8

සමාන්තර රේඛා අතර තල රූපවල වර්ගඵලය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනයෙන් ඔබට,

එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකයක් සහිතව පිහිටි ත්‍රිකෝණවලත් සමාන්තරාස්‍රවලත් වර්ගඵල අතර පවතින සම්බන්ධතා පිළිබඳ ප්‍රමේයයන් හඳුනා ගැනීමටත්, ඒ හා සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමටත්

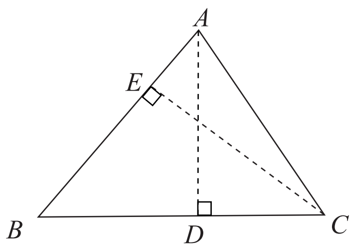
හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

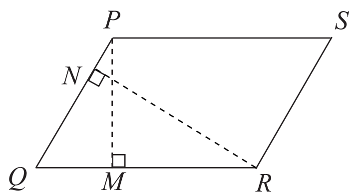
හැඳින්වීම

විවිධ තලරූප පිළිබඳවත්, සමහර විශේෂ ආකාරයේ තලරූපවල වර්ගඵල සොයන ආකාරය පිළිබඳවත් මේ වන විට ඔබ උගෙන ඇත. ඒවා අතුරින් ත්‍රිකෝණවල හා සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵලය ලබා ගත් ආකාරය මතක් කර ගනිමු.

ත්‍රිකෝණ හා සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල සෙවීමේ දී **උච්චය** හා **ආධාරකය** යන පද භාවිත වේ. එම පදවලින් හැඳින්වෙන්නේ මොනවා දැයි මුලින් ම මතක් කර ගනිමු.

පහත දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය හා $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය සලකමු.





ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සෙවීමේ දී කැමති පාදයක් ආධාරකය ලෙස සැලකිය හැකි ය. නිදසුනක් ලෙස BC පාදය ආධාරකය ලෙස ගත හැකි ය. එවිට අනුරූප උච්චය ලෙස සැලකෙන්නේ AD රේඛාව යි. එනම්, A සිට BC ට ඇඳි ලම්බය යි.

මෙවිට

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ බව අපි උගෙන ඇත්තෙමු.

මෙපරිද්දෙන් ම,

AB පාදය ආධාරකය ලෙස සැලකුව හොත්, අනුරූප උච්චය වන්නේ CE රේඛාව යි.

ඒ අනුව, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times AB \times CE$ ද ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

මෙලෙස ම, AC පාදය ආධාරකය ලෙස සලකා, B සිට අනුරූප උච්චය ඇඳීමෙන් ද ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සෙවිය හැකි ය.

දැන් $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය සලකමු. මෙහි දී ද ඕනෑ ම පාදයක් ආධාරකය ලෙස ගෙන වර්ගඵලය සෙවිය හැකි ය. මෙහි QR පාදය ආධාරකය ලෙස සැලකුවහොත්, අනුරූප උච්චය වන්නේ PM රේඛාව යි. PMහි දිග වන්නේ QR හා ඊට සම්මුඛ පාදය වන PS සමාන්තර රේඛා අතර දුරයි.

එවිට,
$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= QR \times PM$ බව අපි උගෙන ඇත්තෙමු.

එසේ ම, PQ පාදය ආධාරක පාදය ලෙස සැලකුව හොත් අනුරූප උච්චය වන්නේ RN ය.

එවිට $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= PQ \times RN$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

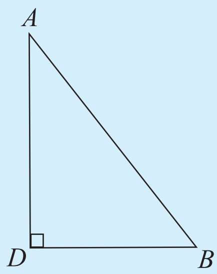
සටහන: ත්‍රිකෝණයක හෝ සමාන්තරාස්‍රයක උච්චයෙහි දිග ද බොහෝ විට උච්චය යන නමින් ම හැඳින්වේ.

මෙම කරුණු අදාළ කර ගනිමින් මීට පෙර ත්‍රිකෝණවල හා සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵලය සෙවීම පිළිබඳ ව උගත් කරුණු මතකයට නඟා ගැනීම පිණිස පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

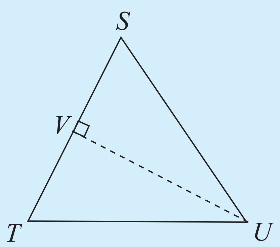
පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් පසු පිටේ දක්වා ඇති වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

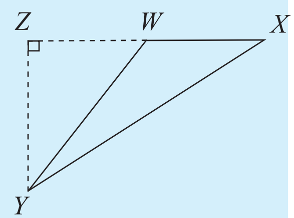
(i)



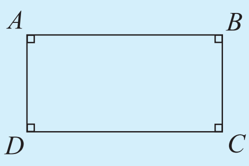
(ii)



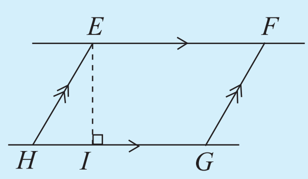
(iii)



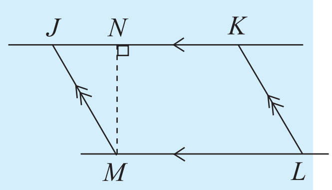
(iv)



(v)



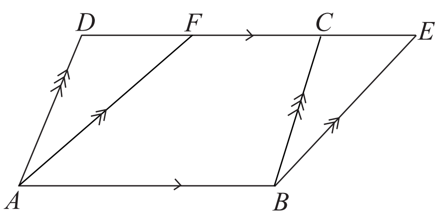
(vi)



