11 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

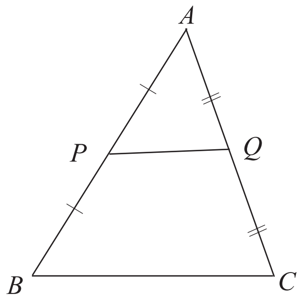
මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය අවබෝධ කර ගැනීමට
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා විලෝමය භාවිතයෙන් විවිධ ගණනය කිරීමට හා අනුමේය සාධනය කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

11.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාදවල දිග ආශ්‍රිත ප්‍රතිඵලයක්, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන් ලබා දෙයි. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයෙහි AB පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද AC පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ද ලෙස ගෙන ඇත.



එවිට,

$AP = PB$ ද $AQ = QC$ ද වේ. එය,

$AP = PB = \frac{1}{2}AB$ හා $AQ = QC = \frac{1}{2}AC$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

PQ රේඛා ඛණ්ඩයෙන් දැක්වෙන්නේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන රේඛා ඛණ්ඩය යි.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර, දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.

ඉහත රූපසටහනට අදාළ ව, ප්‍රමේයයට අනුව,

$PQ \,//\, BC$ හා
$PQ = \frac{1}{2}BC$ වේ.

මෙම ප්‍රමේයය ඒත්තු ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙමු.

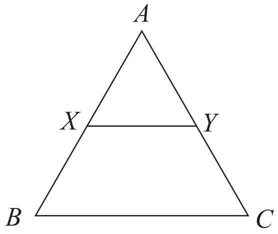
ක්‍රියාකාරකම 1

$AB = 6$ cm ද $BC = 7$ cm ද $CA = 8$ cm ද වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණය ඇඳ, AB හි හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

(i) PQ හි දිග මැන, එය BC හි දිගෙන් හරි අඩක් බව තහවුරු කර ගන්න.
(ii) විහිත චතුරස්‍රය ආධාරයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ PQ හා BC සමාන්තර දැයි විමසා බලන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව $PQ = \frac{1}{2}BC$ බව ද $PQ//BC$ බව ද ඔබට පෙනෙන්නට ඇත. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් ඇතුළත් නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන්නේ පාදයක දිග 12 cm වූ ABC නම් සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ.

(i) XY හි දිග
(ii) $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

සොයන්න.

(i) මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව
$XY//BC$ හා $XY = \frac{1}{2}BC$ වේ.

$$\therefore XY = \frac{1}{2} \times 12$$
$$= 6$$

$\therefore$ XY හි දිග 6 cm වේ.

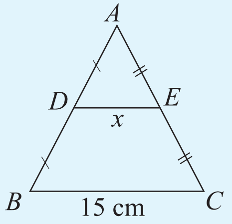
(ii) $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= BC + CY + XY + XB$
$= 12 + 6 + 6 + 6$
$= 30$

$\therefore$ $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය 30 cm වේ.

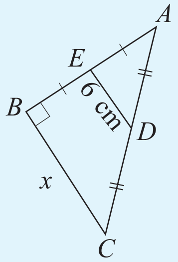
නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

11.1 අභ්‍යාසය

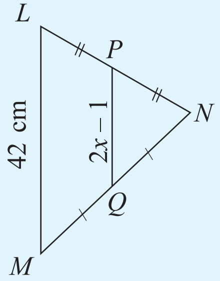
1. එක් එක් රූපයේ දැක්වෙන x හි අගය සොයන්න.



(i)

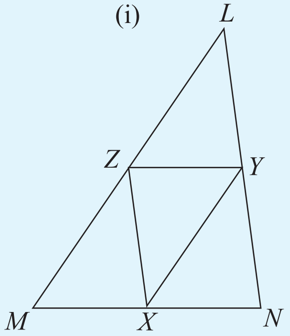


(ii)



(iii)

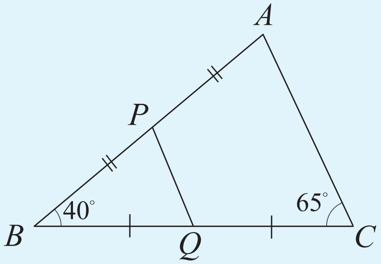
2.



දී ඇති රූපයේ X, Y හා Z යනු MN, NL හා LM පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. $MN = 8$ cm, $NL = 10$ cm හා $LM = 12$ cm නම්, XYZ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

3. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC හා BD විකර්ණ පිළිවෙළින් 15 cm හා 10 cm වේ. AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

4.

