18 සමාන්තර ශ්‍රේඪි

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- සමාන්තර ශ්‍රේඪි වෙන් කර හඳුනා ගැනීමට,
- සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පද ගණන හා පදවල ඓක්‍යය සෙවීමට,
- එදිනෙදා ජීවිතයේ ගැටලු විසඳීම සඳහා සමාන්තර ශ්‍රේඪි යොදා ගැනීමට,

හැකියාව ලැබේ.

18.1 සමාන්තර ශ්‍රේඪි

සංඛ්‍යා සමූහයක් කිසියම් වූ අනුපිළිවෙළකට සකස් කර ඇත්නම් එය සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් ලෙස හඳුන්වයි. පහත දැක්වෙන්නේ එවැනි අනුක්‍රම කිහිපයකි.

1, 3, 6, 10, ...

1, 4, 9, 16, ...

4, 7, 10, 13, ...

2, 4, 8, 16, ...

14, 12, 10, 8, ...

ඉහත සංඛ්‍යා අනුක්‍රම සැලකූ කළ පළමු උදාහරණයෙන් දැක්වෙන්නේ ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යා රටාවයි. දෙවන උදාහරණය මගින් දැක්වෙන්නේ වර්ග සංඛ්‍යා රටාව වන අතර හතරවන උදාහරණය මගින් දැක්වෙන්නේ පෙර පදය 2න් ගුණ කළ විට පසු පදය ලැබෙන ආකාරයේ රටාවකි. එම උදාහරණවල තුන්වන හා පස්වන උදාහරණ සැලකීමේ දී සෑම අනුයාත සංඛ්‍යා දෙකක් එනම්, පද දෙකක් සළකා පසු පදයෙන් පෙර පදය අඩු කළ විට නියත අගයක් ලැබේ. එවැනි සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් සමාන්තර ශ්‍රේඪි ලෙස හඳුන්වමු.

- කිසියම් සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක දෙවන පදයේ සිට අනුයාත පද දෙකින් දෙකට තෝරා, පසු පදයෙන් පෙර පදය අඩු කළ විට නියත අගයක් ම ලැබේ නම්, එය සමාන්තර ශ්‍රේඪියකි.

නිදසුන 1

5, 7, 9, 11, ... මෙම අනුක්‍රමය සැලකීමේ දී,

පළමු පදය 5 ද
දෙවන පදය 7 ද
තෙවන පදය 9 ද වේ.

මෙහි අනුයාත පද (එක ළඟ පිහිටි) 5, 7
7, 9
9, 11 ආදි ලෙස වේ.

පොදු අන්තරය (d)

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක, අනුයාත පද දෙකක් සළකා පසු පදයෙන් පෙර පදය අඩු කළ විට ලැබෙන නියත අගය පොදු අන්තරය ලෙස හැඳින්වේ. එය d මගින් අංකනය කෙරේ.

පොදු අන්තරය (d) = පසු පදය – පෙර පදය

මෙම සූත්‍රයට අනුව පළමු පදය (ආරම්භක පදය) පසු පදයක් ලෙස නොසැලකිය හැකි බව මනාව වටහා ගත හැකි ය. මන්ද පළමු පදයට පෙර පදයක් නොමැති වන හෙයිනි. පළමු පදය a මගින් අංකනය කෙරේ.

18.1 අභ්‍යාසය

1. පහත වගුව අභ්‍යාස පොතේ පිටපත් කර ගෙන සම්පූර්ණ කරන්න.

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය	අනුයාත පද යුගල	පසු පදය	පෙර පදය	පොදු අන්තරය	සමාන්තර ශ්‍රේඪියක් ද?
(i) 5, 7, 9, 11, ...	5, 7 7, 9 9, 11	7 9 11	5 7 9	2 2 2	ඔව්
(ii) 8, 10, 12, 14, ...	....	....	....	....	....
(iii) 20, 17, 14, 11, ...	....	....	....	....	....
(iv) 9, 11, 14, 15, ...	....	....	....	....	....

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය (a) හා පොදු අන්තරය (d) ලියා දක්වන්න.

(i) 5, 8, 11, 14, ... (ii) 3, 10, 17, 24, ... (iii) $-6, -3, 0, 3, \ldots$

(iv) 10, 8, 6, 4, ... (v) 1.1, 1.5, 1.9, 2.3, ... (vi) 17.5, 16.4, 15.3, 14.2, ...

(vii) $3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 10, \ldots$ (viii) $b + c, 2b + 3c, 3b + 5c, 4b + 7c, \ldots$

7, 10, 13, 16... ශ්‍රේඪිය සලකමු.

