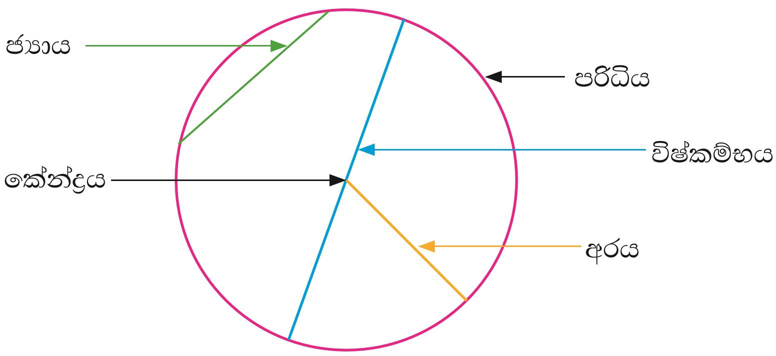
24 වෘත්තයක ජ්‍යාය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- "වෘත්තයක පිහිටි විෂ්කම්භයක් නොවන ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රයට යා කරන සරල රේඛාව එම ජ්‍යායට ලම්බක වේ" යන ප්‍රමේයය සාධනය හා එම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට
- "වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට විෂ්කම්භය නොවන ජ්‍යායකට අඳින ලද ලම්බයෙන් එම ජ්‍යාය සමච්ඡේදනය වේ" යන ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබේ.

24.1 හැඳින්වීම



සටහන

- වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට වෘත්තය (පරිධිය) මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක් යා කරන සරල රේඛා ඛණ්ඩයට අරය යැයි කියනු ලැබේ.
- වෘත්තය (පරිධිය) මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍ය 2ක් යා කරන සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට ජ්‍යායක් යැයි කියනු ලැබේ.
- වෘත්තයක කේන්ද්‍රය හරහා යන ජ්‍යාය විෂ්කම්භය ලෙස හැඳින්වේ. තවද එය දිගින් විශාලම ජ්‍යාය වන අතර එහි දිග අරය මෙන් දෙගුණයකි.

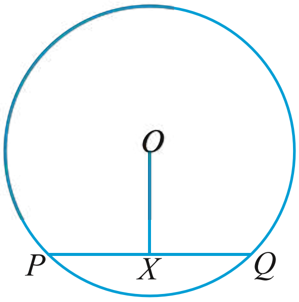
ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 - අරය 4.5 cm වන වෘත්තයක් ඇඳ එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 2 - දිග 6 cm වන ජ්‍යායක් ඉහත වෘත්තය මත ඇඳ එය PQ ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3 - PQ ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X ලෙස ලකුණු කරන්න.

පියවර 4 - $O\hat{X}P$ හි අගය මැන ලියන්න.



අරය හා ජ්‍යායේ දිග වෙනස් කරමින් ඉහත ක්‍රියාකාරකම නැවත සිදු කරමින්, ලබා ගත හැකි නිගමනය සිසුන් සමග සාකච්ඡා කරන්න.

ප්‍රමේයය

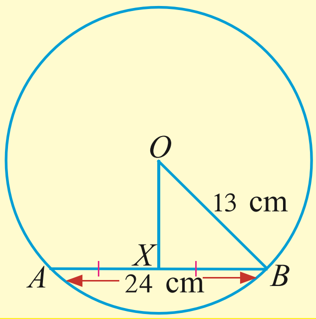
වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් විෂ්කම්භය නොවන ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන සරල රේඛාව එම ජ්‍යායට ලම්බ වේ.

ඉහත ප්‍රමේයය භාවිත වී ඇති පහත නිදසුන් පිළිබඳ ව හොඳින් අවධානය යොමු කරන්න.

නිදසුන 1

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක අරය 13 cm වේ. AB යනු ඉහත වෘත්තය මත පිහිටි දිගින් 24 cm වූ ජ්‍යායකි. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X නම් OX දිග සොයන්න.

ඉහත තොරතුරු පහත පරිදි රූප සටහනක දක්වමු.



ඉහත ප්‍රමේයයට අනුව $O\hat{X}B = 90^{o}$ වේ.