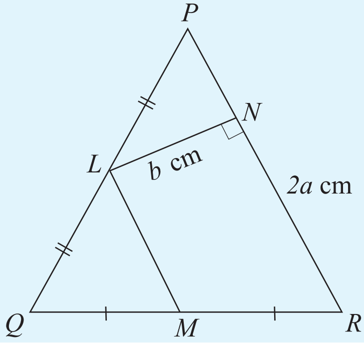


රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන්

(i) $AB = 8$ cm ද $BC = 10$ cm ද ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 24 cm ද වේ නම්, PBQ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

(ii) $\hat{B} = 40^\circ$ ද $\hat{C} = 65^\circ$ ද නම් $PQCA$ චතුරස්‍රයේ ඉතිරි කෝණවල අගය සොයන්න.

5.

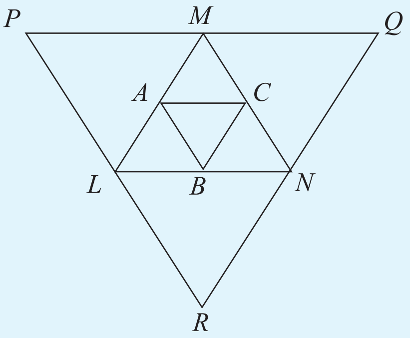


රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ QR හා QP පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් M හා L වේ. $QR + QP = 16$ cm ද $PR = 2a$ cm හා $LN = b$ cm ද $L\hat{N}R = 90^\circ$ බව ද දී ඇත.

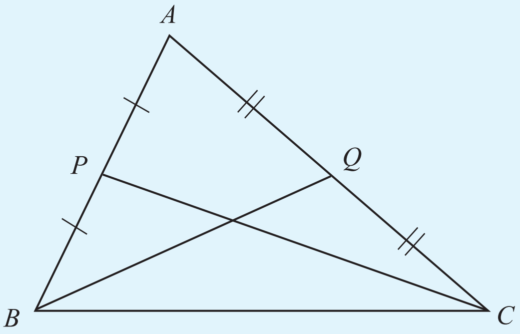
(i) $LMRP$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය a හා b ඇසුරෙන්

(ii) $LMRP$ හි වර්ගඵලය a හා b ඇසුරෙන්

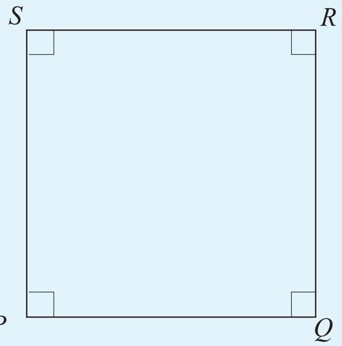
සොයන්න.

6. 

රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන M, N හා L යා කිරීමෙන් LMN ත්‍රිකෝණය ද එහි පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන C, B, A යා කිරීමෙන් CBA ත්‍රිකෝණය ද ලබා ගෙන ඇත. PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 12 cm වේ නම්, ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

7. 

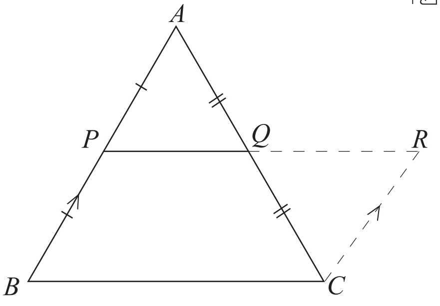
රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q වේ නම් PBC හා BQC ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලය සමාන බව පෙන්වන්න.

8. 

රූපයේ දැක්වෙන $PQRS$ සමචතුරස්‍රයේ පරිමිතිය 60 cm වේ. එහි පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයා, කරණි ආකාරයෙන් තබන්න.

11.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය සාධනය

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.



දත්තය: ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: $PQ//BC$ බව හා

$PQ = \frac{1}{2} BC$ බව

නිර්මාණය: දික්කළ PQට R හි දී හමු වන සේ BPට සමාන්තර ව C හරහා රේඛාවක් ඇඳීම.

