20 සමාන්තරාස්‍ර I

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- සමාන්තරාස්‍රවල ලක්ෂණ දැක්වෙන ප්‍රමේයයන් හඳුනා ගැනීමට හා එම ප්‍රමේයයන් භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට,
- සෘජු කෝණාස්‍රය, රොම්බසය සහ සමචතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයේ ම විශේෂ අවස්ථා බව හඳුනා ගැනීමට,

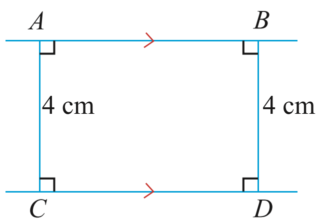
හැකියාව ලැබේ.

20.1 සමාන්තරාස්‍ර

පෙර වසරවල දී අප විසින් ඉගෙන ගැනීමට යෙදුණු පහත සඳහන් කරුණු දෙස පළමුව අවධානය යොමු කරමු.

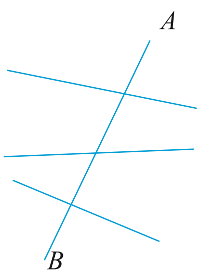
සමාන්තර රේඛාව

රේඛා දෙකක් අතර ලම්බ දුර නියත වේ නම් එම රේඛා සමාන්තර වේ.
පහත රූප සටහන මඟින් පෙන්වා ඇති AB හා CD රේඛා සමාන්තර වේ. සරල රේඛා දෙකක් සමාන්තර බව දැක්වීමට රූපසටහනේ පරිදි ඊ හිස් යොදා ගත යුතු ය. AB හා CD රේඛා සමාන්තර බව දැක්වීමට $AB//CD$ සංකේතය භාවිත කරයි.



තීර්යක් රේඛාව

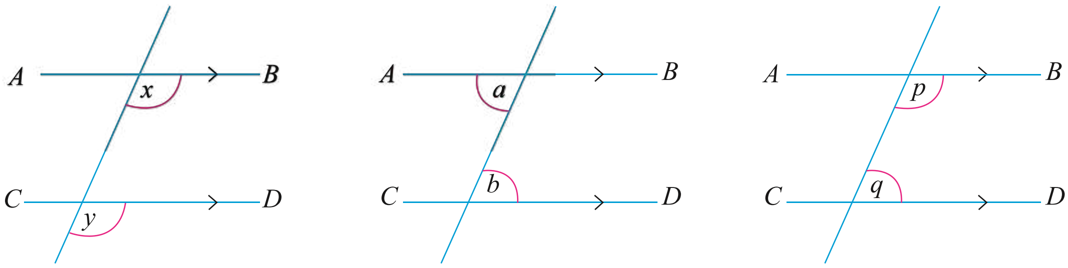
සරල රේඛා දෙකක් හෝ කිහිපයක් ඡේදනය වන සේ අඳින රේඛාව තීර්යක් රේඛාවකි. රූප සටහනේ දැක්වෙන AB යනු තීර්යක් රේඛාවක් වේ.



සමාන්තර රේඛා යුගලයක් තීර්යක් රේඛාවකින් කැපී යාම නිසා ඇතිවන කෝණ පිළිබඳ පහත සඳහන් ප්‍රමේයය මතකයට නගා ගනිමු.

ප්‍රමේයය

සමාන්තර සරල රේඛා දෙකක් තීර්යක් රේඛාවකින් ඡේදනය වූ විට සෑදෙන අනුරූප කෝණ සමාන වේ. ඒකාන්තර කෝණ සමාන වේ. මිත්‍ර කෝණ දෙකක ඓක්‍යය 180^0වේ.



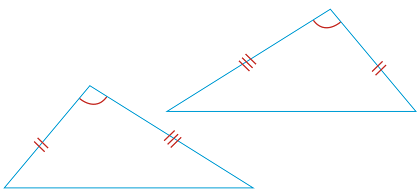
අනුරූප කෝණ
$x = y$ වේ.

