24

සමාන්තර ශ්‍රේඪී

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

සමාන්තර ශ්‍රේඪී හඳුනාගැනීමට හා ගැටලු විසඳීම සඳහා සමාන්තර ශ්‍රේඪී යොදාගැනීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී විවිධ සංඛ්‍යා රටා පිළිබඳ ඉගෙනගෙන ඇත. සංඛ්‍යා රටාවක් ලයිස්තුවක් ලෙස ලියූ විට එයට සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් (හෝ, සරලව, අනුක්‍රමයක්) යැයි කියනු ලැබේ. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය පිළිබඳ විමසා බලමු.

3, 8, 13, 18, ...

මෙම අනුක්‍රමයේ පළමුවන පදය 3 ද දෙවන පදය 8 ද තුන්වන පදය 13 ද ආදි වශයෙන් වේ. මෙහි ඇති විශේෂත්වය නම් ඕනෑ ම අනුයාත පද (එක ළඟ පිහිටි පද) දෙකක් සලකා ඉන් පසු පදයෙන් පෙර පදය අඩු කළ විට නියත අගයක් ලැබීම ය. මෙහි දී එම නියත අගය 5 වේ.

පහත දැක්වෙන්නේ තවත් එවැනි අනුක්‍රමයකි.

8, 5, 2, −1, − 4, ...

එම අනුක්‍රමයේ ද, අනුයාත පද දෙකක් ගෙන පසු පදයෙන් පෙර පදය අඩු කළ විට නියත අගයක් ලැබේ. මෙහි දී එම නියත අගය −3 වේ.

මෙවැනි ආකාරයේ සංඛ්‍යා අනුක්‍රමවලට **සමාන්තර ශ්‍රේඪී** යැයි කියනු ලැබේ. මුල් පදය නොවන ඕනෑම පදයකින් ඊට පෙර පදය අඩුකළ විට ලැබෙන නියත අගය **පොදු අන්තරය** ලෙස හැඳින්වෙන අතර, එය d මගින් අංකනය කෙරේ.

මේ අනුව,

> සමාන්තර ශ්‍රේඪියක් යනු, මුල් පදය හැර වෙනත් ඕනෑම පදයකින් ඊට පෙර පදය අඩු කළ විට නියත අගයක් ලැබෙන සේ ඇති සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයකි.

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අන්තරය වන d පහත ආකාරයට සෙවිය හැකි ය.

> පොදු අන්තරය (d) = (මුල් පදය නොවන ඕනෑම පදයක්) − (ඊට පෙර පදය)

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අනුක්‍රමය සමාන්තර ශ්‍රේඪියක් දැයි නිර්ණය කරන්න.
   (i) 9, 11, 13, 16, ...
   (ii) − 8, − 5, − 1, 2, ...
   (iii) 2.5, 2.55, 2.555, 2.5555, ...
   (iv) $5\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, 6, 6\frac{1}{2}, \ldots$
   (v) 1, −1, 1, −1, ...

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අන්තරය ලියා දක්වන්න.
   (i) 12, 17, 22, ...
   (ii) 10, 6, 2, ...
   (iii) −5, −1, 3, ...
   (iv) −2, − 8, − 14, ...
   (v) 2.5, 4, 5.5, ...

24.1 සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වැනි පදය

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පද නම් කිරීමට පහත අංකනය යොදා ගැනේ.

T_1 = පළමු පදය
T_2 = දෙවන පදය
T_3 = තෙවන පදය ආදි වශයෙන්...

නිදසුනක් ලෙස, 6, 8, 10, 12, 14, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪිය සඳහා
$T_1 = 6$, $T_2 = 8$, $T_3 = 10$, $T_4 = 12$, $T_5 = 14$ ආදි වශයෙන් ලිවිය හැකි ය.

මෙම සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 25 වන පදය කුමක් දැයි ඔබට කිව හැකි ද? එනම් T_{25} හි අගය කුමක් ද? ඉහත රටාව අනුව ලැබෙන පද තවදුරටත් ලියාගෙන යාමේ දී පද 25ක් ලියූ විට 25 වන පදය ලැබෙන බව පැහැදිලිය. එසේ කළහොත් 25 වන පදය ලෙස 54 ලැබේ. එනම්, $T_{25} = 54$.

දැන්, මෙම සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 500 වන පදය සෙවීමට අවශ්‍ය වුවහොත් ඔබ එය සොයන්නේ කෙසේ ද? ඒ සඳහා දී ඇති රටාව අනුගමනය කරමින් පද 500 දක්වා ලිවීම කළ යුතු අතර එය ඉතා වෙහෙසකර කාර්යයකි. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක ඕනෑ ම පදයක්, වඩා පහසුවෙන් සෙවීමට යොදා ගත හැකි සූත්‍රයක් ගොඩනගන ආකාරය දැන් විමසා බලමු. මෙම සූත්‍රය ලබාගන්නා ආකාරය ඉහත 6, 8, 10, 12, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪිය ඇසුරෙන්ම

නිදර්ශනය කරමු. මෙහි පළමු පදය 6 ද පොදු අන්තරය 2 ද වේ. පළමු පදය හා පොදු අන්තරය ඇසුරෙන් ඉහත ශ්‍රේඪියේ පද ගොඩනැගී ඇති ආකාරය පහත වගුවේ නිරූපණය කර ඇති අයුරු හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

පදය	පදයෙහි අගය	පදයෙහි අගය මුල් පදය හා පොදු අන්තරය ඇසුරෙන්
T_1	6	$6 \qquad = 6 + (1 - 1) \times 2$
T_2	8	$6 + 2 \qquad = 6 + (2 - 1) \times 2$
T_3	10	$6 + 2 + 2 \qquad = 6 + (3 - 1) \times 2$
T_4	12	$6 + 2 + 2 + 2 = 6 + (4 - 1) \times 2$
...	...	... ...
...	...	... ...