මුල් පදය →	$a = 7$
පොදු අන්තරය →	$d = 3$
පළමු පදය →	$T_1 = 7$
දෙවන පදය →	$T_2 = 7 + 3 = 10$
තෙවන පදය →	$T_3 = 10 + 3 = 13$

සිතන්න

ඉහත සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 7 වන පදය කුමක් ද? එනම් T_7 හි අගය කුමක් ද? එය ඉහත ආකාරයෙන් ම 3 බැගින් එකතු කර යෑමේ දී හත්වන පදය ලැබෙන බව පැහැදිලි ය. එසේ කළහොත් හත්වන පදය 25 ලෙස ලැබේ. එය $T_7 = 25$ ලෙස අංකනය කළ හැකි ය.

දැන් එම ශ්‍රේඪියේ ම 250 වන පදය සෙවීමට අවශ්‍ය ව ඇත. ඉහත ආකාරයෙන් එකතු කිරීමෙන් ම අගය ලබා ගැනීම ඉතා වෙහෙස වනු ඇත. මඳක් සිතන්න.

ඉහත නිදර්ශනය සලකමු. පළමු පදය 7 ද පොදු අන්තරය 3 ද වේ. අප මුල් පදය හා පොදු අන්තරය ඇසුරෙන් පද ගොඩ නගමු.

$T_1 = 7$	7	$7 + (0 \times 3)$	$7 + [(1 - 1) \times 3]$
$T_2 = 10$	$7 + 3$	$7 + (1 \times 3)$	$7 + [(2 - 1) \times 3]$
$T_3 = 13$	$7 + 3 + 3$	$7 + (2 \times 3)$	$7 + [(3 - 1) \times 3]$
$T_4 = 16$	$7 + 3 + 3 + 3$	$7 + (3 \times 3)$	$7 + [(4 - 1) \times 3]$
$T_n = ?$	....	....	$7 + [(n - 1) \times 3]$

$\therefore \quad T_n = 7 + [(n - 1) \times 3]$ වේ.

ඉහත රටාව අනුව, 250 වන පදය සොයමු.

$$
\begin{aligned}
T_{250} &= 7 + [(250 - 1) \times 3] \\
&= 7 + 249 \times 3 \\
&= 7 + 747 \\
&= 754
\end{aligned}
$$

250 වන පදය වන්නේ 754 යි.

ඉහත රටාව තේරුම් ගත් බැවින් ඉතා පහසුවෙන් කෙටි වේලාවකින් සමාන්තර ශ්‍රේඪියක විශාල පදයක වුව ද අගය සෙවිය හැකි බව තේරුම් ගත යුතු ය.

ඉහත රටාව සාධාරණ ලෙස සැලකුවහොත් මුල් පදය a ද පොදු අන්තරය d ද පද ගණන n හා n වන පදය T_n ලෙස සැලකූ විට

$$T_n = a + (n-1)\,d$$ සූත්‍රය මගින් ලබා දෙනු ලැබේ.

මෙම සූත්‍රයෙහි n යනු පද ගණනයි. සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ හත්වන පදය, $n = 7$ විට ලැබේ. එම ශ්‍රේඪියේ ම 12 වන පදය, $n = 12$ විට ලැබේ. එම ශ්‍රේඪියේ ම 30 වන පදය, $n = 30$ විට ලැබේ. මෙලෙස nට විවිධ අගයන් ගත හැකි ය.
ඉහත සූත්‍රයේ a, d, n හා T_n අඥාත පද හතර අතර සම්බන්ධතාවයක් පවතී. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මෙම අඥාත හතරෙන් තුනක් දන්නා විට ඉතිරි අඥාතයෙහි අගය සෙවීමට ඉහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් කළ හැකි ය. අප දැන් නිදසුන් මගින් එම සූත්‍රය භාවිත කර, සමාන්තර ශ්‍රේඪි පිළිබඳ ගැටලු විසඳන ආකාරය සලකා බලමු.

පළමුව a, d හා n අගය දන්නා විට, T_nහි අගය සොයමු.

නිදසුන 2

6, 9, 12, 15,... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 10 වන පදය සොයන්න.
$a = 6,\ d = 9 - 6 = 3,\ n = 10,$

$T_n = a + (n-1) \times d$ සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$\begin{aligned} T_{10} &= 6 + (10 - 1) \times 3 \\ &= 6 + (9 \times 3) \\ &= 6 + 27 \\ &= 33 \end{aligned}$$

$\therefore$ සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 10 වන පදය 33 වේ.

d, n හා T_n දන්නා විට a සඳහා අගයක් සොයා ගත හැකි ය. පහත නිදසුන මගින් එය පැහැදිලි වේ.

