11 වර්ගජ ප්‍රකාශනවල සාධක

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- $ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ප්‍රකාශනවල සාධක සෙවීමට,
- වර්ග දෙකක අන්තරයෙහි සාධක හඳුනා ගැනීමට,
- වීජීය ප්‍රකාශන ඇතුළත් වර්ග දෙකක අන්තරයේ සාධක සෙවීමට,
- සංඛ්‍යාමය ප්‍රකාශනවල අගය සෙවීමට, වර්ග දෙකක අන්තරය භාවිත කිරීමට

හැකියාව ලැබේ.

$6 = 2 \times 3$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. එසේ ලිවීමේදී 2 හා 3 යන්න 6හි සාධක යැයි කියනු ලැබේ. එලෙස $4x + 8$ යන ද්වීපද ප්‍රකාශනය සැලකීමේ දී, එය $4(x + 2)$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. එසේ ලිවීමේදී 4 හා $(x + 2)$ යන්න, $4x + 8$හි සාධක ලෙස හැඳින්විය හැකි ය.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වීජීය ප්‍රකාශනය සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

(i) $3x + 6$ (ii) $2x - 2$ (iii) $p^2 + p$
(iv) $2a - 4a^2$ (v) $2pq + 4pq^2$ (vi) $5x^2 + 10x^2y^2 + 15x^2y$

2. පහත දැක්වෙන වීජීය ප්‍රකාශන සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

(i) $x(x + 1) + 3(x + 1)$ (ii) $a(a - 2) - 5(a - 2)$
(iii) $m(3a - 2b) + n(3a - 2b)$ (iv) $x^2 + xy + 4x + 4y$
(v) $p^2 - 2pb - 5p + 10b$ (vi) $x^2 + 7x + 3x + 21$
(vii) $n^2 + 9n - 2n - 18$

11.1 ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනවල සාධක

ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් හඳුනා ගැනීම

$x^2 + 5x + 6$ ආකාරයේ පද තුනක් සහිත වීජීය ප්‍රකාශනයක් සලකමු. මෙය අඥාත පද එකක් සහිත වීජීය ප්‍රකාශනයකි. මෙවැනි ප්‍රකාශනයක් සාධාරණ ලෙස $ax^2 + bx + c$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මෙහි x^2 සංගුණකය a ද xහි සංගුණකය b ද c යනු නියත පදය ද වේ. මේ ආකාරයේ වූ වර්ගජ ප්‍රකාශනයකට ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනයක් යැයි කියනු ලැබේ.

ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනවල සාධක සොයන ආකාරය

උදාහරණ ලෙස $x^2 + 5x + 6$ වර්ගජ ප්‍රකාශනය සලකමු.

$$(x+2)\ (x+3) = x\,(x+3) + 2(x+3)$$
$$= x^2 + \underbrace{3x + 2x} + 3$$
$$= x^2 + \quad 5x \quad + 3$$

මෙම $x^2 + 5x\ + 3$ ප්‍රකාශනයේ $(x + 2)$ හා $(x + 3)$ සාධක වේ. මෙම සාධක වෙන්කර ගැනීමට ඉහත ප්‍රකාශනයේ ගුණිතය ලබා ගැනීමට යොදා ගත් පියවර අග සිට මුලට සලකා බලමු.

- $x^2 + 5x + 3$ ප්‍රකාශනයේ මැද පදය වන $5x$ යන්න $2x$ හා $3x$ යන පද දෙකේ එකතුවෙන් ලබා ගෙන ඇත.
- එම $2x$ හා $3x$ පද දෙකේ ගුණිතය සැලකූ විට $2x \times 3x = 6x^2$ ලැබේ. එම අගය ප්‍රකාශනයේ මුල පදය වන x^2 හා අග පදය වන 6 ගුණ කිරීමෙන් ද ලැබේ. එනම්, $x^2 \times 6 = 6x^2$

ත්‍රිපද ප්‍රකාශනවල සාධක ($a = 1$ අවස්ථාව)

උදාහරණයක් ලෙස $x^2 + 7x + 12$ සලකමු.

