21 සමාන්තරාස්‍ර II

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- චතුරස්‍රයක්, සමාන්තරාස්‍රයක් වීමට සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතා හඳුනා ගැනීමටත්,
- ඒ ආශ්‍රිත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට,

හැකියාව ලැබේ.

21.1 සමාන්තරාස්‍ර

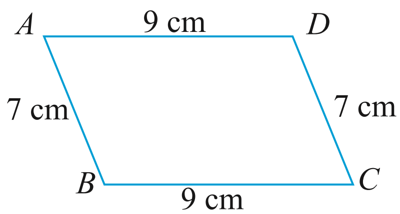
ඕනෑම සමාන්තරාස්‍රයක් චතුරස්‍රයක් වුවද සමාන්තරාස්‍ර නොවන චතුරස්‍ර පවතී. සම්මුඛ පාද සමාන්තර චතුරස්‍ර සමාන්තරාස්‍ර බව ඉහත පාඩමේ දී ඉගෙන ගත්තෙමු. ඒ සමඟම සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ කිහිපයක් ද එම ලක්ෂණ භාවිතයෙන් සමාන්තරාස්‍රයක් හඳුනා ගැනීමට ද උගත්තෙමු.

මෙම පාඩම යටතේ දී සම්මුඛ පාද සමාන්තර වීමට අමතරව පහත කරුණු මගින් චතුරස්‍රයක්, සමාන්තරාස්‍රයක් බව තහවුරු කරගත හැකි ය. ප්‍රමේයයන් කිහිපයක් මගින් එම කරුණු සාකච්ඡා කරමු.

ප්‍රමේයය

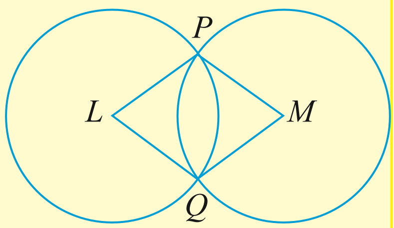
චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි.

$ABCD$ චතුරස්‍රයේ $AB = DC$ ද $BC = AD$ ද නම් $ABCD$ චතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.



නිදසුන 1

සමාන අර සහිත L සහ M කේන්ද්‍ර ලෙස ඇති වෘත්ත දෙකක් P හා Q හිදී ඡේදනය වී ඇත. (රූපය බලන්න.) $LPMQ$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



$LP = LQ$ (එකම වෘත්තයක අරයන්)

$MP = MQ$ (එකම වෘත්තයක අරයන්)

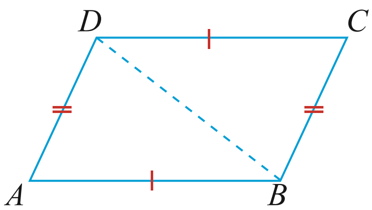
වෘත්ත දෙකෙහි අරයන් සමාන බැවින්,

$LP = LQ = MP = MQ$

$LP = MQ$ සහ $LQ = MP$ වේ.

$LPMQ$ චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද සමාන බැවින් $LPMQ$ සමාන්තරාස්‍රයකි. වැඩි දුරටත් සැලකීමේදී පාද 4ම සමාන බැවින් මෙය රොම්බසයක් වේ.

"චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි." යන ප්‍රමේයය විධිමත් ලෙස සාධනය පහත දැක්වෙයි.



දත්තය : $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $AB = DC$ සහ $AD = BC$ වේ.

සා.ක.යු : $ABCD$ චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් බව

නිර්මාණය : BD විකර්ණය අඳිමු.

සාධනය : $ABD\Delta$ සහ $BCD\Delta$ සලකමු.

$AB = DC$ (දත්තය)

$AD = BC$ (දත්තය)

$BD = BD$ (පොදු පාදය)

$\therefore ABD\Delta \equiv BCD\Delta$ (පා. පා. පා. අවස්ථාව)

මෙම අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ වේ. එම කෝණ ඒකාන්තර කෝණ වන බැවින් $AB//DC$ වේ.

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ වේ. එම කෝණ ඒකාන්තර කෝණ වන බැවින් $AD//BC$ වේ.