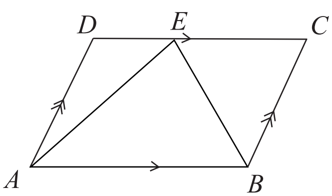
රූපය	ආධාරක පාදය	අනුරූප ලම්බ උස	වර්ගඵලය (පාදවල ගුණිතයක් ලෙස)
(i) *ABD* ත්‍රිකෝණය (ii) *STU* ත්‍රිකෝණය (iii) *WXY* ත්‍රිකෝණය (iv) *ABCD* ඍජුකෝණාස්‍රය (v) *EFGH* සමාන්තරාස්‍රය (v) *JKLM* සමාන්තරාස්‍රය			

8.1 එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර හා ත්‍රිකෝණ

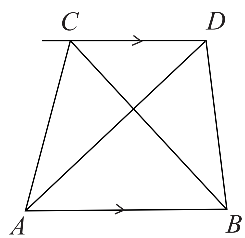
එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එකම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර හා ත්‍රිකෝණ යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් ද යන්න මුලින් ම විමසා බලමු. පහත දී ඇති රූපසටහන්වලට අවධානය යොමු කරන්න.



(i) රූපය



(ii) රූපය



(iii) රූපය

(i) රූපයෙහි දැක්වෙන *ABCD* හා *ABEF* සමාන්තරාස්‍ර දෙක ම පිහිටා ඇත්තේ *AB* හා *DE* නම් රේඛා යුගලය අතර ය. මෙහි දී "අතර" යන්නෙන් අදහස් වන්නේ, එක් එක් සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද දෙකක්, *AB* හා *DE* සමාන්තර රේඛා දෙක මත පිහිටන බව යි. තව ද, එම සමාන්තරාස්‍ර දෙකට ම *AB* පාදය පොදු වේ. මෙවැනි පිහිටීමක දී එම සමාන්තරාස්‍ර දෙක, එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිත ව ඇතැයි කියනු ලැබේ. මෙහි දී *AB* පොදු පාදය, සමාන්තරාස්‍ර දෙකෙහි ම ආධාරකය ලෙස සලකා ඇත. එම පොදු ආධාරකයට අනුරූපව සමාන්තරාස්‍ර දෙකට ම එක ම ලම්බ දුර ඇති බව පැහැදිලි ය. එම ලම්බ දුර වන්නේ *AB* හා *DE* සමාන්තර රේඛා දෙක අතර දුර යි.

(ii) රූපයේ දැක්වෙන්නේ, සමාන්තරාස්‍රයක් හා ත්‍රිකෝණයක්, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර, එක ම ආධාරකයක් සහිත ව පිහිටා ඇති ආකාරය යි. සමාන්තරාස්‍රය *ABCD* ද, ත්‍රිකෝණය *ABE* ද වේ. පොදු ආධාරකය *AB* ය. මෙහි දී ත්‍රිකෝණයේ එක් පාදයක් හා ඊට සම්මුඛ ශීර්ෂය සමාන්තර රේඛා එක එකක් මත පිහිටන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

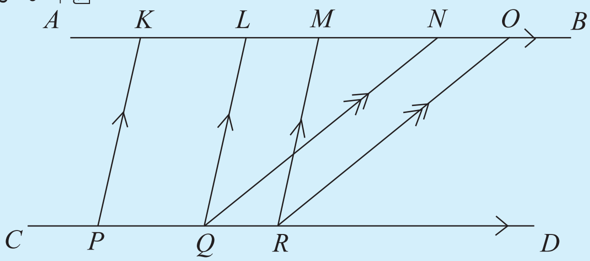
(iii) රූපයේ, දැක්වෙන්නේ එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර, එක ම ආධාරකයක් සහිත ව පිහිටි ත්‍රිකෝණ දෙකක් ය. එම ත්‍රිකෝණ දෙක *ABC* හා *ABD* ය.

8.1 අභ්‍යාසය

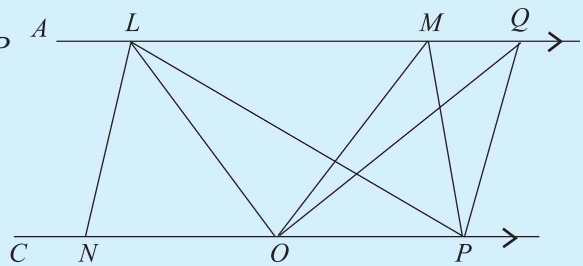
1. දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව,

(i) සමාන්තරාස්‍ර හතරක් නම් කරන්න.

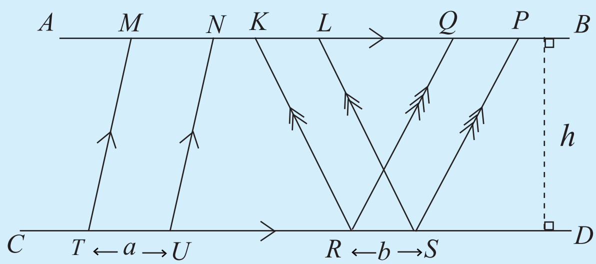
(ii) AB හා CD සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි ආධාරක පාදය QR වූ සමාන්තරාස්‍ර දෙක නම් කරන්න.



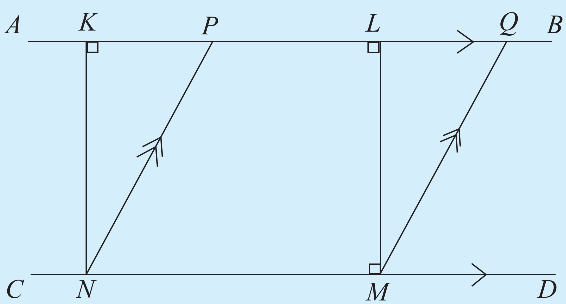
2. රූපයේ දැක්වෙන AQ හා CP සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි එකම OP ආධාරකය සහිත ත්‍රිකෝණ සියල්ල ලියා දක්වන්න.