මෙම රටාව අනුව, 500 වන පදය ගණනය කරමු.

$$
\begin{aligned}
T_{500} &= 6 + (500 - 1) \times 2 \\
&= 6 + 499 \times 2 \\
&= 6 + 998 \\
&= 1004
\end{aligned}
$$

මේ අනුව 500 වන පදය වන්නේ 1004 යි.

ඉහත රටාව ඔබට තවදුරටත් සාධාරණ ලෙස ලිවිය හැකි ද? එනම්, මුල්පදය a ද පොදු අන්තරය d ද වන සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය වන T_n සඳහා සූත්‍රයක් ලබාගත හැකි ද? මේ සඳහා නැවතත් $T_{500} = 6 + (500 - 1) \times 2$ ප්‍රකාශනය කෙරෙහි අවධානය යොමු කරමු. මෙහි 6 යනු මුල් පදයයි. 2 යනු පොදු අන්තරයයි.

මුල් පදය a ද පොදු අන්තරය d ද වන සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය ලබා ගැනීමට ඉහත රටාව අනුගමනය කළහොත් $T_n = a + (n - 1)\, d$ ලෙස ලැබෙන බව ඔබට දැකිය හැකි නො වේ ද? මෙම සූත්‍රයෙහි, අපගේ අංකනය අනුව, T_n මගින් දැක්වෙන්නේ n වන පදයයි.

මේ අනුව, මුල් පදය a ද පොදු අන්තරය d ද වන සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය වන T_n යන්න,

$\boxed{T_n = a + (n - 1)\, d}$ සූත්‍රය මගින් ලබා දෙයි.

මෙම සූත්‍රයෙහි ඇති වැදගත්කම වනුයේ සමාන්තර ශ්‍රේඪියක a, d, n හා T_n යන අඥාත හතර අතර ඇති සම්බන්ධය දැක්වීමයි. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක, මෙම අඥාත හතරෙන් ඕනෑ ම තුනක් දන්නා විට ඉතිරි අඥාතයෙහි අගය සෙවීම, ඉහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් කළ හැකි ය. දැන් එම සූත්‍රය යොදා ගනිමින් සමාන්තර ශ්‍රේඪී පිළිබඳ ගැටලු විසඳන ආකාරය විමසා බලමු.

නිදසුන 1 (a, d හා n දන්නා විට T_n සෙවීම)

3, 7, 11, 15, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 15 වන පදය සොයන්න.

මෙහි $a = 3$, $d = 7 - 3 = 4$, $n = 15$

$T_n = a + (n - 1)\, d$ සූත්‍රයෙහි මෙම අගය ආදේශයෙන්,

$$
\begin{aligned}
T_{15} &= 3 + (15 - 1) \times 4 \\
&= 3 + 56 \\
&= 59
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 15 වන පදය 59 වේ.

නිදසුන 2 (d, n හා T_n දන්නා විට a සෙවීම)

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අන්තරය 4 ද විසිහය වන පදය 105 ද වේ නම් මුල් පදය සොයන්න.

මෙහි $d = 4$ හා $n = 26$ විට $T_{26} = 105$

$T_n = a + (n - 1)\, d$ සූත්‍රයෙහි මෙම අගය ආදේශයෙන්,

$$
\begin{aligned}
T_{26} &= a + (26 - 1) \times 4 \\
105 &= a + (26 - 1) \times 4 \\
\therefore 105 - 100 &= a \\
\therefore \quad a &= 5
\end{aligned}
$$

$\therefore$ මුල් පදය 5 වේ.

නිදසුන 3 (a, n හා T_n දන්නා විට d සෙවීම)

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය -32 ද 12 වන පදය 1 ද වේ නම් පොදු අන්තරය සොයන්න.

මෙහි $a = -32$ හා $n = 12$ විට $T_{12} = 1$.

$T_n = a + (n - 1)\, d$ සූත්‍රයෙහි මෙම අගය ආදේශයෙන්,

$$
\begin{aligned}
1 &= -32 + (12 - 1) \times d \\
\therefore 33 &= 11 \times d \\
\therefore \frac{33}{11} &= d \\
\therefore d &= 3
\end{aligned}
$$

$\therefore$ පොදු අන්තරය 3 වේ.

නිදසුන 4 (a , d හා T_n දන්නා විට n හි අගය සෙවීම)

30, 25, 20, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ -65 වන්නේ කී වැනි පදය ද?