සාධනය: APQ සහ QCR ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$AQ = QC$ (AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q නිසා)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ ($AP//RC$ නිසා ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore APQ\,\Delta \equiv QCR\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

$\therefore AP = RC$ සහ $PQ = QR$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

නමුත් $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

මේ අනුව, $BCRP$ චතුරස්‍රයේ $PB = RC$ සහ $PB//RC$

$\therefore BCRP$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore PR = BC$ සහ $PR//BC$ වේ.

නමුත් $PQ = QR$

$\therefore PQ = \frac{1}{2} PR$

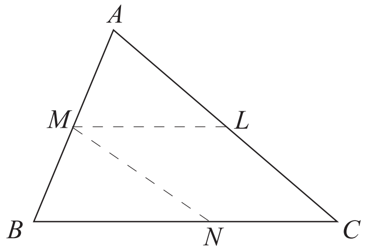
$= \frac{1}{2} BC$ ($PR = BC$ නිසා)

$\therefore PQ//BC$ සහ $PQ = \frac{1}{2} BC$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ABC ත්‍රිකෝණයේ *AB, BC* හා *CA* පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් *M, N* හා *L* වේ. *NCLM* සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව $ML = \frac{1}{2} BC$

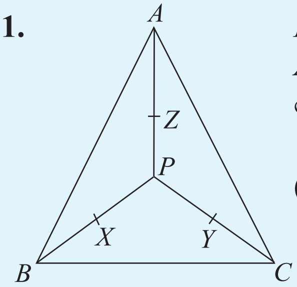
$= NC$ (*N* යනු *BC* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා)

$ML // BC$ වේ.

එමනිසා, *NCLM* චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද යුගලක් සමාන හා සමාන්තර වේ. එමනිසා, *NCLM* යනු සමාන්තරාස්‍රයකි.

11.2 අභ්‍යාසය

1.

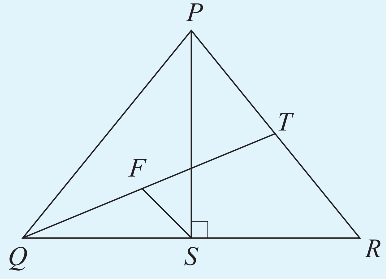


P යනු *ABC* ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තරයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් වේ. *AP, BP* හා *CP* රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් හා *Z, X* හා *Y* වේ.

(i) $B\hat{A}C = X\hat{Z}Y$, $A\hat{C}B = Z\hat{Y}X$ හා $C\hat{B}A = Y\hat{X}Z$ බව පෙන්වන්න.

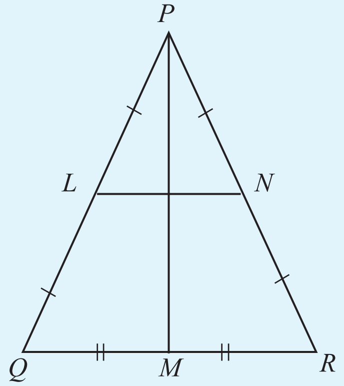
(ii) *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය *XYZ* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

2.



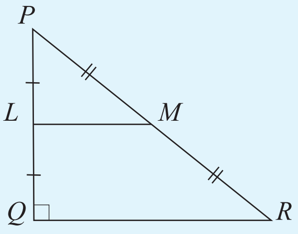
රූපයේ දැක්වෙන *PQR* ත්‍රිකෝණයේ $Q\hat{P}R$ කෝණයේ සමච්ඡේදකයට *QR* පාදය *S* හි දී හමු වන්නේ $PS \perp QR$ වන පරිදිය. *QT* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය *F* වේ. $FS // TR$ බව පෙන්වන්න.

3.



රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව, $PM \perp LN$ බව පෙන්වන්න.

4.



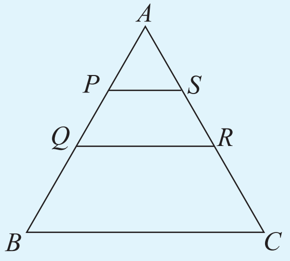
රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,

(i) $PLM \Delta \equiv QLM \Delta$ බව

(ii) $LQRM$ හි වර්ගඵලය $= \dfrac{3}{4} PQR \Delta$ වර්ගඵලය බව

පෙන්වන්න.

5.



දී ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් Q හා R වේ. AQ හා AR රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා S වේ. $4\ PS = BC$ බව පෙන්වන්න.

6.

(i) ඕනෑ ම චතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) ඕනෑ ම සෘජුකෝණාස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය රොම්බසයක් බව සාධනය කරන්න.