තවද $XB = \frac{24}{2} = 12$ cm (X යනු ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා)

ඒ අනුව OXB සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් බැවින් පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$OB^2 = OX^2 + XB^2$$

$$13^2 = OX^2 + 12^2$$

$$\therefore\ 169 = OX^2 + 144$$

$$169 - 144 = OX^2$$

$$25 = OX^2$$

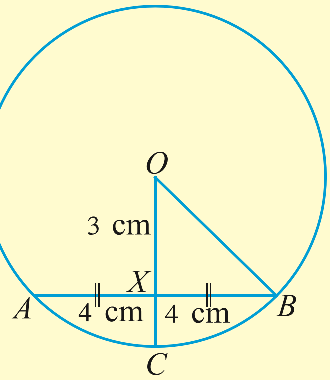
$$OX^2 = 25$$

$$OX = \sqrt{25}$$

$$OX = 5 \text{ cm}$$

නිදසුන 2

AB යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යායකි. $AB = 8$ cm වන අතර AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ. දික් කළ OX, C හි දී වෘත්තය හමුවන අතර $OX = 3$ cm නම් CX හි දිග ගණනය කරන්න.



$BX = \frac{8}{2} = 4$ cm (X යනු Aහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා)

$O\hat{X}B = 90^{o}$ නිසා (ප්‍රමේයයෙන්)

$OXB\ \Delta$ ට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදමු.

$$OB^2 = OX^2 + XB^2$$

$$OB^2 = 3^2 + 4^2$$

$$OB^2 = 9 + 16$$

$$OB^2 = 25$$

$$OB = \sqrt{25}$$

$$OB = 5 \text{ cm}$$

$\therefore\ OC = 5$ cm (වෘත්තයේ අරය)

ඒ අනුව, $CX = OC - OX$

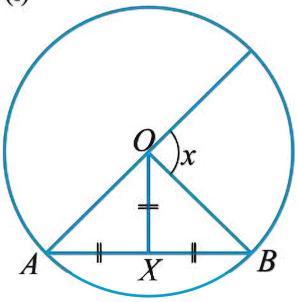
$= 5 - 3$

$= 2$ cm

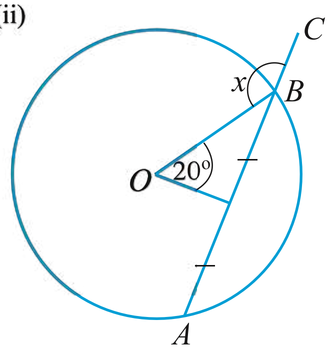
24.1 අභ්‍යාසය

1. පහත රූප සටහන්වල දී ඇති දත්ත අනුව x හි අගය සොයන්න. එක් එක් වෘත්තවල කේන්ද්‍රය O වේ.

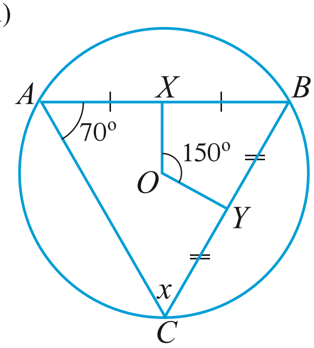
(i)



(ii)

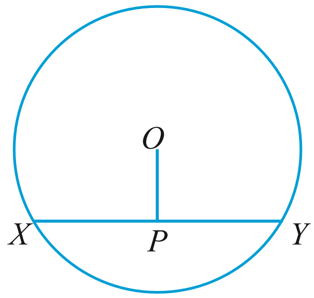


(iii)



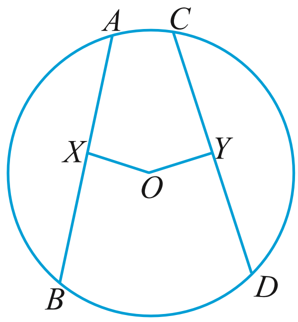
2. C කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක PQ ජ්‍යායකි. PQ ජ්‍යායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ. $PQ = 24$ cm ද $CX = 5$ cm ද නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.

3. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක අරය 15 cm වේ. XY යනු වෘත්තය මත පිහිටි ජ්‍යායකි. XY හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. $OP = 12$ cm නම් XY ජ්‍යායේ දිග සොයන්න.

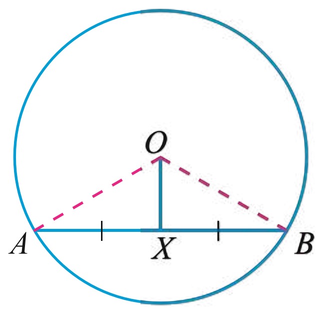


4. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා CD සමාන ජ්‍යාය 2 කි. AB හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ. $CD = 12$ cm හා $OY = 8$ cm වේ.