මෙහි $a = 30$, $d = -5$, $T_n = -65$

$T_n = a + (n - 1)\, d$ සූත්‍රයෙහි මෙම අගය ආදේශයෙන්,

$$
\begin{aligned}
-65 &= 30 + (n - 1) \times (-5) \\
-65 &= 30 - 5n + 5 \\
-65 - 35 &= -5n
\end{aligned}
$$

$$\frac{-100}{-5} = n$$

$n = 20$ $\therefore -65$ වන්නේ 20 වැනි පදය යි.

සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක, a, d, n හා T_n අතුරින්, අඥාත දෙකක් නොදන්නා විට දී, ප්‍රමාණවත් තරම් දත්ත දී ඇති නම් එවිට සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් විසඳා එම අඥාත සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 5

සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක හත්වන පදය 38 ද දොළොස් වන පදය 63 ද වේ නම් මෙම ශ්‍රේඪීයේ,

(i) පළමු පදය හා පොදු අන්තරය

(ii) 20 වන පදය සොයන්න.

(i) මෙහි $n = 7$ විට $T_n = 38$ ද $n = 12$ විට $T_n = 63$ නිසා $T_n = a + (n-1)\,d$ හි ආදේශයෙන්

$T_7 = a + (7-1) \times d$

$38 = a + 6d$ ——— (1)

$T_{12} = a + (12-1) \times d$

$63 = a + 11d$ ——— (2)

දැන් ඉහත (1) හා (2) සමගාමී සමීකරණ යුගලය විසඳමු.

$63 - 38 = a + 11d - (a + 6d)$

$25 = a + 11d - a - 6d$

$25 = 5d$

$5 = d$

$d = 5$, (1) හි ආදේශයෙන්

$38 = a + 6 \times 5$

$38 - 30 = a$

$a = 8$

$\therefore$ මුල් පදය 8 ද පොදු අන්තරය 5 ද වේ.

(ii) $T_n = a + (n-1)\,d$ ට ආදේශයෙන්

$T_{20} = 8 + (20-1) \times 5$

$= 8 + 19 \times 5$

$= 8 + 95$

$= 103$

$\therefore$ 20 වන පදය 103 වේ.

නිදසුන 6

එක්තරා අනුක්‍රමයක n වන පදය T_n යන්න $T_n = 3n + 4$ මඟින් ලබා දෙයි.

(i) මෙම අනුක්‍රමයේ මුල් පද හතර ලියා දක්වන්න.

(ii) ශ්‍රේඪීයේ $n-1$ වන පදය වන T_{n-1} සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, එමගින් අනුක්‍රමය සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක් වන බව පෙන්වන්න.

(iii) ශ්‍රේඪීයේ 169 වන්නේ කී වැනි පදය දැයි සොයන්න.

(iv) අගය 95 වන පදයක් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(i) $T_n = 3n + 4$

$n = 1$ විට $T_1 = 3 \times 1 + 4 = 7$

$n = 2$ විට $T_2 = 3 \times 2 + 4 = 10$

$n = 3$ විට $T_3 = 3 \times 3 + 4 = 13$

$n = 4$ විට $T_4 = 3 \times 4 + 4 = 16$

$\therefore$ මුල් පද හතර පිළිවෙළින් 7, 10, 13 හා 16 වේ.

(ii) $T_n = 3n + 4$ හි n වෙනුවට $n-1$ ආදේශයෙන්

$T_{n-1} = 3\,(n-1) + 4$

$= 3n - 3 + 4$

$= 3n + 1$

$\therefore T_n - T_{n-1} = (3n + 4) - (3n + 1)$

$= 3$

= නියත අගයක්

$\therefore$ අනුක්‍රමය සමාන්තර ශ්‍රේඪීයකි.

(iii) $T_n = 169$ බව දී ඇත.

$T_n = 3n + 4$ ට ආදේශයෙන්

$169 = 3n + 4$

$169 - 4 = 3n$

$\frac{165}{3} = n$

$55 = n$

$\therefore$ 169 වන්නේ 55 වන පදයයි.

(iv) අගය 95 වන පදයක් තිබේ නම් $T_n = 95$ පරිදි n ධන නිඛිලයක් තිබිය යුතු ය. එනම්,

$95 = 3n + 4$

$95 - 4 = 3n$

$91 = 3n$

$\therefore n = \frac{91}{3}$

එනම් n සඳහා ධන නිඛිලයක් නොලැබේ. එමනිසා, අගය 95 වන පදයක් නොමැත.

24.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවට අදාළ සමාන්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද පහ සොයන්න.

(a) $a = 5;\ d = 2$ **(b)** $a = -3;\ d = 4$

(c) $a = 4.5;\ d = 2.5$ **(d)** $a = 10\frac{1}{4};\ d = -\frac{1}{2}$

(e) $a = 2x;\ d = x + 3$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪීය සඳහා ඉදිරියෙන් දක්වා ඇති පදය සොයන්න.