ඒකාන්තර කෝණ
$a = b$ වේ.

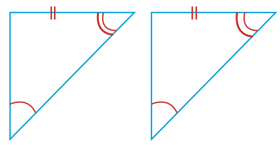
මිත්‍ර කෝණ
$p + q = 180^0$ වේ.

ත්‍රිකෝණ දෙකක් අංගසම වන අවස්ථා 4 නැවත මතකයට නගා ගනිමු.

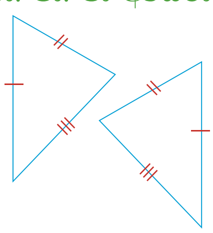
(i) පා. කෝ. පා අවස්ථාව



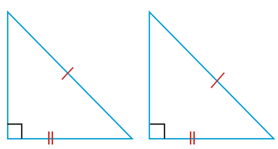
(ii) කෝ. කෝ. පා අවස්ථාව



(iii) පා. පා. පා අවස්ථාව



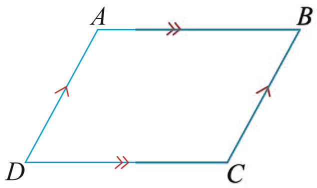
(iv) කර්ණ පා. අවස්ථාව



මෙම පාඩමේදී ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන තල රූපය වන සමාන්තරාස්‍රය පහත පරිදි අර්ථ දැක්විය හැකි ය.

සමාන්තරාස්‍රය

සම්මුඛ පාද සමාන්තර චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.



එක් සම්මුඛ පාද යුගලක් සමාන්තර බව **එක් ඊ හිසකින්** ද **අනෙක් සම්මුඛ පාද යුගලය** සමාන්තර බව ඊ හිස් දෙකකින් ද දක්වා ඇත. එමගින් $AB//DC$ බවත් $AD//BC$ බවත් දක්වයි.

සමාන්තරාස්‍ර සියල්ලට ම පොදු ලක්ෂණ ඇතුළත් ප්‍රමේය දෙකක් පහතින් දක්වමු.

ප්‍රමේයය 1

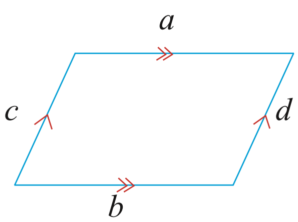
සමාන්තරාස්‍රයක,
- සම්මුඛ පාද සමාන වේ.
- සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.
- එක් එක් විකර්ණය මගින් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වේ.

ප්‍රමේයය 2

සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකක් මගින් අනෙක සමච්ඡේදනය කරයි.

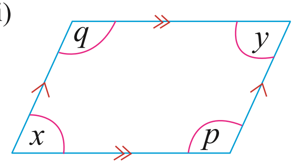
ප්‍රථමයෙන් ප්‍රමේයය 1 පිළිබඳව සලකා බලමු.
ප්‍රමේයය 1 රූප සටහන් ඇසුරින්, පහත පරිදි ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

(i)



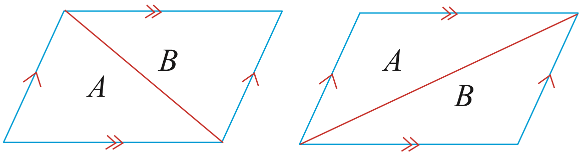
$a = b$ හා $c = d$ වේ.

(ii)



$x = y$ හා $p = q$ වේ.

(iii)



A හි වර්ගඵලය $= B$ හි වර්ගඵලය

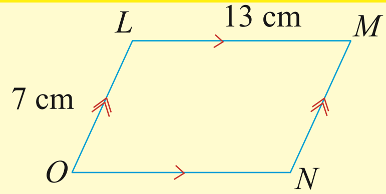
ප්‍රමේයය 1 භාවිත කර විසඳිය හැකි ගැටලු කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1

LMNO යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. එහි $LM = 13$ cm ද $LO = 7$ cm ද වේ නම්,

(i) *NO* දිග සොයන්න.

