19 න්‍යාස

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- න්‍යාසයක් හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාසයක, අවයව සහ ගණය හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාස එකතු කිරීම සහ අඩු කිරීම හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීමට
- න්‍යාසයක් තවත් න්‍යාසයකින් ගුණ කිරීමට
- න්‍යාස ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

19.1 න්‍යාස හැඳින්වීම

න්‍යාස පිළිබඳ අදහස1854 දී බ්‍රිතාන්‍ය ගණිතඥයෙකු වූ ආතර් කේලි විසින් හඳුන්වා දෙන ලදි. සරල උදාහරණයක් මගින් න්‍යාස හඳුනා ගනිමු.

වාර පරීක්ෂණයක දී ගණිතය සහ විද්‍යාව යන විෂයන් සඳහා විමල්, ෆාරුක් හා රාධා ලබා ගත් ලකුණු පහත වගුවේ දැක්වේ.

	ගණිතය	විද්‍යාව
විමල්	75	66
ෆාරුක්	72	70
රාධා	63	81

වගුවේ ඇති සංඛ්‍යාත්මක අගයන්, පහත දැක්වෙන ආකාරයට න්‍යාසයකින් දැක්විය හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 75 & 66 \\ 72 & 70 \\ 63 & 81 \end{pmatrix}$$

මෙහි තීරවලින් විෂයනුත් පේළිවලින් ශිෂ්‍යයනුත් දැක්වේ. එසේ ම, පහත දැක්වෙන පරිදි ද න්‍යාස ආකාරයෙන් දැක්විය හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 75 & 72 & 63 \\ 66 & 70 & 81 \end{pmatrix}$$

මෙහි, තීරු මගින් ශිෂ්‍යයනුත් පේළි මගින් විෂයනුත් දැක්වේ.

මෙලෙස පේළි සහ තීරු ආකාරයෙන් සැකසූ සංඛ්‍යා වැලක් **න්‍යාසයක්** ලෙස හැඳින්වේ.

පහත දැක්වෙන්නේ න්‍යාස සඳහා නිදසුන් කිහිපයකි.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයක අඩංගු සංඛ්‍යාවලට න්‍යාසයේ අවයව යයි කියනු ලැබේ. අවයව සංඛ්‍යා ආකාරයෙන් මෙන් ම වීජීය සංකේත හෝ ප්‍රකාශන ලෙස ද තිබිය හැකි ය.

න්‍යාසයක් නම් කරනු ලබන්නේ ඉංග්‍රීසි ලොකු අකුරු (Capital letters) වලිනි. අවයව සඳහා විජීය සංකේත යොදන අවස්ථාවල, න්‍යාසයේ අවයව ඉංග්‍රිසි කුඩා අකුරෙන් (Simple letters) දක්වයි.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන්නේ න්‍යාස තුනක් නම් කර ඇති ආකාරය යි.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

නිදසුන 2

කාටිසීය බණ්ඩාංක තලයක පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල බණ්ඩාංක (0, 5) (4, 3) වේ. මෙම තොරතුරු න්‍යාසයකින් දක්වන්න. එය P ලෙස නම් කරන්න.
වගුවක් ලෙස

	A	B
x	0	4
y	5	3

න්‍යාසයක් ලෙස

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

න්‍යාසයක ගණය හා විශේෂ න්‍යාස වර්ග කිහිපයක්

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය සලකන්න.

A න්‍යාසයේ ඇති පේළි ගණන 2 කි. තීර ගණන 3 කි. න්‍යාසයේ ගණය පේළි සහ තීර ඇසුරෙන් 2×3 ලෙස දක්වනු ලැබේ. A යනු "දෙකේ තුනේ" න්‍යාසයක් යැයි කියනු ලැබේ.