නිදසුන 3

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අන්තරය 5 ද 31 වන පදය 164 ද වේ නම් මුල් පදය සොයන්න.
මෙහි $d = 5,\ n = 31,\ T_{31} = 164$

$T_n = a + (n-1) \times d$ සූත්‍රයට අගය ආදේශයෙන්,

$$\begin{aligned} T_{31} &= a + (31 - 1) \times 5 \\ 164 &= a + (30 \times 5) \\ 164 &= a + 150 \\ 164 - 150 &= a + 150 - 150 \quad \text{(දෙපසින් ම 150ක් අඩු කිරීමෙන්)} \\ 14 &= a \end{aligned}$$

$\therefore$ මුල් පදය 14 වේ.

a, n හා T_n දන්නා විට d සඳහා අගයක් සොයා ගත හැකි ය. පහත නිදසුන මගින් එය පැහැදිලි වේ.

නිදසුන 4

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය (–15) ද 16 වන පදය 45 ද වේ නම් එහි පොදු අන්තරය සොයන්න.

මෙහි $a = (-15)$, $n = 16$, $T_{16} = 45$

$T_n = a + (n-1) \times d$ සූත්‍රයට අගය ආදේශයෙන්,

$$T_{16} = (-15) + (16 - 1) \times d$$

$$45 = (-15) + 15d$$

$$45 + 15 = -15 + 15d + 15$$ (දෙපසටම 15 බැගින් එකතු කිරීමෙන්)

$$\frac{60}{15} = \frac{15d}{15}$$ (දෙපසම 15න් බෙදීමෙන්)

$$d = 4$$

a, d හා T_n හි අගය දන්නා විට n සඳහා අගයක් සොයා ගත හැකි ය. පහත නිදසුන මගින් එය පැහැදිලි වේ.

නිදසුන 5

22, 16, 10, 4, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ (–122) වන්නේ කී වන පදය ද?

මෙහි $a = 22$, $d = (-6)$, $T_n = (-122)$

$T_n = a + (n-1) \times d$ සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$(-122) = 22 + (n - 1) \times (-6)$$

$$-122 = 22 - 6n + 6$$

$$-122 = 28 - 6n$$

$$-122 - 28 = 28 - 6n - 28$$ (දෙපසින් ම 28ක් අඩු කිරීමෙන්)

$$\frac{-150}{-6} = \frac{-6n}{-6}$$ (දෙපසම –6න් බෙදීමෙන්)

$$n = 25$$

$\therefore$ (–122) වන්නේ 25 වැනි පදයයි.

සටහන

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක a, d, n හා T_n අතුරින්, අඥාත දෙකක් නොදන්නා විට දී, ප්‍රමාණවත් ලෙස දත්ත දී ඇත්නම් එවිට සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් විසඳා, අඥාත සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 6

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක හතරවන පදය 25 ද දහවන පදය 49 ද වේ නම් මෙම ශ්‍රේඪියේ,

(i) පළමු පදය හා පොදු අන්තරය සොයන්න.

(ii) 26 වන පදය සොයන්න.

(i) ඉහත දත්ත අනුව 4 වන පදය එනම්, $T_4 = 25$ වේ.

$T_4 = a + (4 - 1) \times d$

$25 = a + 3d$ ——— (1)

දත්ත අනුව 10 වන පදය එනම්, $T_{10} = 49$ වේ.

$T_{10} = a + (10 - 1) \times d$

$49 = a + 9d$ ——— (2)

ඉහත (1) හා (2) සමගාමී සමීකරණ යුගල විසඳමු.

(2) − (1),

$49 - 25 = a + 9d - (a + 3d)$

$24 = a + 9d - a - 3d$

$\frac{24}{6} = \frac{6d}{6}$

$4 = d$

$d = 4$, (1) ට ආදේශයෙන්

$25 = a + (3 \times 4)$

$25 - 12 = a + 12 - 12$

$13 = a$

$\therefore$ මුල් පදය 13 ද පොදු අන්තරය 4 ද වේ.

(ii) $a = 13,\ d = 4,\ n = 26,$

$T_n = a + (n - 1) \times d$ සූත්‍රයට අගය ආදේශයෙන්,

$T_{26} = 13 + (26 - 1) \times 4$

$= 13 + (25 \times 4)$

$= 13 + 100$

$= 113$

$\therefore$ 26 වන පදය 113 වේ.