(a) 13, 15, 17, ... (10 වැනි පදය) **(b)** 40, 38, 36, ... (21 වැනි පදය)

(c) –2, –7, –12, ... (15 වැනි පදය) **(d)** –3, 2, 7, ... (20 වැනි පදය)

(e) 6.5, 8, 9.5, ... (12 වැනි පදය) **(f)** $3\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{3}{4}, \ldots$ (11 වැනි පදය)

(g) $12\frac{1}{2},\ 12,\ 11\frac{1}{2}, \ldots$ (18 වැනි පදය)

3. (*a*) පහත දැක්වෙන දත්ත ඇසුරෙන් එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය සොයන්න.

(i) $d = 5;\ T_{21} = 101$

(ii) $d = -3;\ T_{35} = -113$

(iii) $d = 2\frac{1}{2}\ ;\ T_{37} = 93$

(*b*) පහත දැක්වෙන දත්ත ඇසුරෙන් එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪීයේ පොදු අන්තරය සොයන්න.

(i) $a = 60; \quad T_{15} = 102$

(ii) $a = -30; \quad T_{35} = -25$

(iii) $a = 4\frac{1}{4}; \quad T_{37} = -7\frac{3}{4}$

(*c*) පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාව සඳහා දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් අදාළ සමාන්තර ශ්‍රේඪීයේ පද ගණන (n) සොයන්න.

(i) $a = 9; d = 4; \; T_n = 69$

(ii) $a = -20; d = \frac{1}{2}; \; T_n = 35$

(iii) $a = 7 \; ; d = \frac{1}{2}; T_n = 27$

4. පහත එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪීයේ n වන පදය හැකි සරල ම ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.

(i) $-15, -12, -9, -6, \ldots$

(ii) $7, 12, 17, 22, \ldots$

(iii) $3\frac{1}{4}, \; 4, \; 4\frac{3}{4}, \ldots$

(iv) $67, 64, 61, \ldots$

5. n වන පදය **(a)** $2n+1$ **(b)** $5n-1$ **(c)** $8-n$ **(d)** $20-5n$ වන එක් එක් අනුක්‍රමයේ,

(i) මුල් පද තුන ලියා දක්වන්න.

(ii) පොදු අන්තරය සොයන්න.

(iii) 15 වැනි පදය සොයන්න.

6. 1ත් 150ත් අතර,

(i) 2 හි ගුණාකාර කොපමණ තිබේ ද?

(ii) 3 හි ගුණාකාර කොපමණ තිබේ ද?

(iii) 5 හි ගුණාකාර කොපමණ තිබේ ද?

7. (i) සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක තුන්වන පදය 7 ද හයවන පදය 13 ද නම් ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය සොයන්න.

(ii) සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක පස්වන පදය 34 ද පහළොස්වන පදය 9 ද නම් ශ්‍රේඪීයේ -6 වන්නේ කීවැනි පදය ද?

(iii) සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක පස්වන පදය 22 ද දහවන පදය 47 ද නම් ශ්‍රේඪීයේ පහළොස්වන පදය තුන්වන පදය මෙන් හය ගුණයක් බව පෙන්වන්න.

(iv) සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක තුන්වන හා හයවන පදවල ඓක්‍යය 42 ද දෙවන හා දහවන පදවල ඓක්‍යය 54 ද වේ නම් ශ්‍රේඪීයේ 63 වන්නේ කීවැනි පදය ද? අගය 30 වන පදයක් මෙම ශ්‍රේඪීයේ තිබිය නොහැකි බව ද පෙන්වන්න.

(v) දෙවන පදය 10 වන සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක දොළොස්වන පදය දහ වන පදයට වඩා 12කින් වැඩි වේ. මෙම ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය හා පොදු අන්තරය සොයා විසි එක්වන පදය සොයන්න.

(vi) 3, 7, 11, ... ශ්‍රේඪීයේ කීවැනි පදය හත්වන පදයට වඩා 52කින් වැඩි ද?

24.2 සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද *n* හි ඓක්‍යය

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ... යන සමාන්තර ශ්‍රේඪීය සලකමු. මෙම ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 8 ලියා ඇත. මෙම මුල් පද අටෙහි එකතුව වන්නේ,
$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 80$ ය.

මෙම පාඩමේ දී සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද n හි ඓක්‍යය ඉදිරිපත් කිරීමට S_n යන සංකේතය උපයෝගී කරගනිමු. ඒ අනුව ඉහත ශ්‍රේඪීයේ පද 8 හි ඓක්‍යය පහත ආකාරයට ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

$$S_8 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$$
$$S_8 = 80$$

නමුත් පද ගණන වැඩි වත් ම අපට ප්‍රායෝගික ව ඉහත ආකාරයට පද සියල්ල එකතු කිරීම අපහසු ය. එම අපහසුතාව මග හරවා ගැනීම පිණිස එකතුව සෙවීම සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගන අයුරු දැන් සලකා බලමු. ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද 8 හි ඓක්‍යය ඇති පිළිවෙළට පහත පරිදි ලිවිය හැකි ය.

$$S_8 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 \text{ ——— } (1)$$

ඉහත ප්‍රකාශයේ ඇති පද නැවත අග පදයේ සිට මුලට පහත ආකාරයට ලියා දැක්විය හැකි ය.

