4 පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

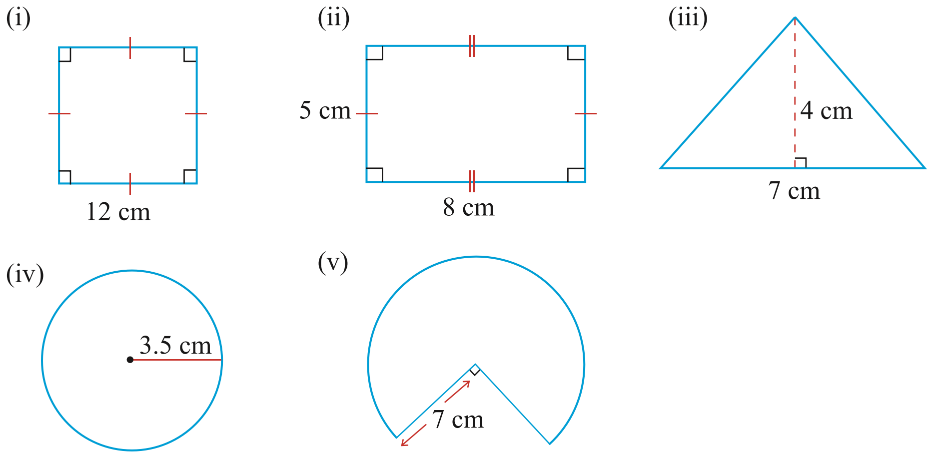
- සෘජු කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට,
- ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කිරීමට,

හැකියාව ලැබේ.

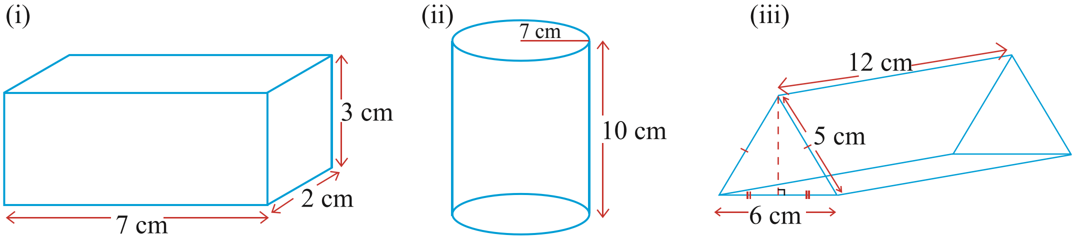
ඔබ විසින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී උගත් වර්ගඵලය පිළිබඳ සංකල්පය නැවත ආවර්ජනය කිරීම සඳහා පහත දක්වා ඇති පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයෙහි යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දක්වා ඇති තල රූපයන්හි වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

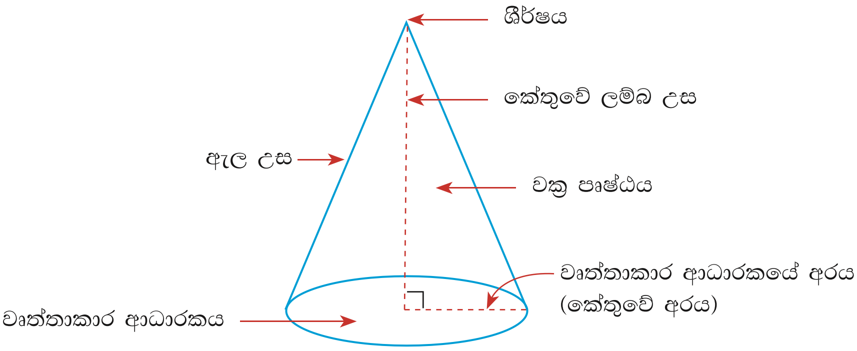


2. පහත දක්වා ඇති ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.



4.1 කේතුව

ඉහත දක්වා ඇති ආකාරයේ වස්තු කේතු ලෙස හැඳින්වේ. කේතුවකට වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨ කොටසක් හා වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසක් ඇත. එම වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨ කොටසට කේතුවේ ආධාරකය යැයි කියනු ලැබේ.