නිදසුන 7

එක්තරා අනුක්‍රමයක n වන පදය T_n යන්න $T_n = 13 - 2n$ මගින් ලබා දෙයි.

(i) මෙම අනුක්‍රමයේ මුල් පද හතර ලියා දක්වන්න.

(ii) ශ්‍රේඪියේ $n - 1$ වන පදය T_{n-1} සඳහා ප්‍රකාශයක් ලියා දක්වා එමගින් අනුක්‍රමය සමාන්තර ශ්‍රේඪියක් බව පෙන්වන්න.

(iii) අගය (-48) වන පදයක් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(i) $T_n = 13 - 2n$

$n = 1$ විට $T_1 = 13 - (2 \times 1) = 11$

$n = 2$ විට $T_2 = 13 - (2 \times 2) = 9$

$n = 3$ විට $T_3 = 13 - (2 \times 3) = 7$

$n = 4$ විට $T_4 = 13 - (2 \times 4) = 5$

මුල් පද 4 පිළිවෙළින් 11, 9, 7, 5 වේ.

(ii) n වන පදය $T_n = 13 - 2n$

$n - 1$ වන පදය $T_{n-1} = 13 - 2(n - 1)$

$= 13 - 2n + 2$

$= 15 - 2n$

$\therefore \; T_n - T_{n-1} = (13 - 2n) - (15 - 2n)$

$= 13 - 2n - 15 + 2n$

$= -2$

n හා $n - 1$ පද අනුයාත පද යුගලකි. ''පසු පදයෙන් පෙර පදය'' අඩු කළ විට නියත අගයක් ලැබුණි. (n යනු ඕනෑම සාධාරණ පදයකි.) මෙහි පොදු අන්තරය $d = -2$ වේ.

$\therefore \; T_n = 13 - 2n$ මගින් දෙන අනුක්‍රමය සමාන්තර ශ්‍රේඪියකි.

(iii) $T_n = -48$ යැයි සලකමු.

$T_n = 13 - 2n$ ට ආදේශයෙන්

$-48 = 13 - 2n$

$-48 - 13 = 13 - 2n - 13$ (දෙපසින්ම 13ක් අඩු කිරීමෙන්)

$\frac{-61}{-2} = \frac{-2n}{-2}$

$30\frac{1}{2} = n$

n යනු අනුක්‍රමණයෙහි පද ගණනයි. පද ගණන ධන නිඛිලමය අගයක් විය යුතු ය. ඉහත ගැටලුවේ n සඳහා ධන නිඛිලයක් නොලැබේ.

$\therefore$ අගය (-48) වන පදයක් නොමැත.

18.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවට අදාළ සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර ලියා දක්වන්න.

(i) $a = 2, d = 3$ (ii) $a = 5, d = 2$ (iii) $a = (-10), d = 4$

(iv) $a = (-6), d = (-5)$ (v) $a = 3.5, d = 2.5$

(vi) මුල් පදය a, පොදු අන්තරය d

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪිය සඳහා ඉදිරියෙන් දක්වා ඇති පදය සොයන්න.

(i) 5, 8, 11, 14, ... (11 වැනි පදය)

(ii) 17, 26, 35, 44, ... (16 වැනි පදය)

(iii) 30, 25, 20, 15, ... (26 වැනි පදය)

(iv) 7, 9.5, 12, 14.5, ... (12 වැනි පදය)

(v) $3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 5, 5\frac{3}{4}, \ldots$ (21 වැනි පදය)

(vi) $x + a, 2x + 3a, 3x + 5a, \ldots$ (11 වැනි පදය)

3. (*a*) පහත දැක්වෙන දත්ත ඇසුරෙන් එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය (a) සොයන්න.

(i) $d = 10, T_{16} = 157$ (ii) $d = 6, T_{12} = 87$ (iii) $d = 7, T_{21} = 105$

(iv) $d = (-5), T_{31} = (-165)$

(*b*) පහත දැක්වෙන දත්ත භාවිතයෙන් එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අන්තරය (d) සොයන්න.

(i) $a = 18, T_{21} = 78$ (ii) $a = (-50), T_{31} = 280$

(iii) $a = 15.5, T_{13} = 45.5$ (iv) $a = 7\frac{1}{2}, T_{17} = 27\frac{1}{2}$

(*c*) පහත දැක්වෙන එක් එක් ගැටලුවට අදාළ දත්ත ඇසුරෙන් සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ පද ගණන (n) සොයන්න.