ඒ බව

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$ ලෙස සමහර අවස්ථාවල දී ලියනු ලැබේ.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන එක් එක් න්‍යාසයේ ගණය ලියන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයේ පේළි ගණන $= 3$
න්‍යාසයේ තීර ගණන $= 2$
න්‍යාසයේ ගණය $= 3 \times 2$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 1$
තීර ගණන $= 3$
න්‍යාසයේ ගණය $= 1 \times 3$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 2$
තීර ගණන $= 1$
න්‍යාසයේ ගණය $= 2 \times 1$

(iv) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 2$
තීර ගණන $= 2$
න්‍යාසයේ ගණය $= 2 \times 2$

පේළි න්‍යාස, තීර න්‍යාස සහ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස

එක් පේළියක් පමණක් ඇති න්‍යාස **පේළි න්‍යාස** ලෙසත්, එක් තීරයක් පමණක් ඇති න්‍යාස **තීර න්‍යාස** ලෙසත්, පේළි ගණන හා තීර ගණන සමාන වන න්‍යාස **සමචතුරස්‍ර න්‍යාස** ලෙසත් හැඳින්වේ. පේළි 2ක් හා තීර 2ක් ඇති න්‍යාසයක ගණය, ගණය 2 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් යැයි ද පේළි 3ක් හා තීර 3ක් ඇති න්‍යාසයක ගණය, ගණය 3 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ආදි ලෙස නම් කෙරේ.

පේළි, තීර හා සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා නිදසුන් ලෙස

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ යනු පේළි න්‍යාසයකි.

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ යනු තීර න්‍යාසයකි.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$ යනු සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

ඒකක න්‍යාස සහ සමමිති න්‍යාස

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ඉහත දැක්වෙන සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයේ කොටු කර දක්වා ඇත්තේ ප්‍රධාන විකර්ණයයි. ඉහළ වම් කෙළවරේ සිට පහළ දකුණත් කෙළවර දක්වා ඇති අවයව දාමය ප්‍රධාන විකර්ණය ලෙස හැඳින්වේ.

සටහන: ප්‍රධාන විකර්ණය අර්ථ දැක්වෙන්නේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි. ප්‍රධාන විකර්ණය බොහෝ විට, සරලව, විකර්ණය යන නමින් ද හැඳින්වේ.

පහත කොටුකර දක්වා ඇත්තේ ගණය 2×2 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක ප්‍රධාන විකර්ණය යි.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

පහත දැක්වෙන න්‍යාසය විශේෂ ආකාරයේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A න්‍යාසයේ ප්‍රධාන විකර්ණයේ පිහිටි සියලු අවයවවල අගය 1 වේ. විකර්ණයේ පිහිටි අවයව හැර ඉතිරි අවයව සියල්ල 0 වේ. මෙවැනි න්‍යාසයක් **ඒකක න්‍යාසයක්** ලෙස හැඳින්වේ. A යනු ගණය 3×3 වූ ඒකක න්‍යාසයකි. පහත දැක්වෙන්නේ ගණය 2×2 වූ ඒකක න්‍යාසයකි.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ඒකක න්‍යාස නම් කිරීම සඳහා I අක්ෂරය යොදා ගැනේ. පේළි n හා තීර n සහිත ඒකක න්‍යාස $I_{n \times n}$ මගින් ලියා දැක්වේ. ඒ අනුව,

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලියා දැක්වේ.

පහත දැක්වෙන න්‍යාසයෙහි ඇති විශේෂත්වය ඔබට නිරීක්ෂණය කළ හැකි ද?

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

X හි ප්‍රධාන විකර්ණය වටා ඇති අවයව නිරීක්ෂණය කරන්න. ප්‍රධාන විකර්ණය වටා ඇති සමාන අගයන්ගෙන් යුත් අවයව සමමිතික ව පිහිටා ඇත. මෙවැනි ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටන න්‍යාස **සමමිති න්‍යාස** ලෙස හැඳින්වේ.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y සහ I න්‍යාසවල ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටා ඇත. ඒ නිසා Y සහ I සමමිති න්‍යාස වේ.

සටහන: සමමිති න්‍යාස අර්ථ දැක්වෙන්නේ ද සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි.