(ii) *MN* දිග සොයන්න.



(i) $LM = NO$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන බැවින්)

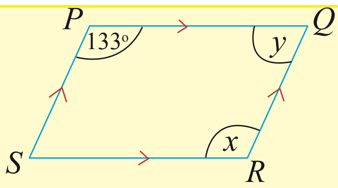
$LM = 13$ cm

(ii) $LO = MN$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන බැවින්)

$LO = 7$ cm

නිදසුන 2

රූප සටහනේ දී ඇති තොරතුරු අනුව x සහ y හි අගයන් සොයන්න.



$Q\hat{R}S = Q\hat{P}S$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන බැවින්)

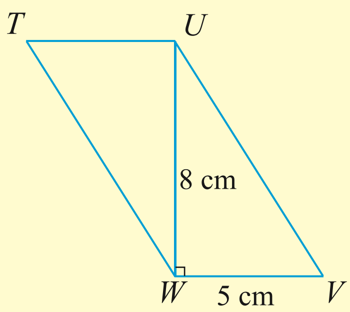
$x = 133^{\circ}$

මෙම ලබා ගත් x හි අගය භාවිත කර y අගය සොයමු. x සහ y කෝණ යුගල මිත්‍ර කෝණ බැවින්, $x + y = 180^{\circ}$ විය යුතු ය.

$$133^{\circ} + y = 180^{\circ}$$
$$133^{\circ} + y - 133^{\circ} = 180^{\circ} - 133^{\circ}$$
$$y = 47^{\circ}$$

නිදසුන 3

රූපයේ දැක්වෙන *TUVW* සමාන්තරාස්‍රයේ *UW* විකර්ණයේ දිග 8 cm සහ *VW* පාදයේ දිග 5 cm වේ. $U\hat{W}V = 90^{\circ}$ වේ. *TUW* ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



I ක්‍රමය

TUVW සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය

= ආධාරකය × සමාන්තර පාද අතර ලම්බක උස

$= VW \times UW$

$= 5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

$= 40 \text{ cm}^2$

UW විකර්ණය මගින් $TUVW$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වන බැවින් TUW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$= \frac{1}{2} \times$ (සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය)

$= \frac{1}{2} \times 40 \text{ cm}^2$

$= 20 \text{ cm}^2$

II ක්‍රමය

UVW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$= \frac{1}{2} \times$ ආධාරකය $\times$ ලම්බක උස

$= \frac{1}{2} \times 5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$

$= 20 \text{ cm}^2$

UW විකර්ණය මගින් $TUVW$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වන බැවින්

TUW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=$ UVW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

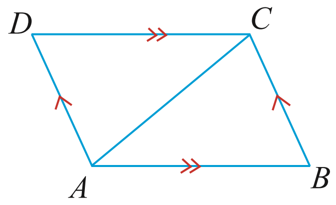
TUW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= 20 \text{ cm}^2$

ඉහත භාවිත කළ ප්‍රමේයය, විධිමත් ලෙස පහත පරිදි සාධනය කරමු.

ප්‍රමේයය 1

සමාන්තරාස්‍රයක,

- සම්මුඛ පාද සමාන වේ.
- සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.
- එක් එක් විකර්ණය මගින් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වේ.



දත්තය - $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. AC විකර්ණය ඇඳ ඇත.

සා.ක.යු - (i) $AB = DC$ සහ $AD = BC$ බව ද

(ii) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ සහ $D\hat{A}B = D\hat{C}B$ බව ද

(iii) $ABC\Delta$ වර්ගඵලය $= ADC\Delta$ වර්ගඵලය

$ABD\Delta$ වර්ගඵලය $= BCD\Delta$ වර්ගඵලය බව

සාධනය - $ABC\Delta$ සහ $ADC\Delta$ සලකමු.