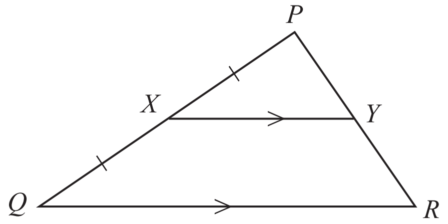
(iii) ඕනෑ ම සමචතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමචතුරස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(iv) ඕනෑ ම රොම්බසයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් සෑදෙන චතුරස්‍රය සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

11.3 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙහි විලෝමය පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.



රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයෙහි X යනු PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි (එනම් $PX = XQ$ වේ). $XY // QR$ වන ලෙස XY ඇඳ ඇත. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව Y යනු PR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි. එනම්,

$$PY = YR \text{ වේ.}$$

මෙම ප්‍රමේයය තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

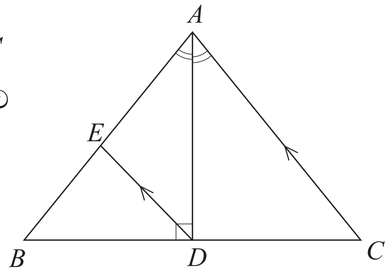
ක්‍රියාකාරකම 2

- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm හා $RP = 7$ cm වන පරිදි PQR ත්‍රිකෝණය අඳින්න.
- PQ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X ලෙස ලකුණු කරන්න.
- X හරහා QRට සමාන්තර ව රේඛාවක් ඇඳ එම රේඛාව PR පාදය හමු වන ලක්ෂ්‍යය Y ලෙස නම් කරන්න.
- PY හා YR දිග මැන PY හා YR දිග අතර ඇති සම්බන්ධය ලියන්න.
- මෙලෙස X හරහා PR පාදයට සමාන්තර ව රේඛාවක් ඇඳ එම රේඛාව QR පාදය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය Z ලෙස නම් කරන්න. QZ හා ZR දිග මනින්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව $PY = YR$ ද $QZ = ZR$ ද බව ඔබට පෙනෙන්නට ඇත. එනම් ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වන පාදය සමච්ඡේද වන බව ඔබට තහවුරු වන්නට ඇත.

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයේ යෙදීම් කිහිපයක් නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C$ කෝණයේ සමච්ඡේදකයට BC පාදය D හි දී හමු වේ. $A\hat{D}B = 90^\circ$ වේ. D හරහා CAට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව AB පාදය E හි දී හමු වේ.

(i) $ADB\,\Delta \equiv ADC\,\Delta$ බව
(ii) $BE = EA$ බව

පෙන්වන්න.

(i) ADB සහ ADC ත්‍රිකෝණවල

$B\hat{A}D = C\hat{A}D$ ($B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකය AD නිසා)

AD පොදු පාදය වේ.

$A\hat{D}B = A\hat{D}C$ ($AD \perp BC$)

$\therefore\ ABD\,\Delta \equiv ADC\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා)

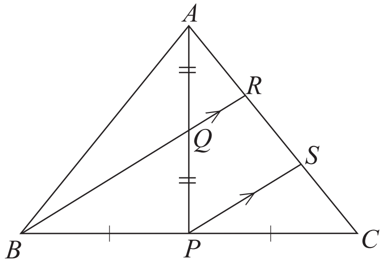
(ii) $BD = DC$ (ADB හා ADC අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

$BD = DC$ හා $AC \,//\, DE$ බැවින්

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව BAC ත්‍රිකෝණයෙහි

$\underline{\underline{BE = EA}}$

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද AP රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ද වේ. දික්කළ BQ රේඛාවට AC පාදය R හි දී හමු වේ. BRට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට AC පාදය S හි දී හමු වේ. $AC = 15$ cm වේ නම්, AS දිග සොයන්න.

APS ත්‍රිකෝණයේ $AQ = QP$ ද $QR//PS$ වේ.
එමනිසා, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව

$AR = RS$ ——— ①

BRC ත්‍රිකෝණයේ $BP = PC$ ද $BR//PS$ ද වේ.
එමනිසා, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව

$RS = SC$ ——— ②

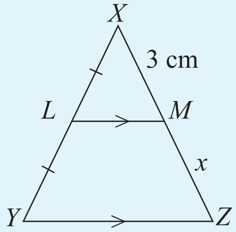
① හා ② ට අනුව $AR = RS = SC$ වේ.