19.1 අභ්‍යාසය

1. පලතුරු වෙළඳ සැලකින් සරත් දොඩම් ගෙඩි 2ක් සහ අඹ ගෙඩි 3ක් ද කමල් දොඩම් ගෙඩි 4ක් සහ අඹ ගෙඩි 1ක් ද රාජු දොඩම් ගෙඩි 1ක් සහ අඹ ගෙඩි 5ක් ද මිල දී ගනියි.

(i) සරත් මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.
(ii) කමල් මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.
(iii) රාජු මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.
(iv) සරත්, කමල් සහ රාජු මිල දී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ, පේළි ලෙස ඇති න්‍යාසයක් ගොඩනගන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් න්‍යාසයේ ගණය ලියා දක්වන්න.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (vi) $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. පහත දැක්වෙන න්‍යාස අතරින් පේළි හා තීර න්‍යාස තෝරා ලියා දක්වන්න.

(i) $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (v) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. පහත දැක්වෙන න්‍යාස අතරින්

(i) සමචතුරස්‍ර න්‍යාස
(ii) සමමිති න්‍යාස
(iii) ඒකක න්‍යාස තෝරා ලියන්න.

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසවල විකර්ණ කොටු කර දක්වන්න.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.2 න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

සංඛ්‍යා සඳහා එකතු කිරීම, අඩු කිරීම, ගුණ කිරීම ආදි ගණිත කර්ම අපි උගෙන ඇත්තෙමු. එවැනි ගණිත කර්ම යොදා ගැනීමෙන් බොහෝ ප්‍රායෝගික ගැටලු පහසුවෙන් විසඳා ගත හැකි බව ද අපි අත් දැක ඇත්තෙමු. න්‍යාස සඳහා ද ගණිත කර්ම අර්ථ දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම න්‍යාස එකතු කිරීම පිළිබඳ ව සලකා බලමු.

පහත දැක්වෙන A හා B න්‍යාස දෙක සලකන්න.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

මෙම න්‍යාස දෙක ම එකම ගණය සහිත න්‍යාස යි. එම ගණය 3×2 වේ. A හා B න්‍යාස දෙකෙහි එකතුව ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ A හා B න්‍යාසවල අනුරූප අවයව එකතු කිරීමෙන් ලැබෙන න්‍යාසය යි.

ඒ අනුව,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලැබේ.

මෙහි දී අනුරූප අවයව ලෙස හැඳින්වෙන්නේ එක ම ස්ථානයේ පිහිටි අවයව යි. නිදසුනක් ලෙස, A න්‍යාසයෙහි පළමු පේළියට හා දෙවන තීරයට අයත් අවයවය වන්නේ 1ය. B න්‍යාසයෙහි ඊට අනුරූප අවයවය වන්නේ 6ය; එනම්, B න්‍යාසයෙහි පළමු පේළියට හා දෙවන තිරයට අයත් අවයවයයි.
දැන් වීජීය සංකේත සහිත නිදසුනක් සලකමු.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ හා } Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ නම්, } X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස එකතු කිරීම අර්ථ දක්වා ඇත්තේ එක ම ගණය සහිත න්‍යාසවලට පමණි. ඒ අනුව, ගණ වෙනස් වන න්‍යාස සඳහා න්‍යාස එකතු කිරීම අර්ථ නොදැක්වේ.
න්‍යාස එකතු කිරීම යොදා ගත හැකි ආකාරය නිදසුනක් ඇසුරෙන් දැන් සලකා බලමු. මෙම නිදසුන ඉතා සරල වුවත්, ප්‍රායෝගික යෙදීම් සඳහා න්‍යාස යොදා ගන්නා ආකාරය එයින් මනාව පිළිඹිබු වේ.

නිදසුන 1

ප්‍රවීන් හා තරිඳු පාසල් ක්‍රිකට් කණ්ඩායමේ පන්දු යවන්නන් දෙදෙනෙකි. 2014 හා 2015 වසරවලදී පැවැත්වුණු එක් දින හා දෙදින පාසල් තරඟමාලාවල දී ඔවුන් දෙදෙනා ලබා ගත් කඩුලු ප්‍රමාණ පිළිබඳ විස්තර පහත වගු දෙකෙහි දැක්වේ.