   (i) වෘත්තයේ අරය සොයන්න.
   (ii) OX හි දිග සොයන්න.
   (iii) OX හා OY අතර සම්බන්ධතාවක් ලියන්න.



"වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් විෂ්කම්භය නොවන ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව එම ජ්‍යායට ලම්බක වේ" යන ප්‍රමේයය විධිමත්ව සාධනය කිරීම.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB ජ්‍යායක් වේ. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : ABට OX ලම්බ බව

නිර්මාණය : OA හා OB යා කරන්න.

සාධනය : AOX හා OBX ත්‍රිකෝණවල

$AO = BO$ (එකම වෘත්තයේ අරය සමාන බැවින්)

$AX = BX$ (AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X බැවින්)

$OX = OX$ (පොදු පාදය බැවින්)

$\therefore\ AOX\,\Delta \equiv OBX\,\Delta$ (පා.පා.පා. අවස්ථාව)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සැලකීමෙන්

$O\hat{X}A = O\hat{X}B$

නමුත් $O\hat{X}A + O\hat{X}B = 180^{o}$ (සරල රේඛාවක් මත පිහිටි බද්ධ කෝණ)

$\therefore\ 2\ O\hat{X}A = 180^{o}$

$O\hat{X}A = \dfrac{180^{o}}{2}$

$O\hat{X}A = 90^{o}$

$\therefore\ AB$ට OX ලම්බ වේ.

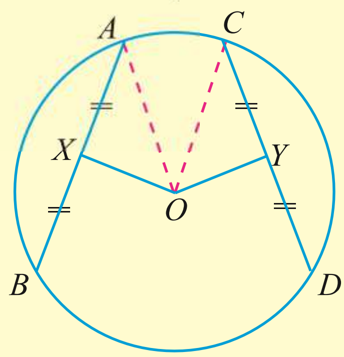
නිදසුන 3

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා CD සමාන ජ්‍යා 2කි. AB හා CDහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ.

(i) $OX = OY$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) දික්කළ BA හා DC වෘත්තයට පිටතින් වූ Pහි දී හමු වේ. $BP = DP$ බව සාධනය කරන්න.

(i) ගැටලුවට අදාළ දත්තයන් පහත පරිදි රූප සටහනක දැක්විය හැකි ය.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා CD සමාන ජ්‍යා 2කි. AB හා CDහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $OX = OY$ බව

සාධනය : $O\hat{X}A = O\hat{Y}C = 90^{\circ}$ (ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රයට යා කරන රේඛාව එම ජ්‍යායට ලම්බක නිසා)

දැන් $AB = CD$ (දත්තය)

$$\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$$

$\therefore AX = CY$ (ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X ද CDහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y ද වන නිසා)

දැන් AXO හා CYO ත්‍රිකෝණවල

$AO = OC$ (එකම වෘත්තයේ අරය සමාන නිසා)

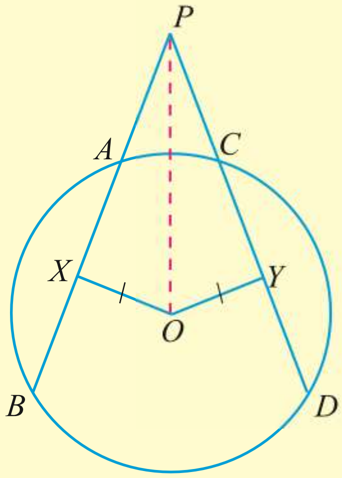
$O\hat{X}A = O\hat{Y}C = 90^{\circ}$

$AX = CY$ (සාධිතයි.)

$\therefore AXO\,\Delta \equiv CYO\,\Delta$ (කර්ණ. පා. අවස්ථාව)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සැලකීමෙන්
$OX = OY$ වේ.

(ii)



දත්තය : දික්කළ BA හා DC වෘත්තයට පිටතින් වූ Pහි දී හමු වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $PB = PD$ බව

නිර්මාණය : OP යා කර ඉහත පරිදි රූප සටහනක දක්වමු.

සාධනය : POX හා POY ත්‍රිකෝණවල

$PO = PO$ (පොදු පාදය)

$OX = OY$ (සාධිතයි.)