පියවර 1 - මුල් පදය හා අවසන් පද දෙකේ ගුණිතය සලකමු.
(මෙම ගුණිතය නිබිල ගුණිතයක් ලෙස සලකන්න.)
$(+x)^2 \times (+12) \ = +12x^2$

පියවර 2 - $+12x^2$ හි සාධක සොයන්න.

$$+12x^2 \quad = 12x \times (+x)$$
$$= (-12x) \times (-x)$$
$$= (+6x) \times (+2x)$$
$$= (-6x) \times (-2x)$$
$$= \boxed{(+4x) \times (+3x)}$$
$$= (-4x) \times (-3x)$$

පියවර 3 - ඉහත ලබා ගත් සාධක අතුරින් සාධකවල එකතුව, මැද පදය වන $(+7x)$ ට ගැළපෙන අවස්ථාව තෝරන්න.
එය $4x$ හා $3x$ වේ.

පියවර 4 - ඉහතින් තෝරා ගත් සාධක යුගලය, මැද පදය වෙනුවට යොදමින් පද හතරක ප්‍රකාශනයක් ලෙස නැවත සකසන්න.

$$x^2 + 7x + 12 \quad = x^2\ + 4x + 3x + 12$$

පියවර 5 - ලියන ලද පද හතරින් යුත් ප්‍රකාශනයේ මුල් පද දෙකේ සහ අග පද දෙකේ පොදු සාධක වෙන් කරන්න.

$$x^2 + 7x + 12 \quad = \ x^2\ + 4x + 3x + 12$$
$$= \ x\ \ (x+ 4) + 3(x + 4)$$

පියවර 6 - මුල් පද දෙකට සහ අග පද දෙකට පොදු ද්විපද ප්‍රකාශනයක් ලැබේ. එය $(x+4)$ වේ. මෙය පොදු සාධකයක් ලෙස පිටතට ගෙන ඉතිරි සාධකය $(x+3)$ ලියන්න.

$$x(x+4) + 3(x+4)$$
$$= (x+4)(x+3)$$

දැන් තවත් නිදසුන් කිහිපයක් සලකමු.

නිදසුන 1

x^2+3x+2 හි සාධක සොයන්න.

$$x^2+3x+2 = x^2+2x+x+2$$
$$= x(x+2) + 1(x+2)$$
$$= (x+2)(x+1)$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$+3x$	$(x^2 \times (+2))$	$\boxed{+2x, +1x}$
	$+2x^2$	$-2x, -x$

නිදසුන 2

p^2+p-12 හි සාධක සොයන්න.

$$p^2+p-12 = p^2+4p-3p-12$$
$$= p(p+4) - 3(p+4)$$
$$= (p+4)(p-3)$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$(+p)$	$p^2 \times (-12)$	$(+12p), (-p)$
	$= -12p^2$	$(-12p), (+p)$
		$(+6p), (-2p)$
		$(-6p), (+2p)$
		$\boxed{(+4p), (-3p)}$
		$(+3p), (-4p)$

නිදසුන 3

$n^2-3n-10$ හි සාධක සොයන්න.

$$n^2-3n-10 = n^2-5n+2n-10$$
$$= n(n-5) + 2(n-5)$$
$$= (n-5)(n+2)$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$(-3n)$	$n^2 \times (-10)$	$(+10n), (-n)$
	$= -10n^2$	$(-10n), (+n)$
		$(+5n), (-2n)$
		$\boxed{(-5n), (+2n)}$

ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනවල සාධක (a, 1ට වැඩි නිඛිලයක් වන අවස්ථාව)

ax^2+bx+c ආකාරයේ ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනයක $a > 1$ වන අවස්ථාව සලකමු.

- $3x^2+14x+15$
- $2x^2-x-1$
- $6x^2+3x-3$
- $2x^2+xy-3xy^2$

මෙහි x^2 හි සංගුණකය +1 ට වඩා විශාල වේ. පිළිවෙළින් ඉහත ප්‍රකාශන සැලකීමේදී,

- $3x^2 + 14x + 15$, x^2 හි සංගුණකය 3
- $2x^2 - x - 1$, x^2 හි සංගුණකය 2
- $6x^2 + 3x - 3$, x^2 හි සංගුණකය 6
- $2x^2 + xy - 3xy^2$, x^2 හි සංගුණකය 2

මෙවැනි ත්‍රිපද වර්ගජ ප්‍රකාශනවල සාධක සෙවීම මීට ඉහත $x^2 + 5x + 6$ ප්‍රකාශනවල සාධක සෙවූ අයුරින් ම සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 4