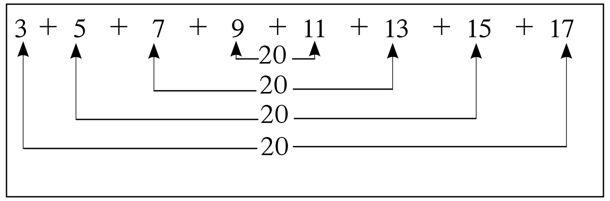
$$S_8 = 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 \text{ ——— } (2)$$

(1) හා (2) න් $2\,S_8 = (3 + 17) + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11) + (11 + 9) + (13 + 7) + (15 + 5) + (17 + 3)$

$$2\,S_8 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20$$
$$\therefore 2\,S_8 = 8 \times 20 \quad \text{(අගය 20 වන පද 8ක් ඇත)}$$
$$S_8 = \frac{8}{2} \times 20$$

$\therefore$ පද අටෙහි ඓක්‍යය 80 වේ.

ඉහත $\frac{8}{2} \times 20$ ලබාගත් ආකාරය තවත් ආකාරයකට ද ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.



ශ්‍රේඪියේ පද 8ක් ඇත. මෙහි මුල පදයත් අවසාන පදයත් එකතු කළ විට අගය 20 වේ. එමෙන් ම දෙවන පදයත් අවසානයට පෙර පදයත් එක් කල විට 20 ලැබේ. මෙසේ ඉහත දක්වන ආකාරයට, ශ්‍රේඪියේ ඓක්‍යය යුගල හතරක එකතුවක් ලෙස දැක්විය හැකි ය. එම යුගල සංඛ්‍යාව ශ්‍රේඪියේ පද ගණනින් අර්ධයක් වේ. එවිට පද සියල්ලේ එකතුව වන්නේ පද ගණනේ අර්ධයේත් මුල් හා අවසාන පදයේ එකතුවේත් ගුණිතය යි.
එනම්, $S_8 = \frac{8}{2}[3+17]$ වේ.

ඉහත ගණනය කිරීමේ දී යොදාගත් ක්‍රමය භාවිතයෙන් මුල් පදය a ද, පොදු අන්තරය d ද අවසාන පදය (එනම් n වන පදය) l ද වන විට ශ්‍රේඪියේ පද n ගණනක ඓක්‍යය S_n සඳහා ප්‍රකාශනයක් පහත ආකාරයට ගොඩනැගිය හැකි ය.

මුල් පදයේ සිට අවසාන පදය දක්වා එකතුව
$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + (l - 2d) + (l - d) + l \quad \text{①}$$
ලෙස ලිවිය හැකි ය.
ඉහත ශ්‍රේඪියේ පද අග සිට මුලට නැවත පහත ආකාරයට ලියූ විට
$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a \quad \text{②}$$
ලැබේ.
ඉහත ① හා ② මගින් දැක්වෙන ශ්‍රේඪි දෙකේ පද මුල සිට අනුපිළිවෙළට එකතු කළ විට පහත ආකාරයට නව සම්බන්ධතාවක් ලැබේ.

① + ② $2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots (a + l) + (a + l) + (a + l)$
$2S_n = n(a + l)$ [මෙහි $(a + l)$ පද n ගණනක් ඇති නිසා]

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a+l) \text{ වේ.}$$

මුල් පදය a ද අවසාන පදය l ද පද ගණන n ද වන විට මුල් පද n හි එකතුව පහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් ගණනය කළ හැකි ය.

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a+l)}$$

නිදසුනක් ලෙස 1 සිට 100 තෙක් පූර්ණ සංඛ්‍යා සියල්ලේ එකතුව සෙවීමට අවශ්‍ය විට ඉහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් පහසුවෙන් කළ හැකි අයුරු විමසා බලමු.

අදාළ ශ්‍රේඪිය පද 1, 2, 3, ..., 99, 100 වේ.
මෙහි $a = 1$, $l = 100$ ද $n = 100$ ද වේ.

$\therefore$ පද 100 හි එකතුව $= S_{100} = \frac{100}{2}(1+100)$

$$S_{100} = 50\,(101)$$
$$\therefore S_{100} = \underline{\underline{5050.}}$$

ඉහත සූත්‍ර භාවිතයෙන්, සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය (a), පද ගණන (n) හා අවසාන පදය (l) දී ඇති විට එම පද ගණනෙහි ඓක්‍යය සෙවිය හැකි ය. දැන් අප විමසා බලන්නේ මුල් පදය (a), පද ගණන (n) හා පොදු අන්තරය (d) දී ඇති විට පද ගණනේ ඓක්‍යය (S_n) සොයන අයුරු ය.

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

සූත්‍රයේ l යනු n වන පදය, එනම් T_n නිසා, l වෙනුවට $T_n = a + (n - 1)d$ සූත්‍රයෙන් ආදේශ කළ විට

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\} \text{ ලැබේ.}$$

මෙය

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$ ලෙස තවදුරටත් සුළු කර ප්‍රකාශ කළ හැකි වේ.

මේ අනුව මුල් පදය a ද පොදු අන්තරය d ද වන සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද n හි එකතුව සෙවීමට

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}}$ සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි ය.

නිදසුනක් ලෙස 2, 4, 6, 8, ... ශ්‍රේණියේ පද 30 ක ඓක්‍යය සොයමු. මෙහි $a = 2$, $d = 2$ $n = 30$ වේ.