$\therefore$ මෙම චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද සමාන්තර බැවින්,

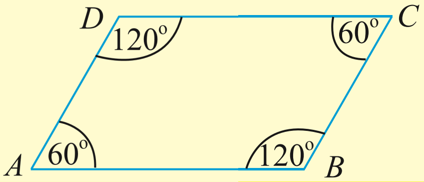
$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

ප්‍රමේයය

චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි.

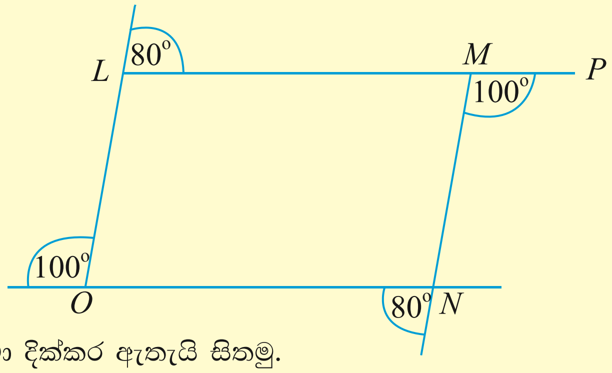
නිදසුන 2

$ABCD$ චතුරස්‍රයේ $D\hat{A}B = B\hat{C}D = 60^{o}$ ද නම් $A\hat{D}C = A\hat{B}C = 120^{o}$ ද නම් $ABCD$ චතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.



නිදසුන 3

$LMNO$ චතුරස්‍රයේ එක් එක් ශීර්ෂයේ බාහිර කෝණ රූපයේ පරිදි සටහන් කර ඇත. මෙම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



LM පාදය P දක්වා දික්කර ඇතැයි සිතමු.

$L\hat{M}N + N\hat{M}P = 180^{o}$

$L\hat{M}N + 100^{o} = 180^{o}$

$L\hat{M}N + 100^{o} - 100^{o} = 180^{o} - 100^{o}$

$L\hat{M}N = 80^{o}$

එලෙසම,

$L\hat{O}N = 80^{o}$

$M\hat{L}O = 100^{o}$

$M\hat{N}O = 100^{o}$ බව පෙන්විය හැකි ය.

$L\hat{M}N = L\hat{O}N$

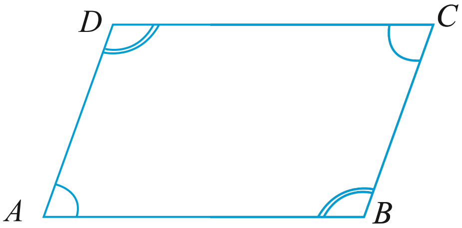
$M\hat{L}O = M\hat{N}O$ ලෙස සම්මුඛ කෝණ සමාන බැවින්,

$LMNO$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

සටහන

සාධනය කිරීමේ දී එකම සාධනය දෙවරක් හෝ කිහිප වතාවක් යෙදීම වෙනුවට ''එලෙසම'' හෝ ''ඉහත සාධනය ලෙසම'' වැනි වචන යොදා ප්‍රතිඵලය පමණක් දැක්වීමෙන් සාධනය කෙටි කරගත හැකි ය.

"චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි" යන ප්‍රමේයය විධිමත් ලෙස සාධනය පහත දැක්වෙයි.



දත්තය: $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ සහ $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ වේ.

සා.ක.යු: $ABCD$ චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් බව

සාධනය: $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (දත්තය)

$B\hat{A}D = B\hat{C}D$ (දත්තය)

$A\hat{B}C + B\hat{A}D + A\hat{D}C + B\hat{C}D = 360^{\circ}$

(චතුරස්‍රයක අභ්‍යන්තර කෝණ වල එකතුව 360° වන බැවින්)

$A\hat{B}C + A\hat{B}C + B\hat{A}D + B\hat{A}D = 360^{\circ}$

$2A\hat{B}C + 2B\hat{A}D = 360^{\circ}$

$A\hat{B}C + B\hat{A}D = 180^{\circ}$

$\therefore$ මෙම චතුරස්‍රයේ මිත්‍ර කෝණවල එකතුව 180° බැවින්, $AD//BC$ වේ.