$2x^2 + 7x + 6$ සළකමු.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 6 &= 2x^2 + 4x + 3x + 6 \\ &= 2x\,(x + 2) + 3\,(x + 2) \\ &= (x + 2)\,(2x + 3) \end{aligned}$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$+7x$	$(+2x^2) \times (+6)$	$(+12x)$,$(+x)$
	$12x^2$	$(-12x)$,$(-x)$
		$(+6x)$,$(+2x)$
		$(-6x)$,$(-2x)$
		$\boxed{(+4x) ,(+3x)}$
		$(-3x)$,$(-4x)$

නිදසුන 5

$2x^2 + 3x - 5$ සළකමු.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 5 &= 2x^2 + 5x - 2x - 5 \\ &= x\,(2x + 5) - 1\,(2x + 5) \\ &= (2x + 5)\,(x - 1) \end{aligned}$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$+3x$	$2x^2 \times (-5)$	$(+10x)$,$(-x)$
	$-10x^2$	$(-10x)$,$(+x)$
		$\boxed{(+5x) ,(-2x)}$
		$(-5x)$,$(+2x)$

නිදසුන 6

$2x^2 - x - 6$ සළකමු.

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 6 &= 2x^2 - 4x + 3x - 6 \\ &= 2x\,(x - 2) + 3\,(x - 2) \\ &= (x - 2)\,(2x + 3) \end{aligned}$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$-x$	$2x^2 \times (-6)$	$(+12x)$,$(-x)$
	$-12x^2$	$(-12x)$,$(+x)$
		$(+6x)$,$(-2x)$
		$(-6x)$,$(+2x)$
		$\boxed{(+3x) ,(-4x)}$
		$(-3x)$,$(+4x)$

11.1 අභ්‍යාසය

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(i) $p^2 + p - 12$ (ii) $b^2 + 20b + 100$ (iii) $p^2 + 18p + 56$

(iv) $c^2 + 17c + 66$ (v) $t^2 - 13t + 30$ (vi) $y^2 - 8y - 20$

(vii) $m^2 - 12m + 35$ (viii) $n^2 - 7n - 30$

2. සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(i) $2x^2 + 5x + 3$ (ii) $2y^2 + 9y + 10$ (iii) $3y^2 + 5y + 2$

(iv) $6x^2 - 7x + 2$ (v) $4a^2 - 13ab + 10b^2$ (vi) $12x^2 - 13xy + 3y^2$

11.2 පොදු සාධක සහිත වර්ගජ ප්‍රකාශනවල සාධක සෙවීම

උදාහරණ ලෙසින් $2y^2 + 12y + 16$ සලකමු. මෙම ප්‍රකාශනයේ පද තුන සැලකීමේදී $2y^2$, $12y$ හා 16 යන පද තුන ම බෙදෙන අගයක් සොයා ගත හැකි ය. එම අගය 2 වේ. මෙය, පද තුනෙහි ම සාධකයක් වන බැවින් එය පොදු සාධකයකි. මෙවැනි අවස්ථාවකදී පළමුවෙන් ම පොදු සාධකය සමගින් ගුණිතයක් ලෙස වීජීය ප්‍රකාශනය ලිවිය හැකි ය. එවිට,

$2y^2 + 12y + 16 = 2(y^2 + 6y + 8)$ ලෙසින් දැක්විය හැකි ය.

මීළඟට $y^2 + 6y + 8$ හි සාධකය සොයමු.

$$\begin{aligned} y^2 + 6y + 8 &= y^2 + 4y + 2y + 8 \\ &= y(y+4) + 2(y+4) \\ &= (y+4)(y+2) \end{aligned}$$

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$(+6y)$	$y^2 \times 8$	$(+8y), (+y)$
	$8y^2$	$(-8y), (-y)$
		$\boxed{(+4y), (+2y)}$
		$(-4y), (-2y)$

එම සාධක සම්බන්ධ කරමින්,

$2y^2 + 12y + 16 = 2(y+4)(y+2)$ ලෙස සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය.

පහත නිදසුන් සළකා බලමු.