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{C}B = C\hat{A}D$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$AC = AC$ (පොදු පාදය)

$ABC\Delta \equiv ADC\Delta$ (කෝ. කෝ. පා අවස්ථාව)

අංගසම ත්‍රිකෝණ වල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

$AB = DC$ සහ $AD = BC$ වේ.

$A\hat{B}C = A\hat{D}C$ වේ.

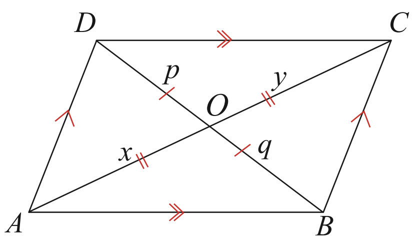
$ABC\Delta$ වර්ගඵලය $= ADC\Delta$ වර්ගඵලය වේ.

එලෙසම BD විකර්ණය ඇඳ $ABD\Delta$ සහ $BCD\Delta$ අංගසම කිරීමෙන් $D\hat{A}B = D\hat{C}B$ බව ද $ABD\Delta$ වර්ගඵලය $= BCD\Delta$ වර්ගඵලය බව පෙන්විය හැකි ය.

ඉහත සඳහන් ලක්‍ෂණවලට අමතරව සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වීම ද විශේෂ ලක්ෂණයකි. එය ප්‍රමේයය 2 යටතේ කළින් සඳහන් විය.

ප්‍රමේයය 2

සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකක් මගින් අනෙක සමච්ඡේදනය කරයි.

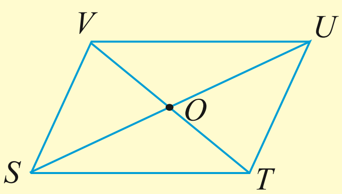


$x = y$ හා $p = q$ වේ.

මින් අදහස් වනුයේ AC සහ BD විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වී ඇත්තේ $AO = OC$ වන ලෙස සහ $BO = OD$ වන ලෙස ය.

නිදසුන 4

$STUV$ සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ, O හි සමච්ඡේදනය වේ. $SO = 8$ cm නම් SU විකර්ණයේ දිග සොයන්න.



$SO = OU = 8$ cm

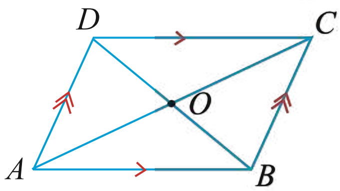
(සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

$SU = SO + OU$

$SU = 8$ cm $+ 8$ cm

$SU = 16$ cm

සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමච්ඡේදනය වීම සම්බන්ධ ප්‍රමේයය විධිමත්ව සාධනය කරමු.



දත්තය - $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AC සහ BD විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වී ඇත.
සා.ක.යු - $AO = OC$ සහ $BO = OD$ බව.

සාධනය - $ADO\Delta$ සහ $BCO\Delta$ සලකමු.

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$D\hat{A}O = O\hat{C}B$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$AD = BC$ (සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද)

$ADO\Delta \equiv BCO\Delta$ (කෝ. කෝ. පා අවස්ථාව)

ඉහත අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

$AO = OC$ සහ $BO = OD$

සටහන

මෙම සාධනය සඳහා රූප සටහනට අමතර ව නිර්මාණයක් නොමැති බැවින් එය සඳහන් නොකර දත්තය, සා.ක.යු (සාධනය කළ යුත්ත) සහ සාධනය පමණක් ඉදිරිපත් කර ඇත.