(i) $a = 21, d = 5, T_n = 96$ (ii) $a = (-15), d = 2, T_n = 7$

(iii) $a = (-5), d = (-3), T_n = (-50)$ (iv) $a = 5\frac{1}{2}, d = 1\frac{1}{4}, T_n = 15\frac{1}{2}$

4. පහත එක් එක් සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ n වන පදය (පොදු පදය - T_n) සරල ම ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.

(i) 5, 9, 13, 17, ... (ii) −4, −1, 2, 5,...

(iii) 5, 3, 1, −1, ... (iv) $7\frac{1}{4}, 10, 12\frac{3}{4}, 15\frac{1}{2}, \ldots$

5. n වන පදය

(a) $3n + 2$ (b) $2n - 1$ (c) $7 - 3n$ වන එක් එක් අනුක්‍රමයේ,

(i) මුල් පද 3 ලියා දක්වන්න.

(ii) පොදු අන්තරය (d) සොයන්න.

(iii) 12 වන පදය සොයන්න.

6. 10ත් 100ත් අතර,

(i) 2 හි ගුණාකාර කොපමණ තිබේ ද?

(ii) 3 හි ගුණාකාර කොපමණ තිබේ ද?

(iii) 6 හි ගුණාකාර කොපමණ තිබේ ද?

7. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක හයවන පදය 47 ද එකොළොස් වන පදය 87 වේ නම් ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය හා පොදු අන්තරය සොයන්න.

8. 3, 7, 11, 15, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ

(i) 20 වන පදය සොයන්න.

(ii) ශ්‍රේඪියේ 159 වන්නේ කී වැනි පදය ද?

(iii) අගය 65 වන පදයක් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

18.2 සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද nහි ඓක්‍යය

මීට ඉහතින් අප ඉගෙන ගනු ලැබුවේ සමාන්තර ශ්‍රේඪියක ඉදිරියේ දී හමුවන අගයක් සොයා ගන්නා ආකාරයයි. එලෙස ම අපට පදවල අගයන් හි එකතුව ලබා ගැනීම අවශ්‍ය කරුණකි. උදාහරණයක් ලෙස තොරණක බල්බ සවිකර ඇත්තේ 3, 7, 11, 15, 19, 23 ආදි සමාන්තර ශ්‍රේඪියක ආකාරයට නම් එම කොටසේ සවි කිරීමට අවශ්‍ය මුළු බල්බ ප්‍රමාණය කොපමණ දැයි දැන ගත යුතු ය. ඒ සඳහා සමාන්තර ශ්‍රේඪියක ඓක්‍යය සෙවීම අපට අවශ්‍ය වේ.

තොරණට අවශ්‍ය මුළු බල්බ ගණන වන්නේ,

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 = 78$$

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල්පද nහි ඓක්‍යය (එකතුව) ඉදිරිපත් කිරීමට S යන සංකේතය උපයෝගී කර ගනිමු. ඒ අනුව ඉහත ශ්‍රේඪියේ පද ගණන 6කි.

$$S_6 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23$$
$$S_6 = 78$$

නමුත් පද ගණන විශාලවත් ම ඉහත ලෙස එකතු කිරීම අසීරු වනු ඇත. එම අසීරුතාවය මගහරවා ගැනීමට දැන් අප සූත්‍රයක් ගොඩ නගමු.

$$S_6 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 \quad \text{——} (1)$$

ඉහත ප්‍රකාශනය අග සිට මුලට ලියමු.

$$S_6 = 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3 \quad \text{——} (2)$$

(1) හා (2) එකතු කිරීමෙන්,

$$S_6 + S_6 = (3 + 23) + (7 + 19) + (11 + 15) + (15 + 11) + (19 + 7) + (23 + 3)$$

$$2S_6 = 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26$$

$$\therefore \quad 2S_6 = 6 \times 26 \text{ (අගය 26 වන පද 6ක් ඇත.)}$$

$$S_6 = \frac{6}{2}(3 + 23)$$

මෙම ශ්‍රේඩීයේ පද ගණන 6කි. එනම් $n = 6$ වේ. මුල් පදය $a = 3$ ද ශ්‍රේඩීයේ 6 වන පදය හෙවත් අවසන් පදය (l) 23 වේ. එවිට ඒ සඳහා සාධාරණ සමීකරණයක් ගොඩනගමු.

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ලෙස ගත හැකි ය. දැන් අප සංකේතාත්මක තොරතුරු භාවිතයෙන් ම සූත්‍රය ගොඩනැගීම සලකා බලමු.