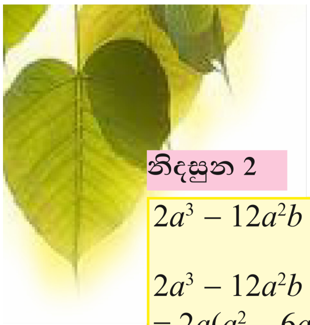
නිදසුන 1

$9p^2 - 6p - 3$ හි සාධක සොයන්න.

$$\begin{aligned} 9p^2 - 6p - 3 &= 3(3p^2 - 2p - 1) \\ &= 3[3p^2 - 3p + p - 1)] \\ &= 3[3p(p-1) + 1(p-1)] \\ &= 3[(p-1)(3p+1)] \\ &= 3(p-1)(3p+1) \end{aligned}$$

$(3p^2 - 2p - 1)$ හි සාධක

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$-2p$	$3p^2 \times (-1)$	$(+3p), (-p)$
	$-3p^2$	$\boxed{(-3p), (+p)}$



නිදසුන 2

$2a^3 - 12a^2b + 18ab^2$ හි සාධක සොයන්න.

$2a^3 - 12a^2b + 18ab^2$
$= 2a(a^2 - 6ab + 9b^2)$
$= 2a[\, a^2 - 3ab - 3ab + 9b^2\,]$
$= 2a[\, a\,(a - 3b) - 3b\,(a - 3b)\,]$
$= 2a\,[\,(a - 3b)\ (a - 3b)\,]$
$= 2a\ (a - 3b)^2$

$(a^2 - 6ab + 9b^2)$ හි සාධක

මැද පදය	මුල් හා අවසන් පදවල ගුණිතය	සාධක
$-6ab$	$a^2 \times (+9b^2)$	$(+9ab)$,$(+ab)$
	$9a^2b^2$	$(-9ab)$,$(-ab)$
		$(+3ab)$,$(+3ab)$
		$\boxed{(-3ab)\ ,(-3ab)}$

11.2 අභ්‍යාසය

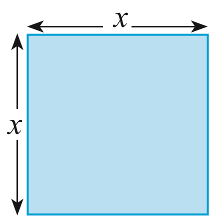
1. සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(i) $9x^2 + 6x - 3$ (ii) $4x^2 - 32x - 80$ (iii) $2x^2 + 2x - 12$

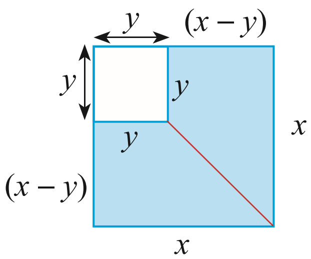
(iv) $10x^2 + 5xy - 5y^2$ (v) $2a^2 + 12a + 16$ (vi) $2a^2 - 12a^2b + 18ab^2$

11.3 වර්ග දෙකක අන්තරය වශයෙන් දැක්විය හැකි ප්‍රකාශනවල සාධක

වර්ග දෙකක අන්තරය, වීජීය ප්‍රකාශනයක් ලෙස $a^2 - b^2$ මගින් දැක්විය හැකි ය. මෙහි අදහස වන්නේ පළමු පදයේ වර්ගයෙන් දෙවන පදයේ වර්ගය අඩු වී ඇති බව යි.
පහත දැක්වෙන නිදසුන අධ්‍යයනය කරන්න. පැත්තක දිග x වූ සමචතුරස්‍රයකින් පැත්තක දිග y වූ සමචතුරස්‍රයක් කපා ඉවත් කළ පසු ඉතිරි කොටසේ වර්ගඵලය සඳහා ප්‍රකාශන ලබා ගනිමු. $(x > y)$ වේ.



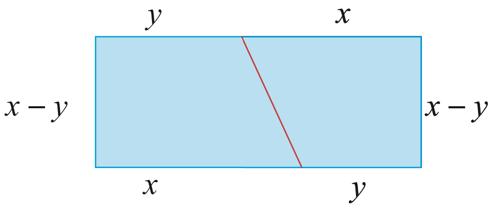
1 රූපය



2 රූපය

මුල් සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= x^2$
කපා වෙන් කරන ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= y^2$
ඉතිරි කොටසේ වර්ගඵලය $= x^2 - y^2$

මෙම ඉතිරි කොටසේ වර්ගඵලය ලබාගැනීමට 2 රූපයේ රතු රේඛාව ඔස්සේ වෙන් කර එය පහත ආකාරයට නැවත සම්බන්ධ කිරීමෙන් ලබා ගත හැකි ය.