එලෙසම $AB//DC$ බව පෙන්විය හැකි ය.

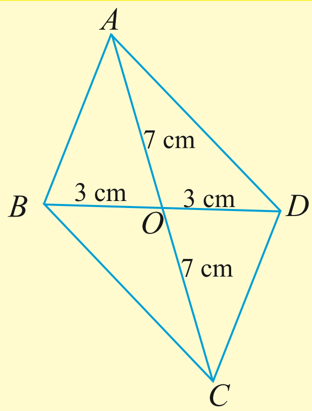
$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

ප්‍රමේයය

චතුරස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

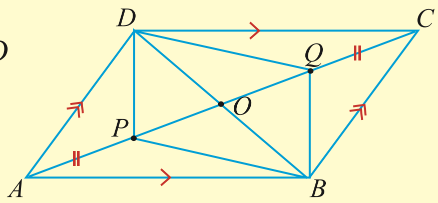
නිදසුන 4

$ABCD$ චතුරස්‍රයේ $AO = OC = 7\text{cm}$ ද $BO = OD = 3\text{cm}$ ද නම් $ABCD$ චතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.



නිදසුන 5

ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ $AP = QC$ නම් *PBQD* සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



$OB = OD$ —— (1)

$OA = OC$ (*ABCD* සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

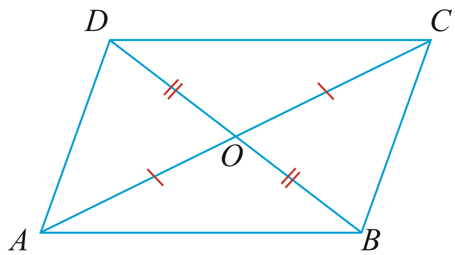
$AP + PO = CQ + QO$

$AP = CQ$ (දත්තය)

$OP = OQ$ —— (2)

(1) සහ (2) මගින්, *PBQD* සමාන්තරාස්‍රයකි. (විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

"චතුරස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි" යන ප්‍රමේයය විධිමත් ලෙස සාධනය පහත දැක්වෙයි.



දත්තය: *ABCD* චතුරස්‍රයේ $AO = OC$ සහ $BO = OD$ වේ.

සා.ක.යු: *ABCD* චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් බව

සාධනය: $AOD\Delta$ සහ $BOC\Delta$ සලකමු.

$AO = OC$ (දත්තය)

$DO = OB$ (දත්තය)

$A\hat{O}D = B\hat{O}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore AOD\Delta \equiv BOC\Delta$ (පා. කෝ. පා. අවස්ථාව)

මෙම අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

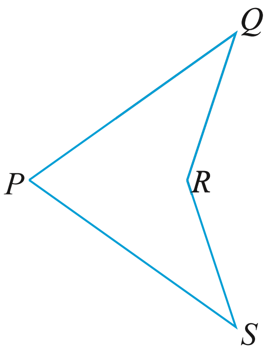
$D\hat{A}O = B\hat{C}O$ වේ. එම කෝණ ඒකාන්තර කෝණ වන බැවින් $AD//BC$ වේ.

එලෙසම $COD\Delta$ සහ $AOB\Delta$ අංගසම බව පෙන්වීමෙන් $AB//DC$ බව පෙන්විය හැකි ය.

$\therefore$ මෙම චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද සමාන්තර බැවින්,

ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි.

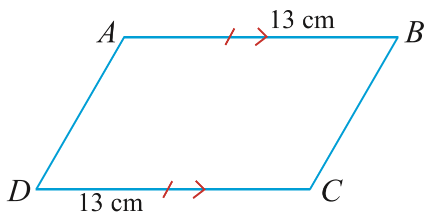
ඉහත දැක්වූ ප්‍රමේයයන් තුන ම සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ භාවිත කරමින් දක්වා ඇත. එහෙත් ඉහත පාඩමේ දී සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ හතරක් පෙන්වා දී ඇත. ඉන් එක ලක්ෂණයක් වන විකර්ණ මගින් වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වේ යන ලක්ෂණය චතුරස්‍රයක තිබුණ ද එය සමාන්තරාස්‍රයක් නොවිය හැකි ය. පහත රූපයේ පරිදි $PQRS$ චතුරස්‍රයේ PR විකර්ණය මගින් චතුරස්‍රය, වර්ගඵලයන් සමාන කොටස් දෙකකට වෙන් කළ හැකි ය. එහෙත් මෙම චතුරස්‍රය පැහැදිලිව ම සමාන්තරාස්‍රයක් නොවේ.