3. රූපයේ දී ඇති AB හා CD සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර ලම්බ දුර h මගින් ද එක් එක් සමාන්තරාස්‍රයේ ආධාරක පාදයේ දිග a හා b මගින් ද දැක්වේ. එම සංකේත ඇසුරෙන් $PQRS$, $KLSR$ හා $MNUT$ සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල ලියා දක්වන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන AB හා CD සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර, $KLMN$ සෘජුකෝණාස්‍රය හා $PQMN$ සමාන්තරාස්‍රය පිහිටා ඇත. $NM = 10$ cm හා $LM = 8$ cm වේ.



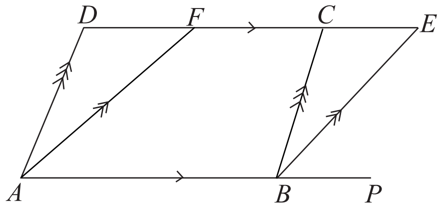
(i) $KLMN$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(ii) $PQMN$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(iii) $KLMN$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය හා $PQMN$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය අතර ඇති සම්බන්ධතාව කුමක් ද?

8.2 එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල

මීළඟට අප සලකා බලන්නේ, එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එකම ආධාරකය සහිතව පවතින සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵල අතර සම්බන්ධය යි. පහත රූපයේ දැක්වෙන සමාන්තරාස්‍ර දෙක සලකන්න.



මෙහි දැක්වෙන $ABCD$ හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍ර දෙකෙහි වර්ගඵල සමාන වේ දැයි විමසා බලමු. ඒ සඳහා මුලින් ම,

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCF$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $+$ AFD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බවත්

$ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCF$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $+$ BEC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බවත්

නිරීක්ෂණය කරන්න.

එමනිසා,

AFD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=$ BEC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

වුව හොත් සමාන්තරාස්‍ර දෙකෙහි වර්ගඵල සමාන විය යුතු බව ඔබට පෙනෙනවා ඇත. ඇත්තවශයෙන් ම මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ. එමනිසා ඒවායේ වර්ගඵල ද සමාන වේ. මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම බව පා.කෝ.පා අවස්ථාව සලකා මෙසේ පෙන්විය හැකි ය.

AFD හා BEC ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$AD = BC$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද)

$AF = BE$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද)

තව ද, $D\hat{A}B = C\hat{B}P$ (අනුරූප කෝණ) හා $F\hat{A}B = E\hat{B}P$ (අනුරූප කෝණ) නිසා, මෙම සමීකරණ දෙක අඩු කිරීමෙන්, $D\hat{A}B - F\hat{A}B = C\hat{B}P - E\hat{B}P$

$D\hat{A}F = C\hat{B}E$ ලෙස ලැබේ.

මේ අනුව. පා.කෝ.පා අවස්ථාව යටතේ, AFD හා BEC ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම වේ.

මේ අනුව, ඉහත සාකච්ඡා කළ පරිදි,

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ලෙස ලැබේ.
මෙම ප්‍රතිඵලය, ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ලියා දක්වමු.

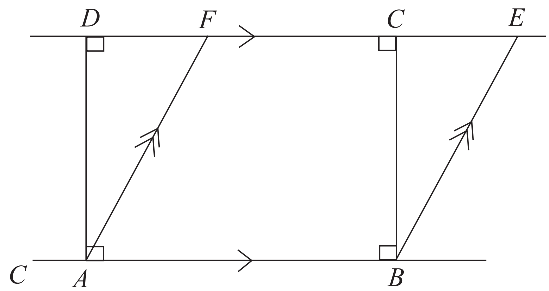
ප්‍රමේයය: එකම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ලබා ගනිමු. සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා පහත දැක්වෙන සූත්‍රය ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී මෙන් ම ඉහත අභ්‍යාසයේ දී ද භාවිත කළේ ය.

සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය = ආධාරකය × ලම්බ උස

මෙම ප්‍රතිඵලය ලැබුණේ කෙසේ දැයි ඔබ මීට කලින් සිතා තිබුණා ද? දැන් අපට ඉහත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් මෙම සූත්‍රය සාධනය කොට පෙන්විය හැකි ය.

පහත දැක්වෙන්නේ, එක ම සමාන්තර රේඛා දෙකක් අතර හා එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රය (එනම් එය සමාන්තරාස්‍රයකි) හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රය යි.

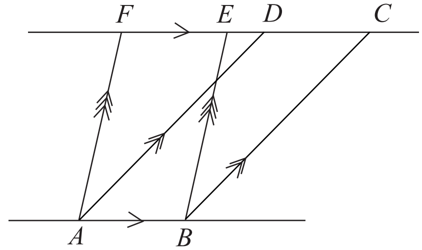


ඉහත ප්‍රමේයය අනුව ඒවායේ වර්ගඵල සමාන වේ.
නමුත්, සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය = දිග × පළල බව අපි දනිමු.
ඒ අනුව,
$ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය
= $AB \times AD$
= AB × සමාන්තර රේඛා දෙක අතර ලම්බ දුර
= සමාන්තරාස්‍රයේ ආධාරකය × ලම්බ දුර

මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් සිදු කරන අයුරු දැන් බලමු.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 80cm^2 ද $AB = 8$ cm ද වේ.



(i) රූපයේ එක ම ආධාරකය මත එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර පිහිටන සමාන්තරාස්‍ර නම් කරන්න.

(ii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය කොපමණ ද?

(iii) AB හා FC සමාන්තර රේඛා අතර ලම්බ උස සොයන්න.

දැන් මෙම කොටස්වලට පිළිතුරු සපයමු.