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ සූත්‍රයට ඉහත අගය ආදේශ කළ විට

$$S_{30} = \frac{30}{2}\{2 \times 2 + (30-1) \times 2\}$$
$$= \frac{30}{2}\{4 + 29 \times 2\}$$
$$= \frac{30}{2}\{62\}$$
$$= 15 \times 62$$
$$= 930$$

$\therefore$ මුල් පද 30හි ඓක්‍යය 930 වේ

මේ අනුව පද n ගණනක ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා

★ මුල් පදය, අවසාන පදය හා පද ගණන දන්නා විට පද n ගණනෙහි ඓක්‍යය සෙවීමට

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ සූත්‍රය ද

★ මුල්පදය, පොදු අන්තරය දන්නා විට පද n ගණනෙහි ඓක්‍යය සෙවීමට

$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ සූත්‍රය ද උපයෝගී කරගත හැකි ය.

ඉහත සූත්‍ර උපයෝගී කරගෙන විසඳන ලද ගැටලු කිහිපයක් කෙරෙහි අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1 5, 10, 15, 20, ...සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 12හි ඓක්‍යය සොයන්න.

මෙහි $a = 5$, $d = 5$, $n = 12$

$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ ට ආදේශයෙන්

$S_{12} = \frac{12}{2}\{2\times 5+(12-1)\times 5\}$

$= \frac{12}{2}\{10+11\times 5\}$

$= 6 \ \{10+55\}$

$= 6\times 65$

$= 390$

$\therefore$ මුල් පද 12හි එකතුව 390 වේ.

නිදසුන 2

පද 16කින් යුත් සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය 75 ද, පොදු අන්තරය -5 ද, අවසාන පදය ශුන්‍ය ද වේ නම් පද සියල්ලේ ඓක්‍යය සොයන්න.

මෙහි $n = 16$, $a = 75$, $d = -5$, $l = 0$

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ට ආදේශයෙන්

$S_{16} = \frac{16}{2}(75+0)$

$= \frac{16}{2}\times 75$

$= 8\times 75$

$= 600$

පද සියල්ලේම ඓක්‍යය 600 වේ.

නිදසුන 3

70, 66, 62, 58, ..., 2 සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ පද සියල්ලේ ඓක්‍යය සොයන්න.

මෙහි $a = 70$, $l = 2$, $d = -4$. ප්‍රථමයෙන් ශ්‍රේඪියේ පද ගණන සොයා ගත යුතු වේ.

$T_n = a+(n-1)d$ ට ආදේශයෙන්

$2 = 70+(n-1)\times(-4)$

$2 = 70-4n+4$

$2-74 = -4n$

$\frac{-72}{-4} = n$

$18 = n$

ශ්‍රේඪියේ පද 18 ක් ඇත. පද 18හි ඓක්‍යය

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ට ආදේශයෙන්

$S_{18} = \frac{18}{2}(70+2)$

$= \frac{18}{2}\times 72$

$= 9\times 72$

$= 648$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පද සියල්ලේ ඓක්‍යය 648 වේ.

නිදසුන 4

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය 12 ද අවසාන පදය 99 ද එම පදවල ඓක්‍යය 1665 ද වේ. එම ශ්‍රේඪියේ පදගණන හා පොදු අන්තරය සොයා මුල්පද 15හි ඓක්‍යය සොයන්න.

මෙහි $a = 12$, $l = 99$, $S_n = 1665$

මුලින්ම පද ගණන සොයමු.

$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ට ආදේශයෙන්

$1665 = \frac{n}{2}(12+99)$

$3330 = n\times 111$

$\frac{3330}{111} = n$

$30 = n$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පද ගණන 30 වේ.

දැන් මෙම ශ්‍රේඪියේ පොදු අන්තරය සොයමු.

මෙහි $a = 12,\ T_{30} = 99,\ n = 30$

$T_n = a + (n-1)d$ ට ආදේශයෙන්

$$99 = 12 + (30-1)\times d$$

$$99 = 12 + 29\times d$$

$$99 - 12 = 29\times d$$

$$\frac{87}{29} = d$$

$$3 = d$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පොදු අන්තරය 3 වේ.

දැන් පද 15ක ඓක්‍යය සොයමු.

මෙහි $n = 15, a = 12, d = 3$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\{2\times 12 + (15-1)\times 3\}$$

$$= \frac{15}{2}\{24 + 14\times 3\}$$

$$= \frac{15}{2}\{24 + 42\}$$

$$= \frac{15}{2}\{66\}$$

$$= 15\times 33$$

$$S_{15} = 495$$

මුල් පද 15 හි ඓක්‍යය 495 වේ.

නිදසුන 5

13, 11, 9, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ ඓක්‍යය 40 වීමට මුල් පදයේ සිට පද කීයක් ගත යුතු ද?