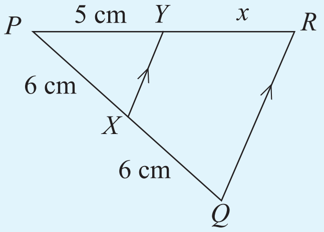
$$\therefore \; AS = \frac{2}{3} AC$$
$$= \frac{2}{3} \times 15$$
$$= 10$$

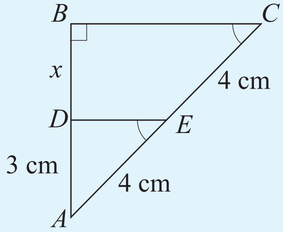
එමනිසා, AS හි දිග 10 cm වේ.

11.3 අභ්‍යාසය

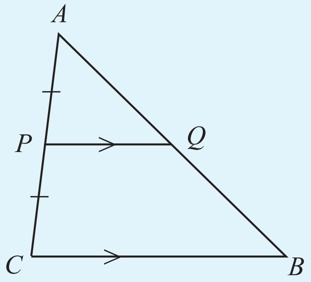
1. එක් එක් රූපයේ දැක්වෙන x හි අගය සොයන්න.





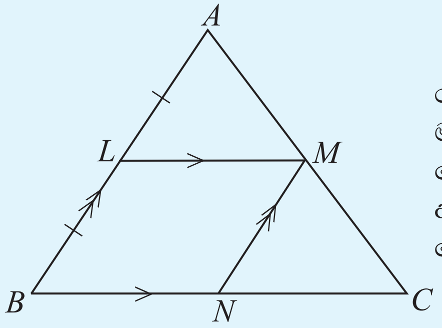


2.



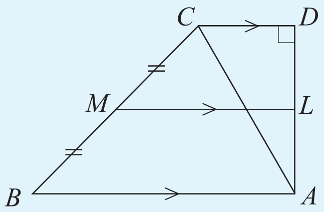
AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද $BC = 12$ cm, $AB = 15$ cm ද $PQ//CB$ ද වේ නම්,
(i) QB දිග
(ii) PQ දිග
සොයන්න.

3.



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වන අතර $LM//BC$ ද $MN//AB$ ද වේ. $AB = 10$ cm ද $AM = 7$ cm ද $BC = 12$ cm ද නම් MC දිග හා $BNML$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

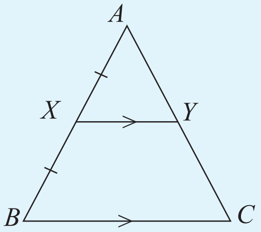
4.



රූප සටහනෙහි දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AC = 10$ cm හා $AD = 8$ cm නම්
(i) DC දිගත්
(ii) $ML = 10$ cm නම් $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයත්
සොයන්න.

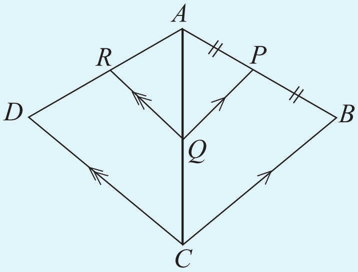
නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

5.



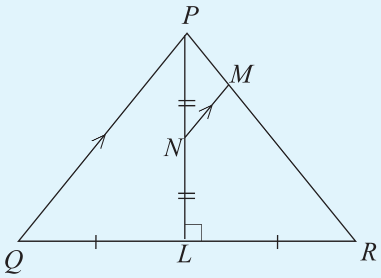
රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 30 cm වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය සොයන්න.

6.



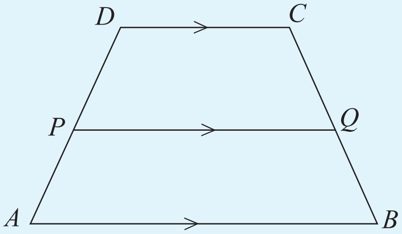
රූපයේ දැක්වෙන ABC හා ADC ත්‍රිකෝණ, සමපාද ත්‍රිකෝණ වන අතර $AB = 20$ cm වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $PQRDCB$ කොටසේ පරිමිතිය සොයන්න.

7.