(i) $ABEF$ හා $ABCD$

(ii) $ABEF$ හා $ABCD$ එක ම ආධාරකය වන AB මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය වන AB හා FC අතර පිහිටන බැවින්, $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ හා $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමාන වේ.

$\therefore$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 80cm^2 වේ.

(iii) සමාන්තර රේඛා අතර ලම්බ උස සෙන්ටිමීටර h යැයි ගනිමු.

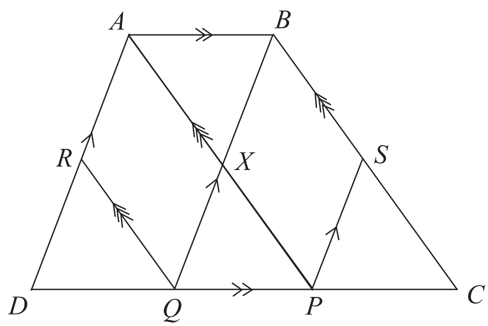
එවිට $ABEF$ වර්ගඵලය $= AB \times h$

$$80 = 8 \times h$$
$$h = 10$$

$\therefore$ සමාන්තර රේඛා අතර ලම්බ උස 10 cm වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු නිදසුනක් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරුවලට අනුව,

(i) $ABQD$ හා $ABCP$ සමාන්තරාස්‍ර බව පෙන්වන්න.

(ii) $ABQD$ හා $ABCP$ වර්ගඵලයෙන් සමාන සමාන්තරාස්‍ර වන බව පෙන්වන්න.

(iii) $SPC\Delta \equiv DQR\Delta$ බව සාධනය කරන්න.

(iv) $AXQR$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $BXPS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය බව සාධනය කරන්න.

(i) $ABQD$ චතුරස්‍රයේ,

$AB//DQ$ (දී ඇත)

$AD//BQ$ (දී ඇත)

සම්මුඛ පාද සමාන්තර වන චතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයක් වන නිසා $ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. එලෙස ම $AB//PC$ හා $AP//BC$ වන නිසා $ABCP$ ද සමාන්තරාස්‍රයකි.

(ii) $ABQD$ හා $ABCP$ සමාන්තරාස්‍ර දෙක,

එක ම ආධාරකය වන AB මත හා, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය වන AB හා DC අතර පිහිටා තිබෙන බැවින්, ඉහත ප්‍රමේයයට අනුව ඒවා වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

$\therefore$ $ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCP$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

(iii) රූපයේ, SPC හා RDQ ත්‍රිකෝණවල

$S\hat{P}C = R\hat{D}Q$ ($SP//AD$, අනුරූප කෝණ)

$S\hat{C}P = R\hat{Q}D$ ($SC//RQ$, අනුරූප කෝණ)

තව ද, $AB = PC$ ($ABCP$ සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද)

$AB = DQ$ ($ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද)

$\therefore PC = DQ$

$\therefore$ $SPC\Delta \equiv DQR\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

(iv) $ABQD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $ABCP$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය (සාධිත යි)

$RDQ\Delta$ වර්ගඵලය $=$ $SPC\Delta$ වර්ගඵලය ($RDQ\Delta \equiv SPC\Delta$ නිසා)

එමනිසා , $ABQD$ වර්ගඵලය $-$ $RDQ\Delta$ වර්ගඵලය $=$ $ABCP$ වර්ගඵලය $-$ $SPC\Delta$ වර්ගඵලය

එනම් රූපය අනුව $ABQR$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $=$ $ABSP$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය

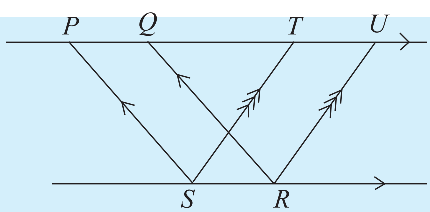
දෙපසින්ම ABX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය අඩු කළ විට

$ABQR$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $-$ $ABX\Delta$ වර්ගඵලය $=$ $ABSP$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $-$ $ABX\Delta$ වර්ගඵලය

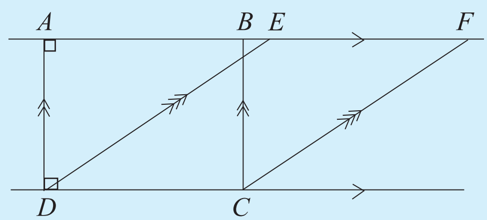
$\therefore$ $AXQR$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $BXPS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

8.2 අභ්‍යාසය

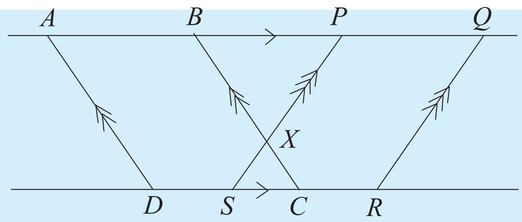
1. රූපයේ දැක්වෙන්නේ PU හා SR සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 40 cm^2 වේ. $TURS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය හේතු සහිතව ලියා දක්වන්න.



2. දී ඇති රූපයේ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් හා $CDEF$ සමාන්තරාස්‍රයක් දැක්වේ. $AD = 7\text{ cm}$ හා $CD = 9\text{ cm}$ නම්, $CDEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය හේතු සහිතව ලියා දක්වන්න.



3. රූපයේ දැක්වෙන්නේ AQ හා DR සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටි $ABCD$ හා $PQRS$ සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. $DS = CR$ බව දී ඇත.

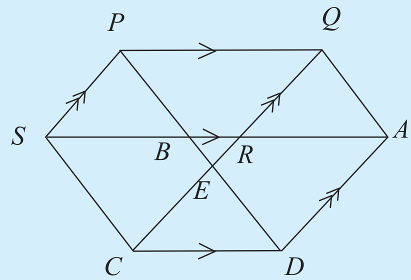


(i) $DC = SR$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $ABXSD$ පංචාස්‍රයේ වර්ගඵලය, $PQRCX$ පංචාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වන බව සාධනය කරන්න.