	2014	2015
ප්‍රවීන්	21	23
තරිඳු	15	16

එක් දින තරගවලදී ලැබූ කඩුලු

	2014	2015
ප්‍රවීන්	14	16
තරිඳු	9	19

දෙදින තරගවලදී ලැබූ කඩුලු

එක් දින තරඟ සඳහා විස්තර දැක්වෙන න්‍යාසය A ලෙසත්, දෙදින තරඟ සඳහා විස්තර දැක්වෙන න්‍යාසය B ලෙසත් නම් කරමු. එවිට,

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \text{ හා } B = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. මෙම න්‍යාසවල, තීර මගින් වසර සහ පේළි මගින් පන්දු යවන්නන් දැක්වේ. $A + B$ න්‍යාසය සොයමු.

.

$$A + B = \begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$$

මෙම $A + B$ න්‍යාසයෙන් දැක්වෙන්නේ කුමක්දැයි සිතා බලන්න. එයින් දැක්වෙන්නේ ප්‍රවීන් හා තරිඳු 2014 වසරේදීත් 2015 වසරේදීත් එක් දින හා දෙදින තරගවලදී ලබාගත් මුළු කඩුලු ප්‍රමාණ පිළිබඳ තොරතුරු ය. එය, වගුවක ආකාරයෙන් මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

	2014	2015
ප්‍රවීන්	35	39
තරිඳු	24	35

මුළු කඩුලු ගණන

න්‍යාසයකින් තවත් න්‍යාසයක් අඩු කිරීම ද මේ ආකාරයට අර්ථ දැක්වේ. එහි දී සිදු කරන්නේ අනුරූප අවයව අඩු කිරීමයි. මේ සඳහා ද න්‍යාස දෙක එක ම ගණයේ විය යුතු ය. නිදසුනක් ලෙස,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ හා } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ නම්, } A - B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{වේ.}$$

තවත් නිදසුනක් සලකමු.

X යනු ගණය 3×3 වන සෑම අවයවයක්ම 2 වන න්‍යාසය ද Y යනු ගණය 3×3 වන ඒකක න්‍යාසය ද නම් $X - Y$ න්‍යාසය සොයන්න.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ හා } \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ වේ.}$$

එමනිසා,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස දෙකක සමානතාව

න්‍යාස දෙකක් එකිනෙකට සමාන වේ යන්නෙහි තේරුම කුමක්දැයි විමසා බලමු.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A හා B න්‍යාස සමාන වීමට $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$ හා $d = 9$ විය යුතු ය. එනම්, එක් න්‍යාසයක එක් එක් අවයවය අනෙක් න්‍යාසයේ අනුරූප අවයවයට සමාන විය යුතු ය. එවැනි අවස්ථාවක දී න්‍යාස දෙක සමාන වේ යැයි කියනු ලැබේ.

සටහන: න්‍යාස දෙකක සමානතාව අර්ථ දැක්වෙන්නේ ද ගණය සමාන වූ න්‍යාස සඳහා පමණ යි.

19.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

2. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ නම් a, b සහ c හි අගය සොයන්න.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ නම් a , b , c සහ d හි අගය සොයන්න.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ නම් x, y සහ z හි අගය සොයන්න.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ නම් x සහ y සොයන්න.

19.3 න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම

මීළඟට අපි න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම පිළිබඳ ව සලකා බලමු. න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ න්‍යාසයේ සෑම අවයවයක් ම සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කිරීමයි. A න්‍යාසය k සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට ලැබෙන න්‍යාසය kA ලෙස ලියනු ලැබේ. මෙහි දී න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීම පිළිබඳ ව පමණක් අවධානය යොමු කරමු. නිදසුනක් ලෙස,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

A න්‍යාසය 5න් ගුණ කල විට ලැබෙන න්‍යාසය වන්නේ

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 5 \times (-2) & 5 \times 8 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ -10 & 40 & 5 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය යි.