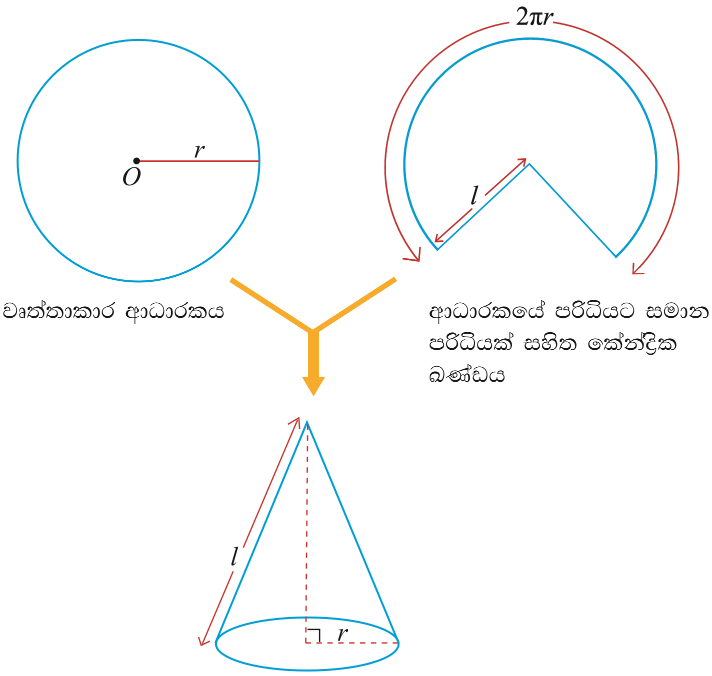
කේතුවක ආධාරක වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ශීර්ෂයට යා කෙරෙන රේඛා ඛණ්ඩය ආධාරකයට ලම්බක වේ නම් එය සෘජු වෘත්ත කේතුවක් ලෙස හැඳින්වේ. කේතුවක ආධාරක වෘත්තයේ අරයට කේතුවේ අරය යැයි ද ආධාරක වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා ශීර්ෂය අතර දුරට කේතුවේ ලම්බ උස යැයි ද කියනු ලැබේ. එමෙන් ම කේතුවේ ශීර්ෂය සහ ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක් යා කෙරෙන රේඛා ඛණ්ඩයේ දිගට කේතුවේ ඇල උස යැයි ද කියනු ලැබේ.

සාමාන්‍යයෙන් කේතුවක අරය r මගින් ද උස h මගින් ද ඇල උස l මගින් ද නිරූපණය කරයි.

සෘජු වෘත්ත කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

කේතුවක අරය සහ ඇල උස දී ඇති විට එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සෙවීම සඳහා එහි පෘෂ්ඨ කොටස්හි වර්ගඵලයන් සොයා ඓක්‍යය ගත යුතු ය. පතුලේ ආධාරක වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය වෘත්තයක වර්ගඵලය සෙවීමේ සූත්‍රය ආධාරයෙන් ගණනය කළ හැකි ය. වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සෙවීම පහත පරිදි විමසා බලමු.

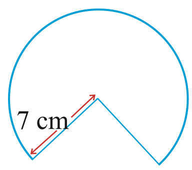
ඔබ මින් පෙර ශ්‍රේණිවලදී කේතුවක් සාදා ගත් ආකාරය මතකයට නඟා ගන්න. එහිදී වෘත්තාකාර කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක් ගෙන එම වෘත්තයේ පරිධිය වටා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් අලවා ගැනීමෙන් කේතුවක් සාදා ගන්නා ලදි. එවිට, කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ කොටස කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය ලෙස පිහිටයි. තව ද කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ පරිධිය වෘත්තාකාර ආධාරකය මත පිහිටන අතර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය කේතුවේ ඇල උස ලෙස පිහිටයි.



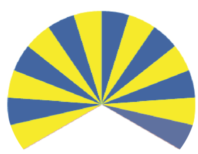
කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය ලබා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම 1

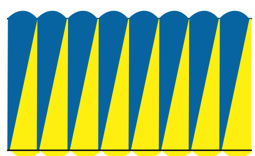
පියවර 1 - පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අරය 7 cm වූ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් කඩදාසියක් මත පිටපත් කර ගන්න. (කේන්ද්‍රික කෝණයේ අගය කුමක් වුව ද ක්‍රියාකාරකම සිදු කළ හැකි ය.)



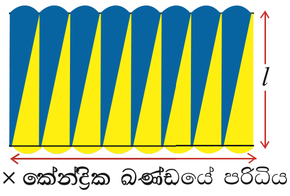
පියවර 2 - පහත රූපයේ පරිදි කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය කුඩා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩවලට බෙදා වර්ණ දෙකකින් එම තීරු වර්ණ ගන්වන්න.



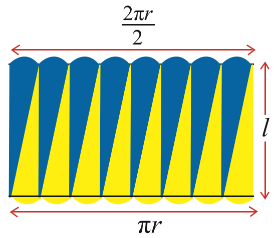
පියවර 3 - දැන් ඉහත තීරු සුදුසු උපකරණයක් මගින් වෙන් කර පහත රූපයේ දක්වා ඇති ආකාරයට වෙනත් කඩදාසියක අලවන්න.