(iii) $APSD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය, $BQRC$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

4. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව,

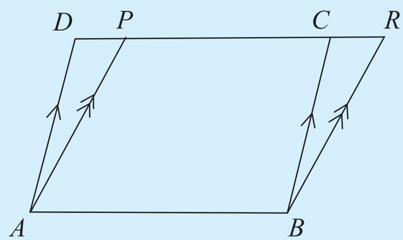


(i) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් නම් කරන්න.

(ii) $ADCR$ සමාන්තරාස්‍රයට වර්ගඵලයෙන් සමාන සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් නම් කරන්න.

(iii) $PECS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයට, $QADE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමාන බව සාධනය කරන්න.

5. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව ADP ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය BRC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

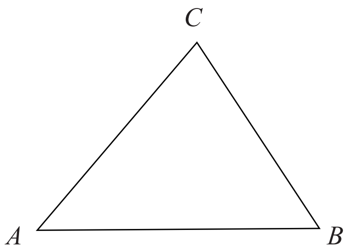


6. $AB = 6$ cm, $D\hat{A}B = 60^0$ හා $AD = 5$ cm වූ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රය නිර්මාණය කරන්න. AB රේඛාවෙන්, සමාන්තරාස්‍රය පිහිටි පැත්තේ ම පිහිටන පරිදි හා එහි වර්ගඵලයට සමාන වන සේ $ABEF$ රොම්බසය නිර්මාණය කරන්න. ඔබේ නිර්මාණයට ඔබ යොදා ගත් ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයය සඳහන් කරන්න.

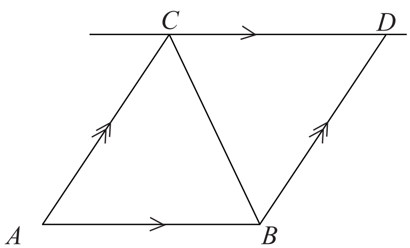
8.3 එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර හා ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල

ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා පහත දැක්වෙන සූත්‍රය ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල සිට ම භාවිත කරමින් ඇත. ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ ආධාරකය $\times$ ලම්බ උස

දැන් අප සූදානම් වන්නේ මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ ඇයි ද යන්න පැහැදිලි කිරීමට යි. පහත දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය සලකමු.



මීළඟ රූපයේ දැක්වෙන අයුරින්, C හරහා, ABට සමාන්තර රේඛාවක් ඇඳ, $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි එම සමාන්තර රේඛාව මත D ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරමු. වෙනත් අයුරකින් පැවසුවහොත්, AB ට සමාන්තරව C හරහා ඇඳි රේඛාවෙන්, AC ට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාවෙන් ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය D ලෙස නම් කරමු.



දැන්, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකි. එයට හේතුව, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණයකින් එම සමාන්තරාස්‍රය අංගසම ත්‍රිකෝණ දෙකකට වෙන් වන නිසා ය. ඒ බව අපි 10 වසරේ සමාන්තරාස්‍ර පාඩම යටතේ උගත්තෙමු.
එමනිසා,

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2}$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

$= \dfrac{1}{2} \times AB \times$ (AB හා CD රේඛා අතර ලම්බ දුර)

$= \dfrac{1}{2} \times AB$ ආධාරකය $\times$ ලම්බ දුර

එනම්, ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සඳහා අපට හුරුපුරුදු සූත්‍රය ලැබී ඇත.

මෙහි දී අප නිරීක්ෂණය කළ

ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2} \times$ $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

යන ප්‍රතිඵලය නැවත සලකන්න. මෙම පාඩමේ 8.2 කොටසේදී අප ඉගෙන ගත්තේ එක ම සමාන්තර රේඛා දෙකක් අතර එක ම ආධාරකයක් සහිත ව පිහිටි සමාන්තරාස්‍රවල

වර්ගඵල සමාන බව යි. එමනිසා, ඉහත රූපයට අදාළව, AB හා CD සමාන්තර රේඛා අතර, AB ආධාරකය සහිතව ඇති වෙනත් ඕනෑ ම සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය ද $ABDC$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ. එනම්,

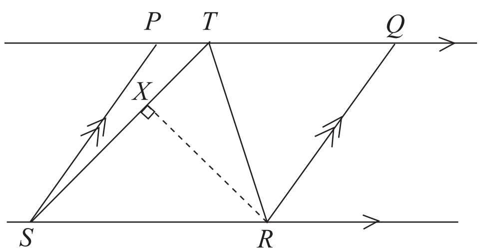
ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times$ (AB හා CD සමාන්තර රේඛා අතර, AB ආධාරකය සහිතව පිහිටි ඕනෑ ම සමාන්තරාස්‍රයක වර්ගඵලය)

මෙම ප්‍රතිඵලය, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය: ත්‍රිකෝණයක් හා සමාන්තරාස්‍රයක්, එක ම ආධාරකය මත හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටා ඇති නම්, එම ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, එම සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩක් වේ.

මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් සිදු කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන්නේ, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර හා එක ම ආධාරකයක් මත පිහිටි $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් හා STR ත්‍රිකෝණයකි. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 60 cm^2 වේ.

(i) හේතු දක්වමින් STR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(ii) $ST = 6$ cm නම්, R සිට ST ට ඇඳි ලම්බයේ දිග සොයන්න.

(i) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය හා STR ත්‍රිකෝණය එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලක් අතර පිහිටන අතර, එක ම ආධාරකය මත පිහිටයි. එමනිසා STR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් හරි අඩකි.