A න්‍යාසය -3න් ගුණ කල විට ලැබෙන න්‍යාසය වන්නේ

$$-3A = \begin{pmatrix} -3 \times 3 & -3 \times 1 & -3 \times 0 \\ -3 \times -2 & -3 \times 8 & -3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & -24 & -3 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය යි.

සටහන: A නම් න්‍යාසයක් k නම් සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට ලැබෙන න්‍යාසයේ ගණය A හි ගණය ම වේ.

නිදසුන: $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ නම් $3X - 2Y$ න්‍යාසය සොයන්න.

$$3X - 2Y = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

19.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $-2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (v) $3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (vi) $-2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ නම් a , b, c සහ d හි අගයන් සොයන්න.

3. $4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ නම් x , y සහ z හි අගයන් සොයන්න.

4. $2\begin{pmatrix} 5 & x \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} y & -5 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ නම් x , y, a හා b හි අගයන් සොයන්න.

19.4 න්‍යාස ගුණ කිරීම

ඉහත අර්ථ දැක්වුණු න්‍යාස එකතු කිරීම, න්‍යාස අඩු කිරීම හා න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම යන ගණිත කර්ම, සංඛ්‍යා සඳහා වූ ගණිත කර්ම ආකාරයේ ම බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත. එසේ නමුත්, න්‍යාස ගුණ කිරීම අර්ථ දැක්වෙන්නේ තරමක් වෙනස් ස්වරූපයකිනි. න්‍යාස ගුණ කිරීම පහත පරිදි විස්තර කළ හැකි ය.

මුලින් ම පේළි න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයකින් ගුණ කරන අයුරු සලකා බලමු. A යනු ගණය $1 \times m$ වන පේළි න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය $m \times 1$ වන තීර න්‍යාසයක් ද වන විට AB යන ගුණිතය අර්ථ දැක්වේ. එම ගුණිතය අර්ථ දැක්වෙන ආකාරය විස්තර කිරීම සඳහා නිදසුනක් ලෙස

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ද $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ද ගනිමු. ඒ අනුව, A යනු ගණය 1×2 වන න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය 2×1 වන න්‍යාසයක් ද වේ. එවිට,

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2)_{1 \times 1}$$

ලෙස AB ගුණිතය අර්ථ දැක්වේ.

නිදසුන 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් AB සොයන්න.

$$AB = (5 \times 3 + 2 \times 1) = (17)$$

ඕනෑ ම න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කළ හැකි බව අපි ඉහත දී ඉගෙන ගත්තෙමු. නමුත්, න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම කළ හැක්කේ ගණ සමාන වූ විට දී පමණක් බව ද අපි ඉගෙන ගත්තෙමු. න්‍යාස ගුණ කිරීම කිරීම කළ හැක්කේ ද සමහර අවස්ථාවල දී පමණි. ඉහත දී අපි දුටුවේ පේළි න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයකින් ගුණ කරන අයුරුය. එහෙත්, ඊට වෙනස් ගණ සහිත න්‍යාස ද ගුණ කළ හැකි ය. වඩාත් සාධාරණ ව, A යනු $m \times n$ වන න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය $n \times p$ වන න්‍යාසයක් ද නම්, එනම්, A හි තීර ගණනත් B හි පේළි ගණනත් සමාන වේ නම්, AB ගුණිතය අර්ථ දැක්විය හැකිය. ඒ කෙසේ දැයි දැන් සලකා බලමු. එවිට ලැබෙන න්‍යාසයයේ ගණය $m \times p$ බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න.