මුල් පදය a ද පොදු අන්තරය d ද අවසාන පදය (n වන පදය) l ද වන විට ශ්‍රේඩීයේ පද ගණන n ද ලෙස සැලකූ විට,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots (l - 3d) + (l - 2d) + (l - d) + l \quad \text{——— (1)}$$

ඉහත ප්‍රකාශනයේ දකුණු පස අග සිට මුලට ලියමු.

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + (l - 3d) + \dots (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a \quad \text{——— (2)}$$

(1) + (2) සලකමු.

$$S_n + S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots (a + l) + (a + l) + (a + l)$$

$$2S_n = n(a + l) \qquad \text{[මෙහි } (a + l) \text{ පද } n \text{ ගණනක් ඇති නිසා]}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \text{ වේ.}$$

මුල් පදය a ද අවසාන පදය l ද පද ගණන n ද වන විට මුල් පද n හි එකතුව පහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් ගණනය කළ හැකි ය.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

නිදසුන 1

නිදසුනක් ලෙස 10 සිට 100 තෙක් ඇති ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා සියල්ලේ එකතුව සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

10, 12, 14, 16, ...98, 100 වේ.

මෙහි $a = 10$ ද $l = 100$ ද $n = 46$ ද වේ.

පද 46 හි එකතුව $S_{46} = \frac{46}{2}(10 + 100)$

$= 23 \times 110$

$= 2530$

ඉහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් සමාන්තර ශ්‍රේඩීයක් මුල් පදය (a) අවසාන පදය (l) හා පද ගණන (n) දී ඇති විට එම පද ගණනෙහි එකතුව සෙවිය හැකි ය.

දැන් අප විමසා බලන්නේ මුල් පදය (a) පද ගණන (n) හා පොදු අන්තරය (d) දී ඇති විට පද ගණනේ ඓක්‍යය (S_n) සොයන අයුරුයි.

ඉහත සමීකරණය සලකමු. $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

මෙහි l යනු n වන පදයයි. එනම් T_n නිසා l වෙනුවට $T_n = a + (n - l)$ සූත්‍රය ආදේශයෙන්

එවිට, $S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n - l)\, d\}$

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - l)\, d\}$ සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි ය.

නිදසුන 2

1, 2, 3, 4 ශ්‍රේඪියේ පද 100ක ඓක්‍යය සොයමු.

$a = 1$ ද $d = 1$ හා $n = 100$ වේ.

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\, d\}$ ආදේශයෙන්

$$S_{100} = \frac{100}{2}\{2 \times 1 + (100 - 1) \times 1\}$$

$$S_{100} = 50\ (2 + 99)$$

$$S_{100} = 50 \times 101$$

$$\therefore \quad S_{100} = 5050$$

$\therefore$ සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 100 හි ඓක්‍යය 5050කි.

මේ අනුව පද n හි ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා මුල් පදය (a) අවසාන පදය (l) හා පද ගණන (n) දන්නා විට මුල් පද n හි ඓක්‍යය සෙවීම $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ සූත්‍රය මගින් ද මුල් පදය (a) පොදු අන්තරය (d) දන්නා විට මුල් පද n හි ඓක්‍යය සෙවීමට $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\, d\}$ සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි ය.

දැන් සූත්‍රය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳන ආකාරය බලමු.

නිදසුන 3

පද 26කින් යුතු සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය 30 ද පොදු අන්තරය 3 ද අවසාන පදය 105 ද වේ. පද සියල්ලේ ඓක්‍යය සොයන්න.

$a = 30$, ද $n = 26$, හා $d = 3$, $l = 105$ වේ.

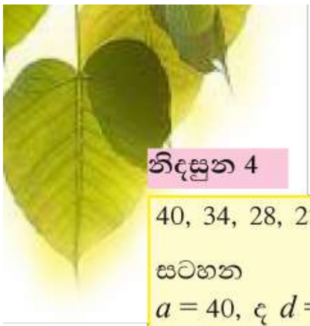
$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ට ආදේශයෙන්

$$S_{26} = \frac{26}{2}(30 + 105)$$

$$S_{26} = 13 \times 135$$

$$= 1755$$

පද 26 හි ඓක්‍යය 1755 වේ.



නිදසුන 4

40, 34, 28, 22, ... , (–14) සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ පද සියල්ලේ ඓක්‍යය සොයන්න.