ඉහත ප්‍රමේයය තුනට අමතරව පහත දැක්වෙන ප්‍රමේයය මගින් ද චතුරස්‍රයක්, සමාන්තරාස්‍රයක් වේ දැයි සොයා ගත හැකි ය.

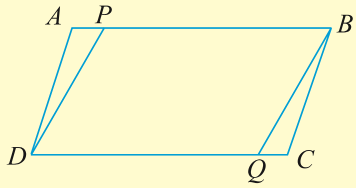
ප්‍රමේයය

චතුරස්‍රයක එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන ද සමාන්තර ද වේ නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.



$ABCD$ චතුරස්‍රයේ $AB = DC = 13\text{cm}$ ද $AB // CD$ ද නම් $ABCD$ චතුරස්‍රය, සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

නිදසුන 6



$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. $AP = CQ$ නම් $BQDP$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක් බැවින්,

$AB // DC$ ——— (1) (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන්තර බැවින්)

$AB = DC$ (සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන බැවින්)

$AP + PB = DQ + QC$

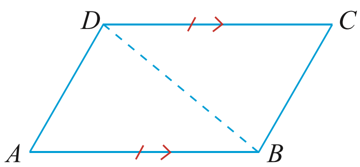
$AP = QC$ (දත්තය)

$PB = DQ$ ——— (2)

(1) සහ (2) මගින්

$PBQD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. (එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන ද සමාන්තර ද වන බැවින්)

"චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන ද සමාන්තර ද නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි" යන ප්‍රමේයය විධිමත් ලෙස සාධනය පහත දැක්වෙයි.



දත්තයः $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $AB = DC$ සහ $AB // DC$ වේ.

සා.ක.යු: $ABCD$ චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් බව

නිර්මාණය: BD විකර්ණය අඳිමු.

සාධනය: $ABD\Delta$ සහ $BCD\Delta$ සලකමු.

$AB = DC$ (දත්තය)

$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ (ඒකාන්තර කෝණ)

$BD = BD$ (පොදු පාදය)

$\therefore ABD\Delta \equiv BCD\Delta$ (පා. කෝ. පා. අවස්ථාව)

මෙම අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ වේ. එම කෝණ ඒකාන්තර කෝණ වන බැවින් $AD // BC$ වේ.

තවද $AB // DC$ (දත්තය)

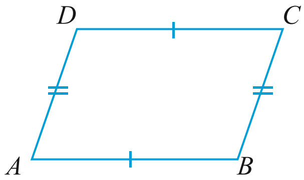
$\therefore$ මෙම චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද සමාන්තර බැවින්, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

ඉහත දී දක්වා ඇති ප්‍රමේයයන් සහ නිදසුන් අධ්‍යයනය කිරීමෙන් පසු පහත අභ්‍යාසවල යෙදෙන්න.

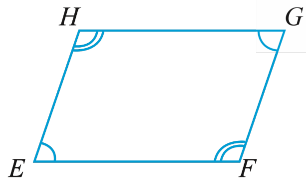
21.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන චතුරස්‍ර අතරින් සමාන්තරාස්‍ර තෝරන්න. සමාන්තරාස්‍ර වීමට හේතුව ද දක්වන්න.