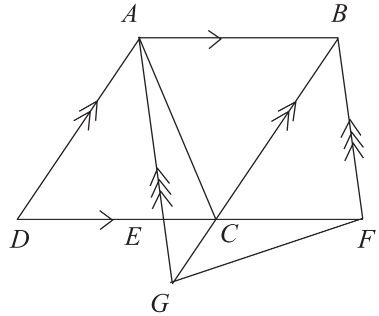
$\therefore$ STR Δ වර්ගඵලය $= 30 \text{ cm}^2$

(ii) STR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times ST \times RX$

$$\therefore \; 30 = \frac{1}{2} \times 6 \times RX$$

$$\therefore \; \underline{\underline{RX = 10 \text{ cm}}}$$

නිදසුන 2



E යනු $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ DC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AE ට සමාන්තර ව B සිට අඳින ලද රේඛාවට, දික් කළ DC පාදය F හිදි හමු වේ. දික් කළ AE හා දික් කළ BC රේඛා G හිදී හමු වේ.

(i) $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(ii) $ABCD$ හා $ABFE$ සමාන්තරාස්‍ර වර්ගඵලයෙන් සමාන බව
(iii) ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = BFG ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බව

සාධනය කරන්න.

(i) $ABFE$ චතුරස්‍රයේ,
$AE//BF$ (දී ඇත)
$AB//EF$ (දී ඇත)
$\therefore$ $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයකි. (සම්මුඛ පාද සමාන්තර නිසා)

(ii) $ABCD$ හා $ABFE$ සමාන්තරාස්‍ර දෙක,
AB හා DF එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර හා AB එක ම ආධාරකය ඇතිව පිහිටා තිබේ.
$\therefore$ ප්‍රමේයය අනුව $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

(iii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රය හා ACD ත්‍රිකෝණය, DC හා AB සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර හා DC එක ම ආධාරකය මත පිහිටා තිබේ.
$\therefore$ ප්‍රමේයය අනුව, $\frac{1}{2}$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

එසේම, $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රය හා BFG ත්‍රිකෝණය BF හා AG සමාන්තර රේඛා යුගල අතර හා එක ම ආධාරකය BF මත පිහිටා තිබේ.

එවිට, $\frac{1}{2}$ $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = BFG ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

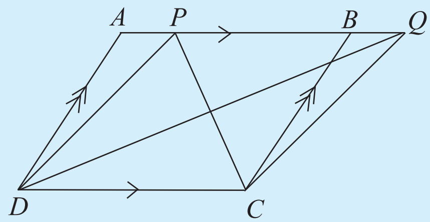
නමුත්, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය නිසා

එවිට, $\frac{1}{2}$ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $\frac{1}{2}$ $ABFE$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

$\therefore$ ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = BFG ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

8.3 අභ්‍යාසය

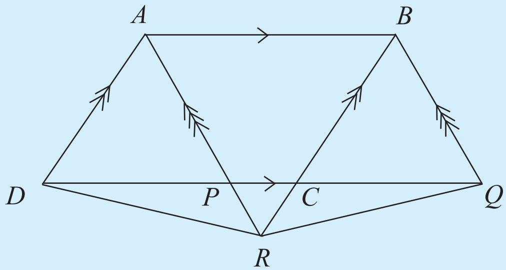
1. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 50 cm^2 වේ.



(i) PDC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

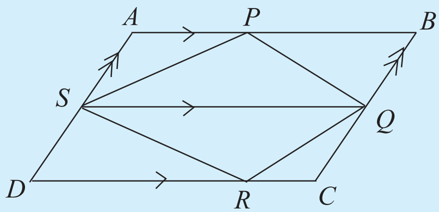
(ii) DCQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

2.



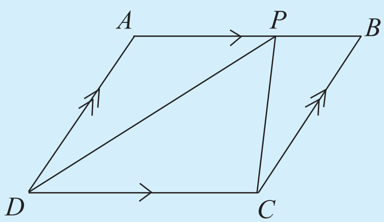
$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, DC පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. AP ට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාව දික් කළ DC පාදයට Q හිදී හමු වේ. දික් කළ AP හා දික් කළ BC රේඛා R හි දී හමු වේ. ADR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය BQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

3.



රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, AD පාදය Sහි දී ද, BC පාදය Qහි දී ද හමු වන සේ, AB ට සමාන්තරව SQ ඇඳ තිබේ. $PQRS$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.

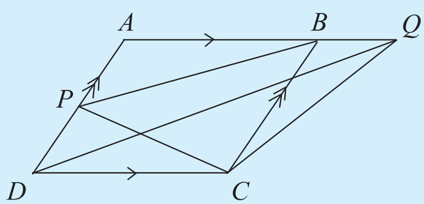
4.



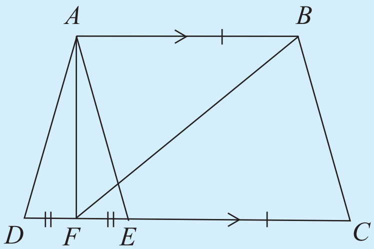
P යනු රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AB පාදය මත පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි.

$APD\Delta$ ව.ඵ. + $BPC\Delta$ ව.ඵ. = $DPC\Delta$ ව.ඵ බව සාධනය කරන්න.

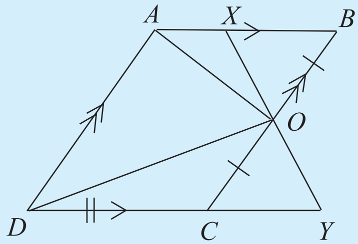
5.



රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AD පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය ද, දික් කළ AB පාදය මත Q ලක්ෂ්‍යය ද පිහිටා ඇත. $CPB\Delta$ ව.ඵ. = $CQD\Delta$ ව.ඵ. බව සාධනය කරන්න.