3 රූපය

මෙහිදී ලැබෙන නව සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග $(x+y)$ ද පළල $(x-y)$ ද වේ.

3 රූපයේ වර්ගඵලය $\quad = $ දිග $\times$ පළල

$$= (x+y)\,(x-y)$$

මෙම සිදුවීම් දෙකේදී ම එකම වර්ගඵලය ලැබෙන බැවින්,

$x^2 - y^2 = (x+y)\,(x-y)$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

එනම්, $x^2 - y^2$ හි ප්‍රකාශනය සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස $(x+y)\,(x-y)$ ලෙස දැක්විය හැකි ය.

$x^2 - y^2 = (x+y)\,(x-y)$

මෙලෙසින්, වර්ග දෙකක අන්තරය වශයෙන් ඇති ප්‍රකාශනයක් හැම විටම සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

x^2	$-$	y^2	$=$	$(x$	$+$	$y)$	$(x$	$-$	$y)$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
පළමු පදය		දෙවන පදය		පළමු පදය	$+$	දෙවන පදය	පළමු පදය	$-$	දෙවන පදය

මෙම ගුණිතය මාරු වී ගුණ වුව ද පිළිතුර නොවෙනස් වේ.

$$x^2 - y^2 = (x+y)\;(x-y)$$
$$= (x-y)\;(x+y)$$

තව ද $(x-y)\;(x+y)$ ප්‍රසාරණය කිරීමෙන් $x^2 - y^2$ ලැබෙන බව ද තහවුරු කර ගත හැකි ය.

$$(x-y)\;(x+y) = x(x+y) - y(x+y)$$
$$= x^2 + xy - yx - y^2$$
$$= x^2 - y^2$$

නිදසුන් කිහිපයක් සළකා බලමු.

නිදසුන 1

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
$\quad\quad = (x+2)\,(x-2)$

නිදසුන 2

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$
$\quad\quad = (2x+3)\,(2x-3)$

නිදසුන 3

$25a^2 - 16b^2 = (5a)^2 - (4b)^2$
$\quad\quad = (5a+4b)\,(5a-4b)$

වර්ග දෙකක අන්තරයේ සාධක තවදුරටත්

පහත දැක්වෙන එක් එක් වීජීය ප්‍රකාශනවල සාධක වෙන් කර ඇති ආකාරය අධ්‍යයනය කරන්න.

නිදසුන 4

$(x+2)^2 - y^2$
$= [\,(x+2)+y\,]\;[\,(x+2)-y\,]$
$= (x+2+y)\,(x+2-y)$

නිදසුන 5

$(m-3)^2 - (m+5)^2$
$= [(m-3)+(m+5)]\;[(m-3)-(m+5)]$
$= (m-3+m+5)\,(m-3-m-5)$
$= (2m+\,2)\,(-8)$
$= -8\,(2m+\,2)$

11.3 අභ්‍යාසය

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(i) $m^2 - n^2$ (ii) $x^2 - 2^2$ (iii) $a^2 - 16$
(iv) $2^2 - y^2$ (v) $36 - p^2$ (vi) $a^2\,b^2 - 3^2$
(vii) $x^2\,y^2 - 4$ (viii) $2^2p^2 - 3^2q^2$ (ix) $16a^2 - 4b^2$ (x) $25x^2 - 36y^2$

11.4 වර්ග දෙකක අන්තරය භාවිතයෙන් අගය සෙවීම

පහත නිදසුන් මගින් වර්ග දෙකක අන්තරය භාවිත කර සංඛ්‍යාත්මක ප්‍රකාශනවල අගය සෙවූ අවස්ථාවන් කිහිපයක් දැක්වේ.

නිදසුන 1

$13^2 - 12^2 = (13+12)\,(13-12)$
$= 25 \times 1$
$= 25$

නිදසුන 2

$12.8^2 - 7.2^2 = (12.8+7.2)\,(12.8-7.2)$
$= (20 \times\; 5.6)$
$=\; 112$

11.4 අභ්‍යාසය

1. සාධක භාවිතයෙන් අගය සොයන්න.

(i) $97^2 - 3^2$ (ii) $15.5^2 - 4.5^2$ (iii) $99.9^2 - 0.1^2$
(iv) $6.73^2 - 3.27^2$ (v) $1.25^2 - 0.25^2$ (vi) $15.35^2 - 14.35^2$