කුඩා කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ සියල්ල අලවා අවසන් කළ පසු ඔබට ලැබෙන තල රූපය දෙස බලන්න. එය බොහෝ දුරට සෘජුකෝණාස්‍රාකාර හැඩයකට සමාන වී ඇත. (එම කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ කුඩා වූ විට) තව ද වෙන් කළ තීරු ප්‍රමාණයෙන් හරියට බාගය බැගින් සෘජුකෝණාස්‍රයේ එක් අතකට සමාන්තර පාද මත ඇලවී ඇත. කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කොටසේ පළල ලෙස ලැබී ඇත. මේ අනුව අරය l වන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් ගෙන ඉහත ක්‍රියාකාරකම සිදු කළේ නම් ලැබෙන සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය පහත පරිදි වේ.



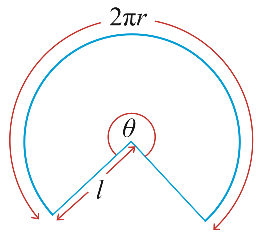
කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨ ආධාරක වෘත්තය මත පිහිටන නිසා අරය r වූ කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨය සාදන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ පරිධිය $2\pi r$ වේ. එබැවින්,



$\therefore$ ආශ්‍රිත සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය $= \pi r \times l$

$\therefore$ කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi rl$

වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටස වන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ වර්ගඵලය මෙලෙස ද ගණනය කළ හැකි ය.



කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ අරය l වේ. කේතුවේ අරය r නම් ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය මත කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ චාප දිග පිහිටන නිසා චාප දිග $2\pi r$ වේ. කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ කේන්ද්‍ර කෝණය θ නම්, කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක චාප දිග සොයන සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$$2\pi l \times \frac{\theta}{360^{\circ}} = 2\pi r$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{2\pi l} \times 360^{\circ}$$

$$\theta = \frac{360^{\circ}\, r}{l} \text{ වේ.}$$

මෙම θ කේන්ද්‍ර කෝණය සහිත කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක වර්ගඵලය සූත්‍රය භාවිතයෙන් ලබා ගනිමු.

$$\frac{\theta}{360^{\circ}} \times \pi l^2$$

θ ට මුල් සමීකරණයේ අගය ආදේශ කළ විට, $\frac{360^{\circ} r}{l} \times \frac{\pi l^2}{360^{\circ}} = \pi rl$

මේ අනුව, කේතුවක වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය πrl වේ. එම නිසා,

කේතුවක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \left(\text{වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය}\right) + \left(\text{වෘත්තාකාර ආධාරකයේ වර්ගඵලය}\right)$

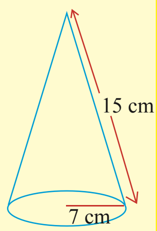
$= \pi rl + \pi r^2$

මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්, $\boxed{A = \pi rl + \pi r^2}$

කේතුවක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය පිළිබඳ නිදසුන් කිහිපයක් පිළිබඳ අවධානය යොමු කරමු.

නිදසුන 1

රූපයේ දක්වා ඇති ඝන කේතුවේ අරය 7 cm ද ඇල උස 15 cm ද වේ. කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න. ($\pi = \frac{22}{7}$ ලෙස සලකන්න.)



කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r \times l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$

$= 330 \text{ cm}^2$

වෘත්තාකාර තල පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154 \text{ cm}^2$

$\therefore$ කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 330 \text{ cm}^2 + 154 \text{ cm}^2$

$= 484 \text{ cm}^2$

නිදසුන 2

ආධාරකයේ පරිධිය 44 cm ක් වූ කේතුවක උස 24 cm ක් වේ.

(i) කේතුවේ අරය සොයන්න.
(ii) කේතුවේ ඇල උස සොයන්න.
(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

(i) කේතුවේ අරය r නම්, ආධාරක වෘත්තයේ පරිධිය $= 2\pi r$

$$44 = 2\pi r$$

$$44 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{44 \times 7}{44} = r$$

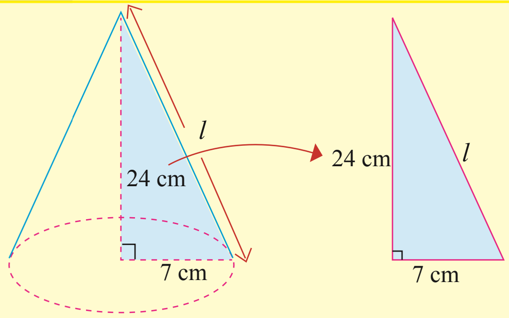
$$7 = r$$

$\therefore$ කේතුවේ අරය 7 cm වේ.