මෙහි $a = 13,\ d = -2,\ S_n = 40$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$40 = \frac{n}{2}\{2\times 13 + (n-1)\times(-2)\}$$

$$80 = n\{26 - 2n + 2\}$$

$$80 = 28n - 2n^2$$

$$2n^2 - 28n + 80 = 0$$

$$n^2 - 14n + 40 = 0$$

$$(n-10)(n-4) = 0$$

$n - 10 = 0$ හෝ $n - 4 = 0$

$n = 10$ හෝ $n = 4$

මෙහි n සඳහා විසඳුම් දෙකක් ලැබී ඇත.

$n = 4$ විට මුල් පද හතරේ ඓක්‍යය $= 13 + 11 + 9 + 7 = 40$ වේ.

$n = 10$ විට මුල් පද දහයේ ඓක්‍යය $= 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + (-1) + (-3) + (-5) = 40$

එමනිසා n සඳහා ලැබෙන අගය දෙකම පිළිගත හැකි ය. එමනිසා එකතුව 40ක් වීමට පද 10ක් හෝ 4ක් ගත හැකි ය.

24.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවල දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් අදාළ සමාන්තර ශ්‍රේඪිවල එකතුව සොයන්න.
   (i) $a = 2, l = 62$ හා $n = 31$
   (ii) $a = 95, l = 10$ හා $n = 12$
   (iii) $a = 7\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$ හා $n = 15$
   (iv) $a = 3.25, d = 1.7$ හා $n = 21$

2. පහත දැක්වෙන සමාන්තර ශ්‍රේඪිවල දක්වා ඇති පද ගණනේ ඓක්‍යය සොයන්න.
   (i) 3, 7, 11, ... පද 11ක
   (ii) –10, –9. 7, –9.4, ... පද 20ක
   (iii) $1, 1\frac{3}{4}, 2.5, \ldots$ පද 17ක
   (iv) 67, 65, 63, ... පද 12ක

3. සමාන්තර ශ්‍රේඪී ඇසුරෙන් අගය සොයන්න.

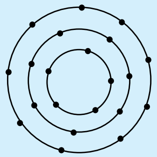
(i) 2ත් 180ත් අතර ඔත්තේ සංඛ්‍යා ගණන සොයා එම සංඛ්‍යාවල එකතුව සොයන්න.

(ii) 200 ට අඩු 5න් බෙදෙන ධන සංඛ්‍යා ගණන සොයා ඒවායේ එකතුව සොයන්න.

(iii) 3ත් 200ත් අතර 4න් බෙදූවිට 1ක් ඉතිරි වන සංඛ්‍යාවල එකතුව සොයන්න.

(iv) 5ත් 170ත් අතර 3 හි ගුණාකාර නොවන සංඛ්‍යාවල එකතුව සොයන්න.

4. සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද හතරෙහි එකතුව 36 වේ. එකොළොස්වන පදය 43 වේ. මෙම ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය හා පොදු අන්තරය සොයා මුල් පද පහළොවෙහි එකතුව සොයන්න.

5. 

රූපයේ දැක්වෙන්නේ කුඩා වර්ණ විදුලි බල්බ උපයෝගී කරගෙන කවාකාරව සකස් කරන ලද විදුලි පහන් සැරසිල්ලක මුල් කව තුනෙහි බල්බ පිහිටා ඇති අයුරු ය. මෙම ආකාරයට සකස් කළ එක් සැරසිල්ලක අවසාන කවයේ බල්බ 35 ක් තිබේ.

(i) අදාළ සැරසිල්ල සඳහා උපයෝගී කරගෙන ඇති කව ගණන කොපමණ ද?

(ii) කොපමණ බල්බ ගණනක් භාවිත කර ඇත්ද?

(iii) එක් බල්බයක් සඳහා රු 50ක මුදලක් වැය වී නම් බල්බ සඳහා පමණක් වැය වූ මුදල සොයන්න.

6. P හා Q නම් මූල්‍ය ආයතන දෙකෙන් රු 50 000ක මුදලක් ණයට ගත්විට එම මුදල හා පොලිය මාසිකව අයකරනු ලබන ආකාරය හා ගෙවිය යුතු මාස ගණන් පහත ආකාරයට වේ.

P ආයතනය : 11000, 10000, 9000, ...මාස 11ක්

Q ආයතනය : 14000, 15000, 16000, ...මාස 8ක්

වඩා වාසිදායක වන්නේ කුමන ආයතනයකින් ණය මුදලක් ලබාගැනීම ද යන්න හේතු සහිත ව පැහැදිලි කරන්න.

7. පියෙක් තම දියණියගේ 10 වන උපන් දින සැමරුමේ දී රු 500ක මුදලක් බැංකුවක තැන්පත් කර ගිණුමක් ආරම්භ කරයි. සෑම මසක ම පෙර මස තැන්පත් කළ මුදලට නියත මුදල් ප්‍රමාණයක් එක් කර ඊළඟ මස දී තැන්පත් කරයි. තම දියණියගේ 18 වන උපන්දිනය වන විට පොලිය රහිත ව ගිණුමේ තැන්පත් මුළු මුදල රු 504 000ක් වීමට ඔහු විසින් වැඩිපුර තැන්පත් කළ යුතු නියත මුදල කොපමණද?

8. සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක n වන පදය $T_n = 63 - 2n$ වේ.

(i) මුල් පද හතර ලියා දක්වන්න.

(ii) මුල් පද විසිඑකේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(iii) විසිඑක්වන පදය සොයන්න.