20.2 සමාන්තරාස්‍රයේ විශේෂ අවස්ථා

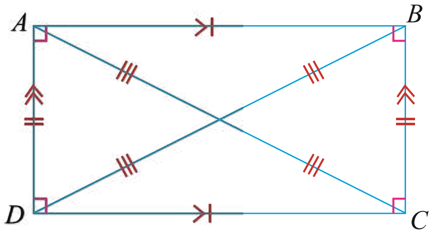
තවත් වැදගත් චතුරස්‍ර වර්ග දෙකක් වන සෘජු කෝණාස්‍රය සහ රොම්බසය පිළිබඳ ව සලකා බැලීමේදී මේ දෙවර්ගයම සමාන්තරාස්‍රයක් අර්ථ දැක්වීමේ දී භාවිත කළ සම්මුඛ පාද සමාන්තර විය යුතු ය යන අවශ්‍යතාවය තෘප්ත කරන බව පැහැදිලි වේ. ඒ අනුව ඒවා සමාන්තරාස්‍ර වන අතර එබැවින් ප්‍රමේයය 1 හා ප්‍රමේයය 2හි සඳහන් කළ සමාන්තරාස්‍රයක පොදු ලක්ෂණ මේ දෙවර්ගයට ම ඇත. එම ලක්ෂණවලට අමතරව එක් එක් වර්ගයට විශේෂිත වූ වෙනම ලක්ෂණ ද මේ දෙවර්ගයට ම ඇත. අප හොඳින් දන්නා චතුරස්‍රයක් වන සමචතුරස්‍රය සෘජුකෝණාස්‍රයේ මෙන් ම රොම්බසයේ ද විශේෂ අවස්ථාවක් ලෙස හඳුනා ගත හැකි ය. ඒ අනුව සමචතුරස්‍රය ද සමාන්තරාස්‍රයේ ම විශේෂ අවස්ථාවක් බවට ද පත් වේ.

සෘජුකෝණාස්‍රය

සමාන්තරාස්‍රයක එක් කෝණයක් සෘජු කෝණයක් යැයි ගනිමු. එවිට සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන බැවින් ඉතිරි කෝණ ද සෘජු කෝණ වේ. එවැනි සමාන්තරාස්‍රයක් සෘජු කෝණාස්‍රයක් ලෙස හැඳින් වේ. එනම්, කෝණ හතරම සමාන එනම්, එක් කෝණයක් අංශක 90ක් වන සමාන්තරාස්‍ර සෘජුකෝණාස්‍ර ලෙස හැඳින්වේ.

සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණවලට අමතරව පහත ලක්ෂණ ද සෘජුකෝණාස්‍රයකට ඇත.

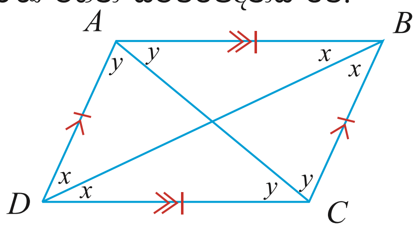
- ශීර්ෂ කෝණ සියල්ල සෘජු කෝණ වේ.
- විකර්ණ දිගින් සමාන වේ.



රොම්බසය

සමාන්තරාස්‍රයක බද්ධ පාද දෙකක් සමාන වන අවස්ථාව සළකමු. සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන වන බැවින් එවිට පාද හතරම දිගින් සමාන වේ. එවැනි සමාන්තරාස්‍ර රොම්බස ලෙස හැඳින්වේ. එනම් පාද හතරම සමාන සමාන්තරාස්‍ර රොම්බස ලෙස හැඳින්වේ. සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණවලට අමතරව පහත ලක්ෂණ ද රොම්බසයකට ඇත.

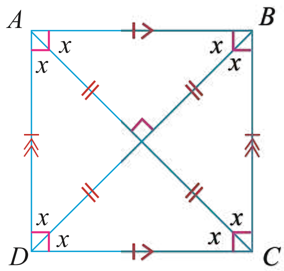
- පාද සියල්ලම දිගින් සමාන වේ.
- විකර්ණ සෘජුකෝණීව එකිනෙකට සමච්ඡේදනය වේ.
- ශීර්ෂ කෝණ විකර්ණ මගින් සමච්ඡේදනය වේ.