නිදසුනක් ලෙස, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ හා $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ නම් AB ගුණිතය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

ඉහත පේලි න්‍යාසයක් හා තීර න්‍යාසයක් ගුණ කළ අයුරින්, A හි එක් එක් පේළිය B හි එක් එක් තීරයෙන් ගුණ කරන්න.

$$= \begin{pmatrix} (2\ \ 4)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} & (2\ \ 4)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} \\ (3\ \ 5)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} & (3\ \ 5)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 4\times 6 & 2\times 8 + 4\times 7 \\ 3\times 1 + 5\times 6 & 3\times 8 + 5\times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 33 & 59 \end{pmatrix} \text{ (එක් එක් ගුණිතය සෙවීමෙන්)}$$

ඉහත AB ගුණිත න්‍යාසයෙහි අවයව අර්ථ දැක්වූ ආකාරය මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.

- AB හි පළමු පේළියට හා පළමු තිරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි පළමු පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි පළමු තිරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි පළමු පේළියට හා දෙවන තිරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි පළමු පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි දෙවන තිරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි දෙවන පේළියට හා පළමු තීරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි දෙවන පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි පළමු තීරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි දෙවන පේළියට හා දෙවන තීරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි දෙවන පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි දෙවන තීරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.

මෙම ආකාරයට ඕනෑ ම ගුණ කළ හැකි න්‍යාස දෙකක් ගුණ කළ හැකි ය. තවත් නිදසුන් කිහිපයක් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ නම් XY අර්ථ දැක්වෙන බව පෙන්වා එම න්‍යාසය සොයන්න. YX න්‍යාසය අර්ථ දැක්වේ ද?

X හි තීර ගණන $= 2$ ද Y හි පේළි ගණන $= 2$ ද වේ.
එනම්, X හි තීර ගණන Y හි පේළි ගණනට සමාන වේ. එමනිසා, XY ගුණිත න්‍යාසය අර්ථ දැක්වේ.

දැන්,

$$XY = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

X හි එක් එක් පේළිය Y හි එක් එක් තීරයෙන් ගුණ කිරීමෙන්

$$= \begin{pmatrix} (4\ \ 6) & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (2\ \ 3) & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 6 \times 7 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix}$$

දැන් YX ගුණිතය අර්ථ දැක්වේදැයි විමසා බලමු.
Y හි තීර ගණන 1 ද X හි පේළි ගණන 2 ද වේ. එනම්, Y හි තීර ගණන X හි පේළි ගණනට සමාන නොවේ. එමනිසා YX ගුණිතය අර්ථ නොදැක් වේ.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ හා $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු. න්‍යාස ගුණිතය යටතේ මුලින් ම අපි QP ආකාරයේ ගුණිතය අර්ථ දක්වුයෙමු. එය ඉහත අර්ථ දැක්වීම අනුව ද සෙවිය හැකි ය. එනම් Q හි සෑම පේළියක් ම P හි සෑම තීරයකින් ම ගුණ කිරීමෙන් අවයව සෙවීමෙනි.

$$QP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

එනම්, තනි අවයවයක් සහිත න්‍යාසයකි. තනි අවයවයක් සහිත න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවක් ලෙස සැලකේ. එමනිසා, $QP = 9$ ලෙස ලියනු ලැබේ.

තව ද, මෙහි දී PQ ද අර්ථ දැක්වේ. PQ මගින් ලැබිය යුත්තේ ගණය 2×2 වන න්‍යාසයකි.

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 3 \\ (-1) \times 6 & (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

19.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ix) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (x) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ නම් a සහ b හි අගය සොයන්න.

3. A , B සහ C න්‍යාස තුනකි. $A \times B = C$ වේ. පහත දැක්වෙන වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.

A න්‍යාසයේ ගණය	B න්‍යාසයේ ගණය	C න්‍යාසයේ ගණය
1×2	2×1	....
2×2	.... $\times 1$	....
....$\times 2$	.... $\times 1$	1×1
.... $\times$	$1 \times$	2×2
.... $\times 1$	.... $\times 2$	$1 \times$ .....

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ සහ $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්,

(i) $P \times Q$
(ii) $P \times R$
(iii) $Q \times R$ සොයන්න.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ නම්

(i) AB සොයන්න.
(ii) BA සොයන්න.
(iii) AB සහ BA අතර සම්බන්ධය කුමක්ද?