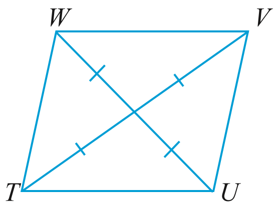
(i)



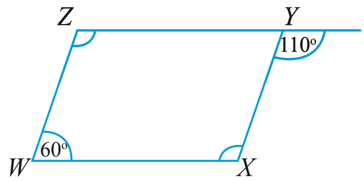
(ii)



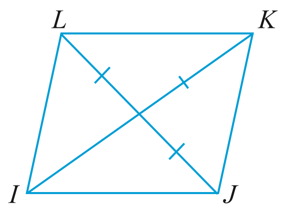
(iii)



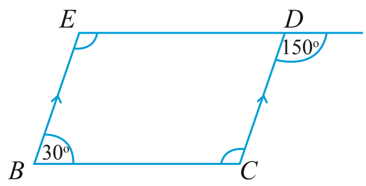
(iv)



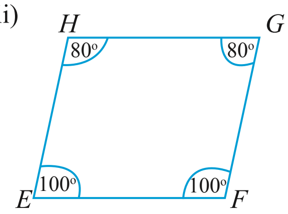
(v)



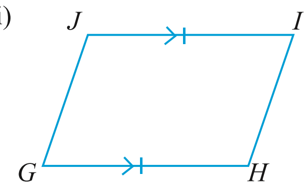
(vi)



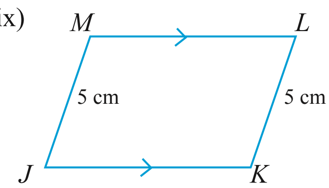
(vii)



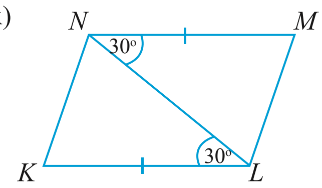
(viii)



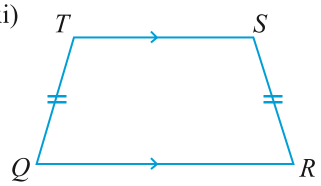
(ix)



(x)



(xi)

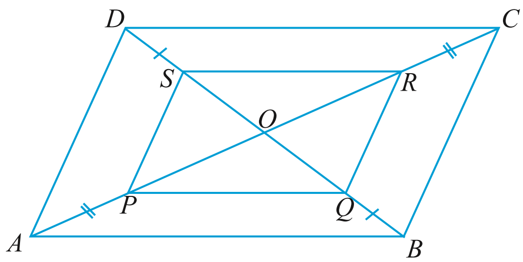


2. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ PR සහ QS විකර්ණ K හිදී ඡේදනය වේ. PQ සහ SR පාද පිළිවෙලින් X සහ Y හිදී ඡේදනය වන පරිදි K හරහා ඕනෑම රේඛාවක් ඇඳ ඇත. $XPYR$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB සහ AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D සහ E වේ. AB ට සමාන්තරව C හරහා ඇඳි රේඛාවට දික් කළ DE රේඛාව F හිදී හමුවේ. $BCFD$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

4. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC ට සමාන්තරව B සහ D හරහා ඇඳි සරල රේඛා දෙක මගින් DB ට සමාන්තරව A සහ C හරහා ඇඳි සරල රේඛා දෙක P, Q, R සහ S ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය වේ. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

5. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AC සහ BD විකර්ණ O හිදී ඡේදනය වේ. AC මත $AP = RC$ වන පරිදි P සහ R ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ද BD මත $BQ = SD$ වන පරිදි Q සහ S ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ද රූපයේ පරිදි පිහිටා ඇත.
(i) $OP = OR$ බවද
(ii) $OQ = OS$ බවද
(iii) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බවද



6. PQR ත්‍රිකෝණයේ P හරහා QR ට සමාන්තර ලෙස ඇඳි සරල රේඛාව ද R හරහා PQ ට සමාන්තර ලෙස ඇඳි සරල රේඛාව ද B හි දී හමුවේ. Q හරහා ඇඳි සරල රේඛාවක් දික්කළ BR සහ දික්කළ BP පිළිවෙළින් A සහ C හිදී හමුවේ. $BR = AR$ නම්,
(i) $PR//CA$ බව ද
(ii) $PRQC$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව ද සාධනය කරන්න.

සාරාංශය

- චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි.
- චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි.
- චතුරස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.
- චතුරස්‍රයක එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන ද සමාන්තර ද වේ නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.