6. 

$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ $AB \,//\, DC$ හා $DC > AB$ වේ. $AB = CE$ වන පරිදි CD පාදය මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ. AFE ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, ADF ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන වන පරිදි DE පාදය මත F ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. $ABFD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය, $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.

7. 

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ. X යනු AB පාදය මත පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කළ XO හා දික් කළ DC රේඛා Y හිදී හමු වේ.

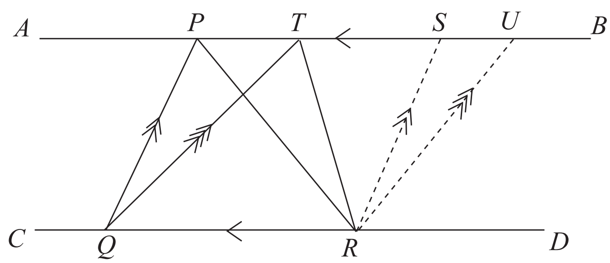
(i) BOX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = COY ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය බව

(ii) $AXYD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය = $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය බව

(iii) $AXYD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය, ADO ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව සාධනය කරන්න.

8.4 එක ම සමාන්තර රේඛා අතර, එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල

රූපයේ දැක්වෙන පරිදි AB හා CD සමාන්තර රේඛා දෙක අතර QR එක ම ආධාරකය සහිතව පිහිටි ඕනෑ ම PQR හා TQR ත්‍රිකෝණ දෙක සලකන්න.



ඉහත 8.3 කොටසේ සාකච්ඡා කළ පරිදි

PQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2}$ $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

TQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2}$ $TQRU$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

එහෙත්, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලක් අතර, QR එක ම ආධාරකය ඇතිව පිහිටි සමාන්තරාස්‍ර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $TQRU$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

$\therefore \frac{1}{2}$ $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය = $\frac{1}{2}$ $TQRU$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

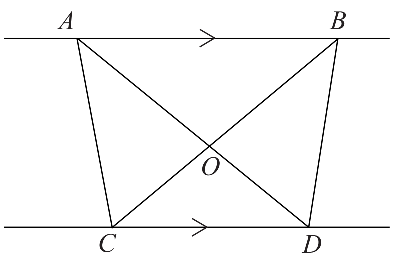
එනම්, PQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = TQR ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

මේ අනුව QR එක ම ආධාරකය ඇතිව, PU හා QR එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලය අතරේ පිහිටි PQR හා TQR ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

ප්‍රමේයය: එක ම ආධාරකයක් මත, හා එක ම සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

මෙම හඳුනාගත් ප්‍රමේයය භාවිත කරමින් ගැටලු විසඳන අයුරු පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ $AB//CD$ වේ.

(i) ACD ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න. ඔබේ පිළිතුරට හේතු වූ ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයය ලියා දක්වන්න.

(ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 30 cm^2 නම්, ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(iii) AOC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, BOD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

(i) BCD ත්‍රිකෝණය
එක ම ආධාරකය මත, එක ම සමාන්තර රේඛා යුගල අතර පිහිටි ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

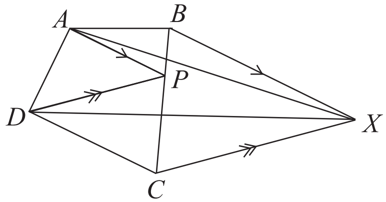
(ii) ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= 30\text{ cm}^2$

(iii) $ACD\Delta$ වර්ගඵලය $= BCD\Delta$ වර්ගඵලය (CD එක ම ආධාරකය හා $AB//CD$)

රූපය අනුව මෙම ත්‍රිකෝණ දෙකට ම COD ත්‍රිකෝණය පොදු වේ. එම කොටස ඉවත් කළ විට,

$$ACD\Delta - COD\Delta = BCD\Delta - COD\Delta$$
$$\therefore AOC\Delta = BOD\Delta$$

නිදසුන 2



$ABCD$ චතුරස්‍රයේ, BC පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. AP ට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාවත්, DP ට සමාන්තරව C හරහා ඇඳි රේඛාවත් Xහි දී හමුවේ. $ADX\Delta$ වර්ගඵලය, $ABCD$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වන බව සාධනය කරන්න.

සාධනය : AP හා BX සමාන්තර රේඛා යුගලය අතර, AP ආධාරකය ඇතිව, APB හා APX ත්‍රිකෝණ පිහිටා ඇති නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$APB\Delta = APX\Delta \quad \text{———} \; (1)$$

එසේම, $DP//CX$ නිසා,

$$DPC\Delta = DPX\Delta \quad \text{———} \; (2)$$

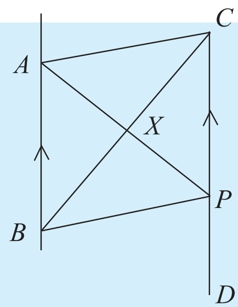
$$(1) + (2), \; ABP\Delta + DPC\Delta = APX\Delta + DPX\Delta$$

දෙපසටම $ADP\Delta$ වර්ගඵලය එකතු කරමු.

එවිට, $ABP\Delta + DPC\Delta + ADP\Delta = APX\Delta + DPX\Delta + ADP\Delta$

$ABCD$ චතුරස්‍රයයේ වර්ගඵලය $=$ ADX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

8.4 අභ්‍යාසය

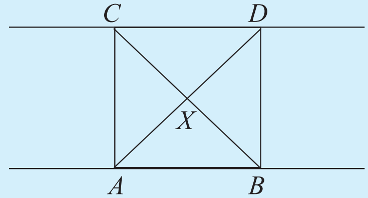


1. රූපයේ දැක්වෙන AB හා CD සමාන්තර රේඛා දෙක අතර පිහිටි, ABP ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 25 cm^2 වේ.