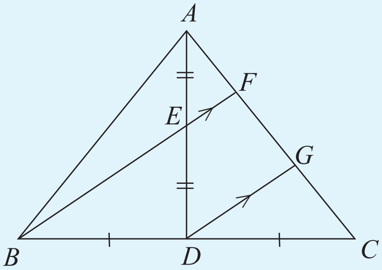
රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් $PQ = 20$ cm නම් MN දිග සොයන්න.

8.



රූපයේ දැක්වෙන දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් PQ හි දිග AB හා DCහි දිග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

9.



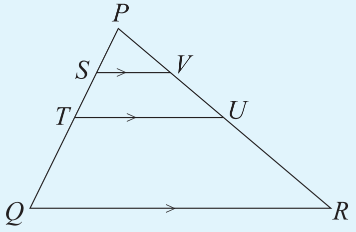
රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග x cm ද $EF = y$ cm ද ලෙස ගෙන ලකුණු කර ඇති තොරතුරු අනුව

(i) $EDGF$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

(ii) $BDGF$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

(iii) $BDGA$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

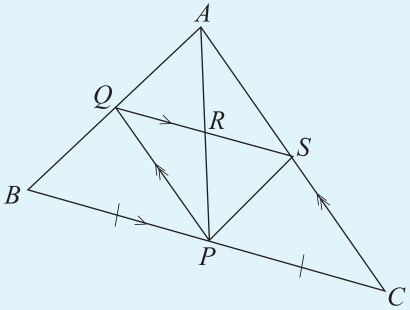
x හා y ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

10. 

දී ඇති රූපයේ PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T ද PT හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S ද වේ. S හා T හරහා QRට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛා PR පාද පිළිවෙළින් V හා U හි දී හමු වේ.

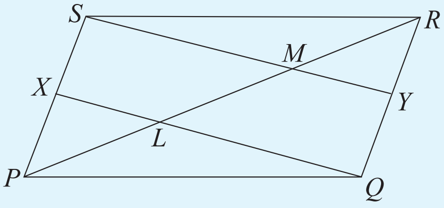
(i) $PV = \frac{1}{4}PR$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $SV : QR$ සොයන්න.

11. 

රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AR = RP$ බවත් $PS // BQ$ බවත් පෙන්වන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

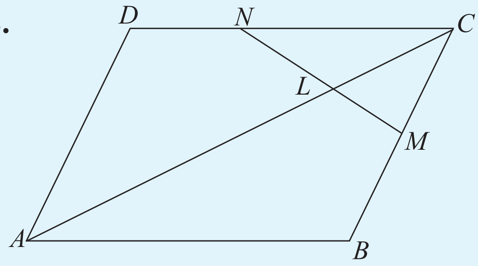
1. 

$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ PS හා QR පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X හා Y වේ. XQ හා SY රේඛා පිළිවෙළින් L හා M හි දී PR විකර්ණය හමු වේ.

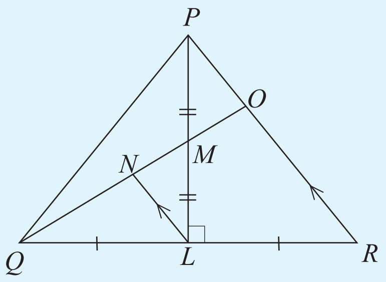
(i) $XQYS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

(ii) $PM = \frac{2}{3}PR$ බව

සාධනය කරන්න.

2. 

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC හා CD පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් M හා N වේ. $LC = \frac{1}{4}AC$ බව පෙන්වන්න.

3. 

රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන්

(i) $POM\,\Delta \equiv NLM\,\Delta$ බව
(ii) $PNLO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(iii) $QN = NO$ බව
(iv) $MO = \dfrac{1}{4}\,QO$ බව

පෙන්වන්න.

4. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වේ. එහි විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. PQ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වන අතර LO රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. දික්කල PT රේඛාව හා QR රේඛාව Y හි දී හමු වේ.

(i) $PT = TY$ බව
(ii) $PLYO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(iii) $4\,LT = QR$ බව

පෙන්වන්න.

5. PQR ත්‍රිකෝණයේ PR හා PQ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X හා Y වේ. QX හා YR රේඛා L හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. Q හරහා YRට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව දික්කල PL පාදය M හි දී හමු වේ. LM හා QR රේඛා N හි දී ඡේදනය වේ.

(i) $PL = LM$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $MR // QX$ බව පෙන්වන්න.
(iii) $QMRL$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.
(iv) $\dfrac{PL}{PN}$ හි අගය සොයන්න.