$O\hat{X}P = O\hat{Y}P = 90^{o}$

$\therefore POX\,\Delta \equiv POY\,\Delta$ (කර්ණ. පා. අවස්ථාව)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සැලකීමෙන්

$PX = PY$

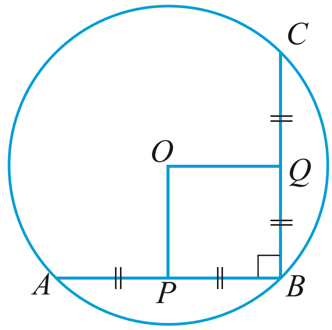
නමුත් $BX = DY$ (ඉහත පරිදි)

$PX + BX = PY + DY$

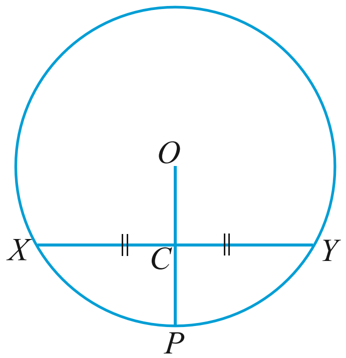
$PB = PD$

24.2 අභ්‍යාසය

1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා BC යනු එකිනෙකට ලම්බ වූ සමාන ජ්‍යාය 2කි. AB හා BC මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙළින් P හා Q වේ. $OPBQ$ සමචතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

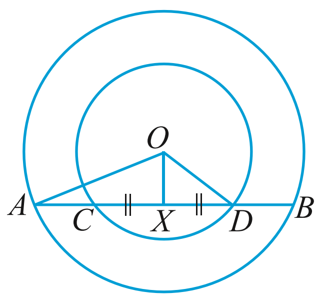


2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක XY ජ්‍යායකි. XYහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C වේ. දික්කළ OC වෘත්තය මත Pහි දී හමු වේ. $OC = CP$ නම් $OY = YP$ බව සාධනය කරන්න.

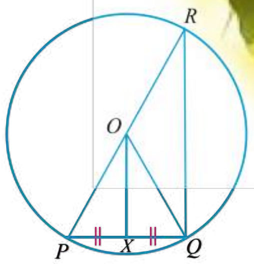


3. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක XY ජ්‍යායකි. XYහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. $O\hat{Y}P = 45^\circ$ නම් POY සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

4. රූපයේ දැක්වෙන්නේ O කේන්ද්‍රය වූ ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත 2කි. AB යනු විශාල වෘත්තය මත ජ්‍යායක් වන අතර එය කුඩා වෘත්තය C හා Dහි දී හමු වේ. CDහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ. AXO Δ වර්ගඵලය: DXO Δ වර්ගඵලය $= AX : XD$ බව සාධනය කරන්න.



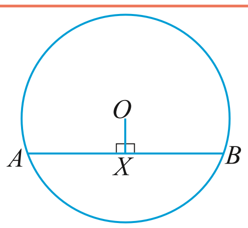
5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක PQ ජ්‍යායක් වේ. PQ හා මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වේ. දික්කළ PO, වෘත්තය R හි දී හමු වේ. $X\hat{O}Q = 30^\circ$ නම් PQR ඍජුකෝණියක් බව පෙන්වන්න.



24.2 ප්‍රමේයයේ විලෝමය හා එහි භාවිතය

ප්‍රමේයය

වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට විෂ්කම්භය නොවන ජ්‍යායකට අඳිනු ලබන ලම්බයෙන් එම ජ්‍යාය සමච්ඡේදනය වේ.



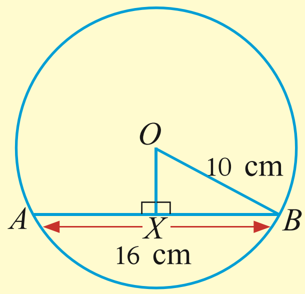
O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB ජ්‍යායකි.

OX, AB ට ලම්බ වේ නම්, $AX = XB$ වේ.

නිදසුන 1

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක අරය 10 cm වේ. වෘත්තය මත පිහිටි AB ජ්‍යායේ දිග 16 cm වේ. AB ට ලම්බකව OX ඇඳ ඇත. OX දිග සොයන්න.

ඉහත දත්ත පහත පරිදි රූප සටහනක දක්වමු.