සමචතුරස්‍රය

සෘජුකෝණාස්‍රයක බද්ධ පාද දෙක සමාන වන අවස්ථාවේ එය සමචතුරස්‍රයක් ලෙස හැඳින්වේ. එලෙසම රොම්බසයක කෝණ 4ම සමාන වන අවස්ථාවේ එනම් එක් කෝණයක් 90° වන අවස්ථාවේ එය සමචතුරස්‍රයක් බවට පත්වේ. එබැවින් සමචතුරස්‍රය සෘජුකෝණාස්‍රයේ මෙන්ම රොම්බසයේ විශේෂ අවස්ථාවකි. එබැවින් රොම්බසයට සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණවලට අමතරව සෘජුකෝණාස්‍රයේ හා රොම්බසයේ පවතින විශේෂ ලක්ෂණ දෙවර්ගය ම පවතී.

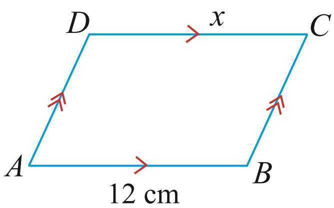
- ශීර්ෂ, කෝණ සියල්ලම සෘජු කෝණ වේ.
- විකර්ණ දිගින් සමාන වේ.
- සියළු ම පාද දිගින් සමාන වේ.
- විකර්ණ සෘජු කෝණීව එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ.
- ශීර්ෂ කෝණ විකර්ණ මගින් සමච්ඡේදනය වේ.



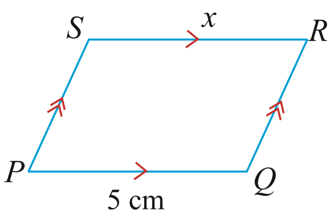
20.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සමාන්තරාස්‍රවල x මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

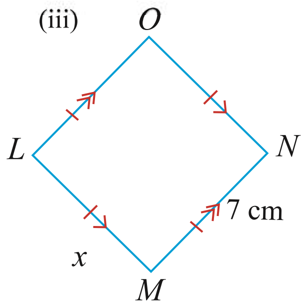
(i)



(ii)

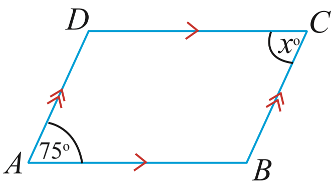


(iii)

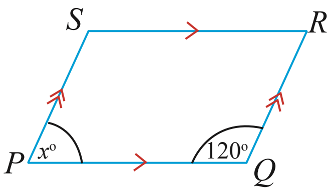


2. පහත දැක්වෙන සමාන්තරාස්‍ර වල x^{o} මගින් දැක්වෙන කෝණවල අගය සොයන්න.

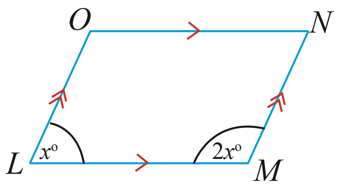
(i)



(ii)

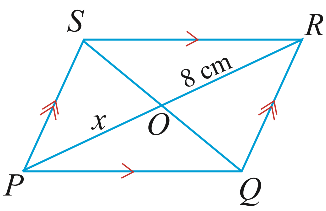


(iii)

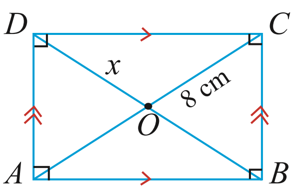


3. පහත දැක්වෙන සමාන්තරාස්‍රවල x මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

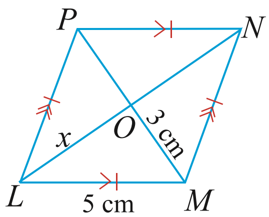
(i)



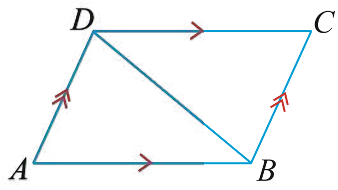
(ii)