සටහන

$a = 40$, ද $d = (-6)$, $l = (-14)$, $n = ?$, $S_n = ?$, $T_n = (-14)$

මෙම ගැටලුවේ n හි අගයත් S_n හි අගයත් දෙකම නොදන්නා හෙයින් ඓක්‍යය ඉහත සූත්‍රවලට එකවර ආදේශ නොකර පද ගණන වෙනම සොයා එය ඓක්‍යය සූත්‍රයට ආදේශ කර ගැටලුව විසඳමු.

$$T_n = a + (n-1)\,d$$
$$-14 = 40 + (n-1) \times (-6)$$
$$-14 = 40 - 6n + 6$$
$$-14 - 46 = -6n$$
$$\frac{-60}{-6} = \frac{-6n}{-6}$$
$$10 = n$$

ශ්‍රේඪියේ පද 10ක් ඇත.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$
$$= \frac{10}{2}[40 + (-14)]$$
$$= 5 \times 26$$
$$= 130$$

ශ්‍රේඪියේ පද සියල්ලේ ඓක්‍යය 130 කි.

නිදසුන 5

12, 16, 20, 24, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 15හි ඓක්‍යය සොයන්න.

$a = 12$, $d = 4$, $n = 15$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$
$$S_{15} = \frac{15}{2}[(2 \times 12) + (15 - 1)\,4]$$
$$S_{15} = \frac{15}{2}(24 + 56)$$
$$= \frac{15}{2} \times 80$$
$$= 600$$

$\therefore$ මුල් පද 15හි ඓක්‍යය 600කි.

නිදසුන 6

සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය (–15) ද අවසාන පදය 375 ද එම පදවල ඓක්‍යය 7200 ද වේ. එම ශ්‍රේඪියේ පද ගණන හා පොදු අන්තරය සොයා මුල් පද 20 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

$a = (-15),\ l = 375,\ S_n = 7200$

පද ගණන සොයමු.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$7200 = \frac{n}{2}(-15 + 375)$$

$$7200 \times 2 = n \times 360$$

$$\frac{14400}{360} = \frac{360n}{360}$$

$$40 = n$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පද ගණන 40කි.

දැන් එම ශ්‍රේඪියේ පොදු අන්තරය සොයමු.

$$T_n = a + (n-1)\,d$$

$$375 = (-15) + (40 - 1)\,d$$

$$375 + 15 = 39d$$

$$\frac{390}{39} = \frac{39d}{39}$$

$$10 = d$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පොදු අන්තරය 10 වේ.

දැන් මුල් පද 20 හි ඓක්‍යය සොයමු.

$a = (-15),\ d = 10,\ n = 20$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times (-15) + (20 - 1) \times 10]$$

$$S_{20} = 10\,(-30 + 190)$$

$$= 10 \times 160$$

$$= 1600$$

මුල් පද 20 හි ඓක්‍යය 1600 කි.

18.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සමාන්තර ශ්‍රේඪී තොරතුරු අනුව ඓක්‍යය සොයන්න.

(i) $a = 7$, $l = 37$, $n = 11$

(ii) $a = 23$, $l = 71$, $n = 13$

(iii) $a = 100$, $l = (-20)$, $n = 25$

(iv) $a = (-30)$, $l = 160$, $n = 20$

(v) $a = 12\frac{1}{2}$, $d = 1\frac{1}{2}$, $n = 10$

(vi) $a = 5.75$, $d = 0.25$, $n = 10$

2. පහත දැක්වෙන සමාන්තර ශ්‍රේඪීවල දක්වා ඇති පද ගණනේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(i) 7, 10, 13, 16,... පද 12 ක

(ii) –5, 0, 5, 10,... පද 16 ක

(iii) 1, 7, 13, 19,... පද 10 ක

(iv) 9, 4, –1, –6,... පද 14 ක

(v) 3.5, 5.25, 7, 8.75,... පද 10 ක

3. සමාන්තර ශ්‍රේඪී ඇසුරෙන් අගය සොයන්න.

(i) 20 සිට 100 දක්වා ඇති ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා ගණන සොයා එම සංඛ්‍යාවල ඓක්‍යය සොයන්න.

(ii) 41ත් 99ත් අතර ඇති ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා ගණන සොයා එම සංඛ්‍යාවල ඓක්‍යය සොයන්න.

(iii) 50ත් 100ත් අතර ඇති 2හි ගුණාකාර ගණන සොයා එම සංඛ්‍යාවල ඓක්‍යය සොයන්න.

4. සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක මුල් පද 5හි එකතුව 100කි. දසවන පදය 55 වේ. මෙම ශ්‍රේඪීයේ මුල් පදය හා පොදු අන්තරය සොයා මුල් පද 20හි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. සමාන්තර ශ්‍රේඪීයක n වන පදය $T_n = 16 - 3n$ වේ.

(i) මුල් පද 4 ලියා දක්වන්න.

(ii) මුල් පද 16 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

(iii) 20වන පදය සොයන්න.

(iv) මුල් පදයේ සිට පද කීයක ඓක්‍යය (– 42) වේ ද?

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. සුජීව හිමි පළමු සතියේ රු. 5ක් ද දෙවන සතියේ රු. 10ක් ද තුන්වන සතියේ රු. 15ක් ද ආදී වශයෙන් කැටයක මුදල් එකතු කරයි. (ස්වාමීන් වහන්සේ මුදල් එකතු කරන්නේ සති කිහිපයක දී එකතු වන මුදලින් පිරිත් පොතක් මිල දී ගැනීමේ අදහසිනි.) ශ්‍රේඪී පිළිබඳ දැනුම භාවිත කර,

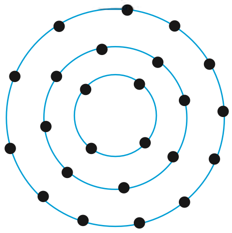
(i) හයවන සතියේ දී උන් වහන්සේ කැටයට දමන මුදල සොයන්න.

(ii) මිල රු. 225ක් වන පොතක් මිල දී ගැනීම සඳහා උන් වහන්සේ සති කීයක් මුදල් ඉතිරි කළ යුතු ද?

2. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක දෙවන පදය හා තෙවන පදය පිළිවෙළින් 2 හා 5 වෙයි. එම ශ්‍රේඪියේ,
   (i) පොදු අන්තරය සොයන්න.
   (ii) සිව්වන පදය ලියා දක්වන්න.
   (iii) පළමු පදය සොයන්න.
   (iv) මුල් පද 20හි ඓක්‍යය සොයන්න.

3. එක්තරා සැරසිල්ලක් සඳහා කම්බි කැබලි 30ක් කපා ගනු ලබන්නේ පළමු කැබැල්ලේ දිග 5 cm ද, අනෙක් කැබැල්ල ඊට පෙර කැපූ කැබැල්ලට වඩා 4 cm බැගින් දිග වැඩි වන පරිදි ද වේ.
   (i) 15 වන කැබැල්ලේ දිග සොයන්න.
   (ii) කම්බි කැබලි 30 කැපීමට අවශ්‍ය කම්බියේ මුළු දිග සොයන්න.

4. රූපයේ දැක්වෙන්නේ තොරණක වර්ණ විදුලි බල්බ සම්බන්ධ කර ඇති ආකාරයයි. මෙම තොරණේ අවසාන කවය සඳහා බල්බ 60ක් භාවිත කර තිබේ.



   (i) මෙම තොරණ සකස් කිරීම සඳහා අවශ්‍ය කව ගණන කොපමණ ද?
   (ii) මෙම තොරණ නිම කිරීමට කොපමණ වර්ණ විදුලි බල්බ අවශ්‍ය වේ ද?
   (iii) එක් බල්බයක් සඳහා රු.90ක් වැය වේ නම් වර්ණ විදුලි බල්බ මිල දී ගැනීමට කොපමණ මුදලක් වැය වේ ද?

සාරාංශය

- සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක, අනුයාත පද දෙකින් දෙකට සැලකූ විට, ඉන් පසු පදයෙන් පෙර පදය අඩු කළ විට ලැබෙන නියත අගය පොදු අන්තරය ලෙස හැඳින්වේ.
- සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය a ද, පොදු අන්තරය d ද, පද ගණන n ද විට n වන පදය T_n ලෙස සැලකූ විට $T_n = a + (n-1)\,d$ යන සූත්‍රය මගින් ලබා දෙනු ලැබේ.
- සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය a ද අවසාන පදය l ද පද ගණන n ද වන විට මුල් පද n හි එකතුව පහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් ගණනය කළ හැකි ය.
  $$S_n = \frac{n}{2}\,(a + l)$$
- සමාන්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය a ද පොදු අන්තරය d ද පද ගණන n ද වන විට මුල් පද n හි එකතුව පහත සූත්‍රය භාවිතයෙන් ගණනය කළ හැකි ය.
  $S_n = \frac{n}{2}\,\{2a + (n-1)\,d\}$ සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි ය.