගනිමින් ගැටලු විසඳන ආකාරය පහත නිදසුන් මගින් ඉගෙන ගනිමු.

නිදසුන 1

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(i) $\log_4 32 + \log_4 2$ (ii) $\log_5 15 - \log_5 3$

(i) $\log_4 32 + \log_4 2 = \log_4(32 \times 2)$

$= \log_4 64$

$= \underline{\underline{3}}$ ($64 = 4^3$ නිසා)

(ii) $\log_5 15 - \log_5 3 = \log_5\left(\frac{15}{3}\right)$

$= \log_5 5$

$= \underline{\underline{1}}$

නිදසුන 2

අගය සොයන්න. $\log_{10}25 + \log_{10}8 - \log_{10}2$

$\log_{10} 25 + \log_{10} 8 - \log_{10} 2 = \log_{10}\left(\frac{25 \times 8}{2}\right)$

$= \log_{10} 100$

$= \underline{\underline{2}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \log_{10} 100 &= x \\ 10^x &= 100 \\ 10^x &= 10^2 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}}$$

නිදසුන 3

$\log_a 2$ හා $\log_a 3$ ඇසුරෙන් දක්වන්න. (i) $\log_a 6$ (ii) $\log_a 18$

(i) $6 = 2 \times 3$ නිසා

$\log_a 6 = \log_a(2 \times 3)$

$= \underline{\underline{\log_a 2 + \log_a 3}}$

(ii) $18 = 2 \times 3 \times 3$ නිසා

$\log_a 18 = \log_a(2 \times 3 \times 3)$

$= \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 3$

$= \underline{\underline{\log_a 2 + 2\log_a 3}}$

නිදසුන 4

විසඳන්න. $\log_a 5 + \log_a x = \log_a 3 + \log_a 10 - \log_a 2$

$\log_a 5 + \log_a x = \log_a 3 + \log_a 10 - \log_a 2$

$\log_a(5 \times x) = \log_a\left(\frac{3 \times 10}{2}\right)$

$\therefore 5x = \frac{3 \times 10}{2}$

$5x = 15$

$\underline{\underline{x = 3}}$

දැන් ලඝුගණක නීති යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

19.2 අභ්‍යාසය

1. සුළු කර පිළිතුර තනි ලඝුගණකයක් ලෙස දක්වන්න.

(i) $\log_2 10 + \log_2 5$ (ii) $\log_3 8 + \log_3 5$ (iii) $\log_2 7 + \log_2 3 + \log_2 5$
(iv) $\log_6 20 - \log_6 4$ (v) $\log_a 10 - \log_a 2 - \log_a 5$ (vi) $\log_{10} 6 + \log_{10} 2 - \log_{10} 3$

2. පහත එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(i) $\log_2 4 + \log_2 8$ (ii) $\log_3 27 - \log_3 3$
(iii) $\log_{10} 20 + \log_{10} 2 - \log_{10} 4$ (iv) $\log_2 80 - \log_2 15 + \log_2 12$
(v) $\log_{10} 20 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2$ (vi) $\log_5 20 + \log_5 4 - \log_5 16$

3. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශන $\log_a 3$න් හා $\log_a 5$ ඇසුරෙන් දක්වන්න.

(i) $\log_a 15$ (ii) $\log_a\left(\frac{5}{3}\right)$ (iii) $\log_a\left(\frac{25}{3}\right)$

(iv) $\log_a 45$ (v) $\log_a 75$ (vi) $\log_a 225$

4. විසඳන්න.

(i) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 x$

(ii) $\log_a 10 + \log_a x = \log_a 30$

(iii) $\log_3 20 + \log_3 x = \log_3 4 + \log_3 10$

(iv) $\log_a 15 - \log_a 3 = \log_a x$

(v) $\log_{10} 8 + \log_{10} x - \log_{10} 2 = \log_{10} 12$

(vi) $\log_5 24 - \log_5 4 = \log_5 2 + \log_5 x$

සාරාංශය

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a a = 1 \text{ හා } \log_a 1 = 0$$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. අගය සොයන්න.

(i) $\log_3 27 + \log_2 8$

(ii) $\log_3 243 - \log_3 27$

(iii) $\log_2 16 \times \log_3 9$

(iv) $\dfrac{\log_{10} 10}{\log_2 32}$

(v) $\log_a 5 + \log_a 3 - \log_a 15$

2. $\log_2 24 = x$ නම් $\log_2 48$ යන්න x ඇසුරෙන් දක්වන්න.

3. පහත දැක්වෙන එක එකක් සත්‍යාපනය කරන්න.

(i) $\log_a \left(\frac{9}{10}\right) + \log_a \left(\frac{25}{81}\right) = \log_a 5 - \log_a 18$

(ii) $\log_5 1 + \log_5 20 - \log_5 8 + \log_5 2 = 1$

(iii) $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 = \log_{10} 0.6$

4. අගය සොයන්න.

(i) $\log_{10} 200 + \log_{10} 300 - \log_{10} 60$

(ii) $\log_{10} \left(\frac{12}{5}\right) + \log_{10} \left(\frac{25}{21}\right) - \log_{10} \left(\frac{2}{7}\right)$

5. විසඳන්න.

(i) $\log_{10} x - \log_{10} 2 = \log_{10} 3 - \log_{10} 4 + 1$

(ii) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 x + 1$