(iv) මුල් පදයේ සිට පද කීයක ඓක්‍යය 336 වේ ද?

9. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවන්වලදී සඳහන් කර ඇති එකතුව ලබාගැනීමට අවශ්‍ය පද ගණන සොයන්න.

(i) $a = 7$, $l = 10$ විට $S_n = 34$ වීමට අවශ්‍ය පද ගණන

(ii) $a = 63$, $d = 3$ විට $S_n = 345$ වීමට අවශ්‍ය පද ගණන

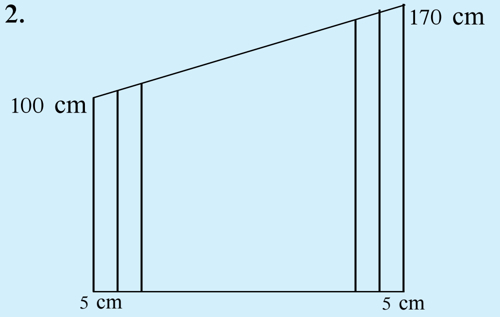
මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. එක්තරා වෙළෙඳ සලක රාක්කයක සබන්කැටයක පළළ පැත්ත සිරස් ව සිටිනසේ අසුරා ඇත්තේ පහළම පේළියේ සබන්කැට 24ක් ද ඊට ඉහළ පේළියේ කැට 21ක් ද, ඊටත් ඉහළින් පේළියේ කැට 18ක් ද වන ආකාරයට ය.

(i) 8 වන පේළියේ අසුරා ඇති සබන්කැට ගණන සොයන්න.

(ii) රාක්කයේ ඉහළම පේළියේ සබන්කැට 3ක් පමණක් ඇත්නම් අසුරා ඇති සබන්කැට පේළි ගණන හා මුළු සබන්කැට ගණන සොයන්න.

(iii) සබන්කැටයක පළල 5 cm වේ නම් ඉහත ආකාරයට සබන් කැට ඇසිරීමට රාක්කයේ තට්ටු දෙක අතර තිබිය යුතු අවම උස ගණනය කරන්න.

2. 

රූපයේ දැක්වෙනුයේ එක්තරා වගාබිමකට ඇතුළු වීමට ලී පටිවලින් සකස් කරන ලද පියන් දෙකක් සහිත කුඩා ගේට්ටුවක එක් පියනක දළ සටහනකි. සෑම ලී පටියක් ම 5 cm පළළින් යුක්ත අතර, කුඩා ම ලී පටියේ උස 100 cm වන අතර ඊළඟ පටියේ උස පෙර පටියේ උසට වඩා 5 cm බැගින් වැඩි වන පරිදි ලී පටි සකස් කර ඇත. උසින් වැඩි ම පටිය සෙන්ටිමීටර 170ක් වේ.

(i) එක් ගේට්ටු පලුවක් සඳහා යොදා ගෙන ඇති ලී පටි ප්‍රමාණය සොයන්න.

(ii) ගේට්ටුවේ අවම පළල මීටර්වලින් සොයන්න.

(iii) මෙහි දී භාවිත කර ඇති මුළු ලී පටිවල දිග සොයන්න.

(iv) මෙම ලී වර්ගයේ සෙන්ටිමීටර 30ක කැබැල්ලක මිල රු 50ක් වේ නම් ගේට්ටුවේ පළු දෙකම සෑදීමට අවශ්‍ය ලී පටි සඳහා යන වියදම සොයන්න.

3. සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද n වල ඓක්‍යය $S_n = n^2 - 8n$ වේ.

(i) ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය ලියන්න.

(ii) ශ්‍රේඪීයේ මුල් පද දෙකෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(iii) ශ්‍රේඪීයේ පොදු අන්තරය සොයන්න.

(iv) මුල් පදයේ සිට පද කීයක එකතුව 180 වේ ද?

4. සඟරාවක 3, 5, 7, ... යන අංක දරණ පිටු විශේෂිත රෝස පැහැති වර්ණයකින් යුක්තව මුද්‍රණය කර ඇත. තුෂාන් පළමු දිනයේ පිටු 5ක් ද, පසු සෑම දිනකම පෙර දිනට වඩා පිටු 3ක් වැඩිපුර කියවීමෙහි නිරතව සිටී.

(i) පස්වන දිනය නිමා වන විට ඔහු කියවා ඇති පිටු ගණන සොයන්න.

(ii) හත්වන දිනය නිමා වන විට ඔහු කියවා ඇති පිටු ගණන කීය ද?

(iii) දින 10ක් තුළ මෙම සඟරාව සම්පූර්ණයෙන්ම කියවා අවසන් කරයි නම් සඟරාවේ මුද්‍රිත පිටු ගණන සොයන්න.

(iv) මෙම සඟරාව තුළ උපරිම වශයෙන් රෝස වර්ණ පිටු කීයක් ඇතුළත් වී ඇත් ද?

(v) 6 වන දින අවසානයේ දී කියවීම නිමා කරන්නේ රෝස වර්ණ පිටුවකින් බව ඔහු පවසයි. මෙහි සත්‍ය අසත්‍යතාව නිර්ණය කරන්න.