(ii) පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව,

$$l^2 = 24^2 + 7^2$$
$$l^2 = 576 + 49$$
$$l^2 = 625$$
$$l = \sqrt{625}$$
$$= 25$$

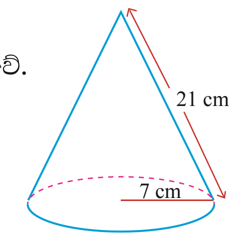
$\therefore$ කේතුවේ ඇල උස 25 cm කි.



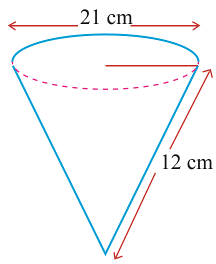
(iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= \pi rl + \pi r^2$

$$= \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 25\right) + \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7\right)$$
$$= 550\ \text{cm}^2 + 154\ \text{cm}^2$$
$$= 704\ \text{cm}^2$$

4.1 අභ්‍යාසය



1. තහඩුවකින් තනන ලද පතුල සහිත කේතුවක් රූපයේ දැක්වේ. එහි පතුලේ අරය 7 cmකි. ඇල උස 21 cm කි. එහි,
   (i) පතුලේ වර්ගඵලය සොයන්න.
   (ii) වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
   (iii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන්නේ ඇලුමිනියම් ලෝහයෙන් තැනූ කේතු ආකාර පුනීලයකි. පුනීලයේ බාහිර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

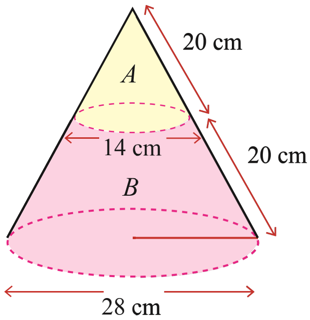
3. ආධාරකයේ පරිධිය 88 cmක් වූ කේතු ආකාරයේ වැලි ගොඩක ඇල උස 20 cmකි. එම වැලි ගොඩෙහි,
   (i) පතුලේ අරය ගණනය කරන්න.
   (ii) එම වැලි ගොඩ වැසීමට අවශ්‍ය කැන්වස් රෙද්දක අවම වර්ගඵලය සොයන්න.

4. ඇල උස 25 cm ද ඍජු උස 24 cm ද වූ ඝන කේතුවක,
   (i) පතුලේ අරය ගණනය කරන්න. (ii) මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. පතුලේ අරය 14 cmක් වූ කේතුවක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 1496 cm^2 නම් කේතුවේ ඇල උස සොයන්න.

6. කේතුවක හැඩයෙන් යුත් ඝන වස්තුවක ඇල උස 14 cm වේ. එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය 396 cm^2 නම්, කේතුවේ අරය ගණනය කරන්න.

7. ඍජු වෘත්ත ඝන කේතුවක් රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට කපා වෙන් කර ඇත. ඉහළ කොටස A ලෙස ද පහළ කොටස B ලෙස ද නම් කර ඇත.



(i) සම්පූර්ණ කේතුවෙහි ඇති වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(ii) A ලෙස නම් කර ඇති කේතු කොටසේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(iii) B ලෙස නම් කර ඇති කොටසේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.
(iv) ඍජු වෘත්ත ඝන කේතුවේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.

4.2 ගෝලය


ටෙනිස් බෝලය

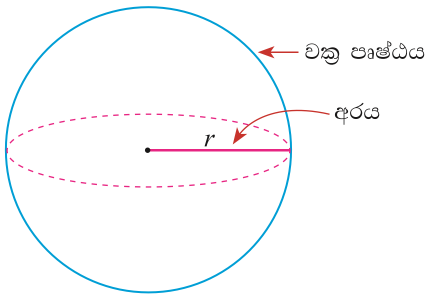

පාපන්දුව


යගුලිය


වීදුරු බෝල කිහිපයක්


ලෝක ගෝලය

ගෝලීය හැඩය පිළිබඳ ව මේ වන විටත් ඔබ විසින් පැහැදිලි අවබෝධයක් ලබා ඇත. අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට නියත දුරකින් ත්‍රිමාන අවකාශයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය කුලකය ගෝලයක් ලෙස හැඳින්වේ. එම අචල ලක්ෂ්‍යයට ගෝලයේ කේන්ද්‍රය යැයි ද නියත දුරට අරය යැයි ද කියනු ලැබේ. ගෝලයට දාර හෝ ශීර්ෂ නොමැති අතර එක් වක්‍ර පෘෂ්ඨයක් පමණක් ඇත.