(i) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

(ii) ABX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 10 cm^2 නම් ACX ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කීය ද?

(iii) ACX හා BPX ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල අතර සම්බන්ධය කුමක් දැයි හේතු සහිතව පැහැදිලි කරන්න.

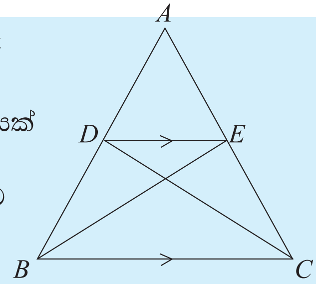


2. රූපයේ දැක්වෙන $AXC\Delta$ හා $BXD\Delta$ වර්ගඵලයෙන් සමාන වේ.

(i) $ABC\Delta$ හා $ABD\Delta$ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව

(ii) $AB // CD$ බව සාධනය කරන්න.

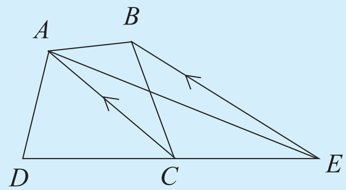
3. *ABC* ත්‍රිකෝණයේ *AB* පාදය *D*හි දී ද *AC* පාදය *E*හි දී ද හමු වන සේ, *BC* පාදයට සමාන්තරව *DE* ඇඳ ඇත.



(i) *BED* ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) *ABE* හා *ADC* ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.

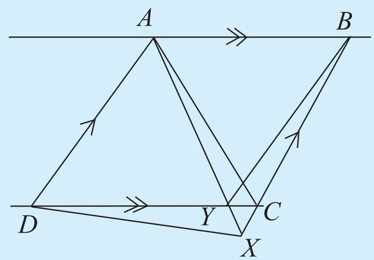
4. *ABCD* චතුරස්‍රයේ, *AC* විකර්ණයට සමාන්තරව *B* හරහා ඇඳි රේඛාව, දික් කළ *DC* රේඛාවට *E*හි දී හමුවේ.



(i) *ABC* ත්‍රිකෝණයට වර්ගඵලයෙන් සමාන ත්‍රිකෝණයක් නම් කරන්න. පිළිතුරට හේතු දක්වන්න.

(ii) *ABCD* චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, *ADE* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

5. *ABCD* සමාන්තරාස්‍රයේ, *A* සිට අඳින ලද ඕනෑ ම රේඛාවක් *DC* පාදය *Y*හි දී ද දික්කල *BC* පාදය *X*හි දී ද කපයි.



(i) *DYX* හා *AYC* ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව

(ii) *BCY* හා *DYX* ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.

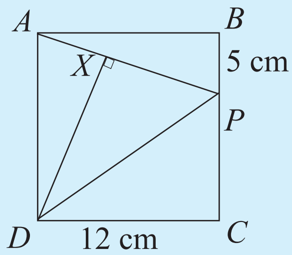
6. *ABCD* සමාන්තරාස්‍රයේ, *BC* පාදය මත *Y* ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. දික් කළ *AB* රේඛාවත්, දික් කළ *DY* රේඛාවත්, *X*හි දී හමු වේ. *AXY* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය *BCX* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයට සමාන බව සාධනය කරන්න.

7. *BC* යනු 8 cm දිග අචල සරල රේඛා ඛණ්ඩයකි. *ABC* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 40 cm^2 වන සේ වූ *A* ලක්ෂ්‍යයේ පථය දළ සටහනක් මගින් විස්තර කරන්න.

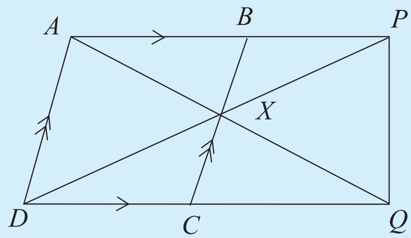
8. *AB* = 8 cm, *AC* = 7 cm හා *BC* = 4 cm වූ *ABC* ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. *AB* වලින් *C* පිහිටි පැත්තේ ම *P* පිහිටන පරිදිත්, වර්ගඵලයෙන් *ABC* ත්‍රිකෝණයට සමාන වන පරිදිත්, *PA* = *PB* වන සේත් වූ *PAB* ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. $ABCD$ සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිග 12 cm වේ. $BP = 5$ cm වන සේ, BC පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ. D සිට AP ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය X නම් DXහි දිග සොයන්න.



2. X යනු $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, BC පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කල DX පාදයට දික් කළ AB පාදය Pහි දී ද දික් කළ AX පාදයට දික් කළ AX පාදයට දික් කළ DC පාදය Qහි දී ද හමු වේ. PXQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලයෙන් අඩක් බව සාධනය කරන්න.



3. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ Oහි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. SR පාදය මත A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. POQ ත්‍රිකෝණයේ හා PAQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵල අතර අනුපාතය සොයන්න.

4. $ABCD$ හා $ABEF$ යනු AB පාදයෙහි දෙපැත්තේ අඳින ලද, වර්ගඵලයෙන් අසමාන සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි.

(i) $DCEF$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

(ii) $DCEF$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය, $ABCD$ හා $ABEF$ සමාන්තරාස්‍රවල වර්ගඵලයන්ගේ එකතුවට සමාන බව සාධනය කරන්න.

5. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ, AB පාදය E හිදී ද AD පාදය F හිදී ද ඡේදනය වන සේ, BD ට සමාන්තරව EF ඇඳ ඇත.

(i) BEC ට හා DFC ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව

(ii) AEC ට හා AFC ත්‍රිකෝණ වර්ගඵලයෙන් සමාන බව සාධනය කරන්න.