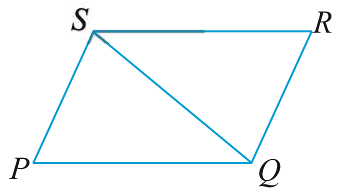
(iii)



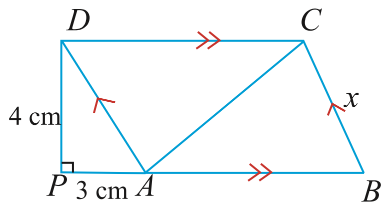
4. පහත දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ ABD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $17\ cm^2$ නම් BCD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



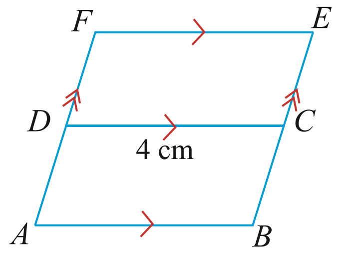
5. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය $22\ cm^2$ නම් PQS ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



6. x මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.



7. $ABCD$ සහ $ABEF$ යනු සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව AB හා EF පාදවල දිග සොයන්න.



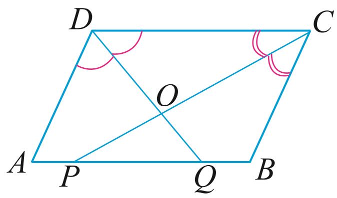
8. $PQRS$ සමචතුරස්‍රයේ PQ පාදය මත T ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. SQ හා RT රේඛා O හිදී ඡේදනය වේ. $T\hat{O}Q = 70^\circ$ නම් $T\hat{R}S$ හි විශාලත්වය සොයන්න.

9. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AC විකර්ණය මත Q සහ P ලක්ෂ්‍යයන් පිහිටනුයේ පිළිවෙළින් A, Q, P සහ C වන සේ ද $AP = CQ$ වන සේ ද වේ.

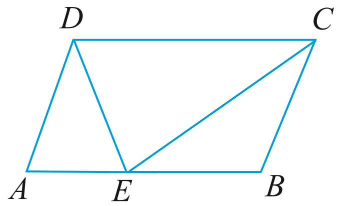
(i) රූප සටහනක මෙම තොරතුරු ලකුණු කර BP සහ DQ යා කරන්න.
(ii) $ABP\Delta \equiv CDQ\Delta$ බව ද
(iii) $BP \,//\, DQ$ බව ද සාධනය කරන්න.

10. රොම්බසයක විකර්ණ දෙකෙහි දිග පිළිවෙළින් 12 cm සහ 7 cm නම් රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

11. රූපයේ පරිදි $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ C සහ D ශීර්ෂ කෝණ සමච්ඡේදක O හිදී හමුවේ. දික් කළ CO සහ DO රේඛා පිළිවෙළින් P සහ Q හිදී AB හමුවේ.
(i) $P\hat{O}Q = 90^\circ$ බව පෙන්වන්න.
(ii) AQD සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.
(iii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රය රොම්බසයක් වන්නේ නම් ඉහත රූපය නැවත ඇඳ P සහ Q හි පිහිටීම් සොයන්න.



12. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වන අතර $A\hat{D}C$ සමච්ඡේදකය DE වේ. $D\hat{E}C = 90^\circ$ බව පෙන්වන්න.



සාරාංශය

- සම්මුඛ පාද සමාන්තර වන චතුරස්‍ර සමාන්තරාස්‍ර වේ.
- සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන වේ. සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ. එක් එක් විකර්ණය මගින් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වේ.
- සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකක් මගින් අනෙක සමච්ඡේදනය කරයි.
- සෘජුකෝණාස්‍රය සහ රොම්බසය සමාන්තරාස්‍රයේ ම විශේෂ අවස්ථා වන අතර ම සමචතුරස්‍රය යනු, සෘජුකෝණාස්‍රය සහ රොම්බසය යන දෙවර්ගයේ ම විශේෂ අවස්ථාවකි.