$AB = 16$ cm (දී ඇත.)

$\therefore AX = XB = \dfrac{16}{2} = 8$ cm (ලම්බයෙන් ජ්‍යාය සමච්ඡේදනය වන නිසා)

දැන් OXB Δට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$OB^2 = OX^2 + XB^2$

$10^2 = OX^2 + 8^2$

$100 = OX^2 + 64$

$100 - 64 = OX^2$

$36 = OX^2$

$\sqrt{36} = OX$

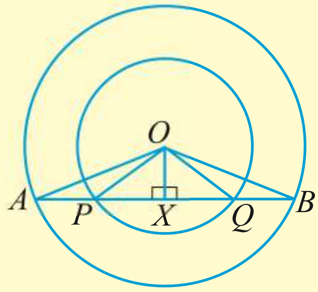
$\therefore OX = 6$ cm

නිදසුන 2

O කේන්ද්‍රය වූ ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත 2කි. විශාල වෘත්තය මත පිහිටි AB ජ්‍යාය කුඩා වෘත්තය P හා Qහි දී ඡේදනය කරයි. OX , AB ට ලම්බක වේ.

$AP = QB$ බව ද $AOP\,\Delta \equiv BOQ\,\Delta$ බව ද සාධනය කරන්න.

ඉහත ගැටලුවලට අදාළ දත්ත පහත පරිදි රූප සටහනක ඇතුළත් කරමු.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත 2කි. විශාල වෘත්තය මත පිහිටි AB ජ්‍යාය කුඩා වෘත්තය P හා Qහි දී ඡේදනය කරයි. OX , AB ට ලම්බක වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $AP = QB$ බව හා $AOP\,\Delta \equiv BOQ\,\Delta$ බව

සාධනය : OX , AB ට ලම්බක නිසා

$AX = XB$ වේ. (ලම්බකයෙන් ජ්‍යාය සමච්ඡේද වන බැවින්)

ඉහත පරිදි ම PQ හා OX ද ලම්බ බැවින්,

$PX = XQ$ වේ.

$\therefore\ AX - PX = XB - XQ$

ඒ අනුව, $AP = QB$

AOP හා BOQ ත්‍රිකෝණවල

$AP = QB$

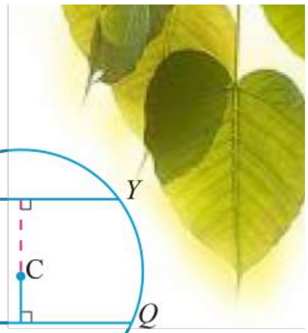
$OP = OQ$ (එකම වෘත්ත අරය සමාන බැවින්)

$OA = OB$ (එකම වෘත්ත අරය සමාන බැවින්)

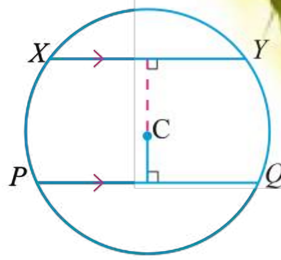
$\therefore\ AOP\,\Delta \equiv BOQ\,\Delta$ (පා.පා.පා. අවස්ථාව)

24.3 අභ්‍යාසය

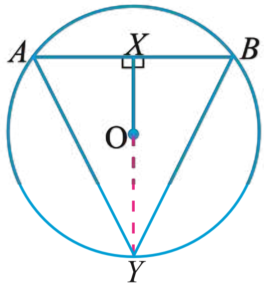
1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක අරය 17 m වේ. වෘත්තය මත AB ජ්‍යායක් පිහිටා ඇත. AB මත X පිහිටා ඇත්තේ OX හා AB ලම්බ වන පරිදි ය. $OX = 8$ cm නම් ජ්‍යායේ දිග සොයන්න.



2. C කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය XY හා PQ සමාන්තර ජ්‍යාය දෙකකි. $XY = 40$ cm හා $PQ = 48$ cm වේ. වෘත්තයේ අරය 25 cm නම් XY හා PQ අතර ලම්බ දුර සොයන්න.

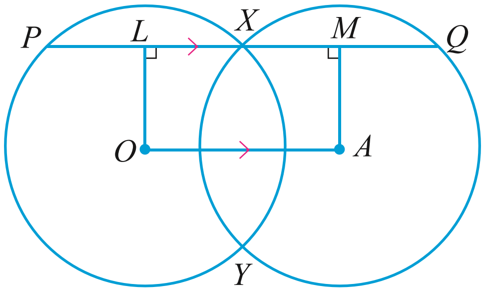


3. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB ජ්‍යායකි. AB මත X පිහිටා ඇත්තේ OX, AB ට ලම්බක වන පරිදි ය. දික්කළ XO රේඛාව Y හි දී වෘත්තය හමුවේ. AYB සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.



4. O හා A කේන්ද්‍ර වන අරයන් සමාන වෘත්ත දෙකක් X හා Yහි දී ඡේදනය වේ. OAට සමාන්තර ලෙස X හරහා ඇඳි සරල රේඛාවක් වෘත්ත දෙක පිළිවෙළින් P හා Qහි දී හමු වේ. PQ රේඛාව මත L හා M පිහිටා ඇත්තේ OL, PX ට ලම්බක හා AM, XQ ට ලම්බක වන පරිදි ය.

(i) OX හා AX යා කර, $OLX\,\Delta \equiv OQX\,\Delta$ බව
(ii) $PX = XQ$ බව සාධනය කරන්න.



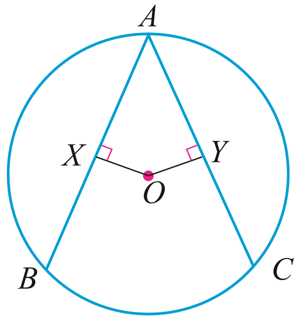
මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක PQ, QR හා PR ජ්‍යායන් තුනකි. PQ, QR හා PR ජ්‍යායන්ට O සිට ඇඳි ලම්බයන් පිළිවෙළින් OX, OY හා OZ වේ.

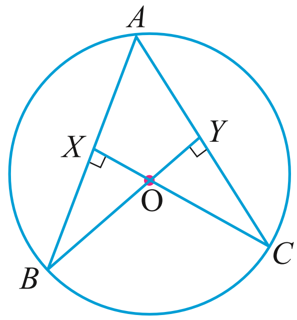
(i) OQ යා කළ විට, $OQX\,\Delta \equiv OYQ\,\Delta$ බව
(ii) $PQ = QR$ බව
(iii) PQR සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව
සාධනය කරන්න.

2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා AC ජ්‍යායන් දෙකකි. AB හා AC ට කේන්ද්‍රයේ සිට ඇඳි ලම්බයන් පිළිවෙළින් OX හා OY වේ.

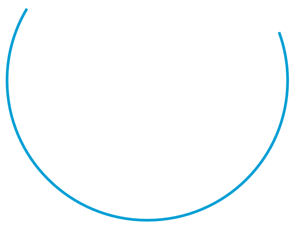
$OX^2 - OY^2 = \frac{1}{4}(AC^2 - AB^2)$ බව සාධනය කරන්න.



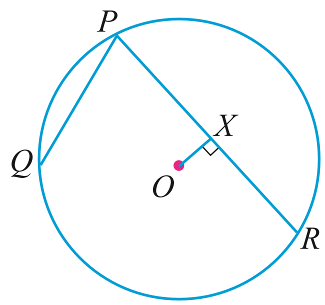
3. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා AC ජ්‍යායන් දෙකකි. O සිට AB ට හා AC ට අඳින ලම්බ පිළිවෙළින් OX හා OY වේ. CX හා BY සරල රේඛා නම් $CX = BY$ බව සාධනය කරන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන්නේ වෘත්ත චාපයකි. මීට අදාළ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය පිහිටි ස්ථානය සොයා ගැනීමට සුදුසු ක්‍රමයක් සඳහන් කර රූප සටහනේ ලකුණු කර දක්වන්න.



5. PQ හා PR යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ජ්‍යායන් දෙකකි. O සිට PR ට අඳින ලද ලම්බය OX වේ. $PQ = PX$ නම් $PR = 2PQ$ බව සාධනය කරන්න.



සාරාංශය

- වෘත්තයක කේන්ද්‍රයත් විෂ්කම්භය නොවන ජ්‍යායක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කරන රේඛාව එම ජ්‍යායට ලම්බ වේ.
- වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට විෂ්කම්භය නොවන ජ්‍යායකට අඳිනු ලබන ලම්බයෙන් එම ජ්‍යාය සමච්ඡේදනය වේ.