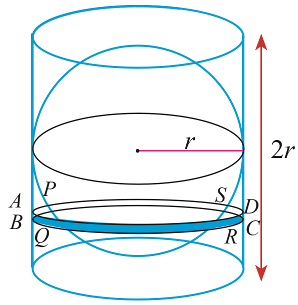


සාමාන්‍යයෙන් ගෝලයක අරය r මගින් නිරූපණය කරයි.

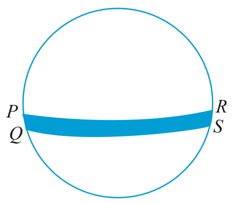
ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

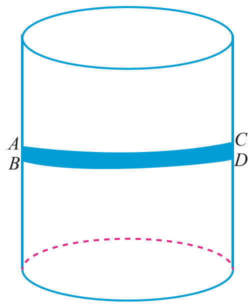
ගෝලයට දාර, ශීර්ෂ නොමැති බැවින් අප විසින් ඉහත දී අධ්‍යයනය කළ ඝන වස්තූන් මෙන් ගෝලය විවිධ කොටස්වලට වෙන් කර වර්ගඵලය ගණනය කළ නොහැකි ය. එබැවින් ගෝලයක වර්ගඵලය ගණනය කිරීම සඳහා ක්‍රි.පූ 225 දී ග්‍රීසියේ විසූ ආකිමිඩීස් නම් ගණිතඥයා විසින් නිරීක්ෂණය කළ සංසිද්ධියක් යොදා ගනී.

''ගෝලයක අරයට සමාන අරයක් ද ගෝලයේ විෂ්කම්භයට සමාන උසක් සහිත සිලින්ඩරයකට එම ගෝලයේ පරිසිලින්ඩරය යැයි කියනු ලැබේ. එම ගෝලය සිලින්ඩරය තුළ ඇති විට සිලින්ඩරයේ වෘත්තාකාර තල මුහුණතට සමානව කපන ලද ඕනෑ ම කැපුම් 2ක් මගින් ලබා ගත් ජීන්නක (පෙත්තක) වල ගෝලයෙන් හා සිලින්ඩරයෙන් ලැබෙන කොටස්වල වක්‍ර පෘෂ්ඨවල වර්ගඵලය සමාන වේ.''



රූපයේ පෙන්වා ඇති ගෝලයේ $PQRS$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලය සිලින්ඩරයේ $ABCD$ වක්‍ර පෘෂ්ඨ කොටසේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.





මේ නිසා ආකිමිඩීස් ඉදිරිපත් කළ ඉහත සම්බන්ධතාවයට අනුව ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.

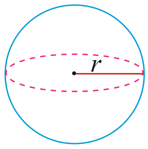
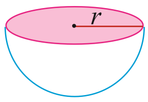
පරිසිලින්ඩරයේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය $= 2\pi r\, h$

$= 2\pi r \times 2r \quad (\because h = 2r)$

$= 4\pi r^2$

$\therefore$ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්,

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

	ඝන වස්තුවේ නම	පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සඳහා සූත්‍රය
	ගෝලය	$A = 4\pi r^2$
	ඝන අර්ධ ගෝලය	$A = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

නිදසුන 1

අරය 14 cm ක් වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 2464$

$\therefore$ ගෝලයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2464 cm^2 වේ.

නිදසුන 2

පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 5544 cm^2 වූ ගෝලයක අරය සොයන්න.

ගෝලයේ අරය r යැයි ගනිමු.

එවිට, $4\pi r^2 = 5544$

$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 5544$

$r^2 = \frac{5544 \times 7}{22 \times 4}$

$r^2 = 441$

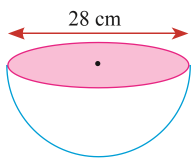
$r = \sqrt{441}$

$= 21$

$\therefore$ ගෝලයේ අරය 21 cmකි.

4.2 අභ්‍යාසය

1. අරය 7 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.
2. අරය 10.5 cm වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.
3. රූපයේ දැක්වෙන ඝන අර්ධ ගෝලයේ විෂ්කම්භය 28 cmකි. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



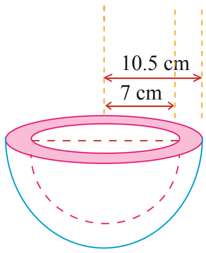
4. අභ්‍යන්තර අරය 3.5 cm වූ කුහර අර්ධ ගෝලයක අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

5. අරය 7 cm වූ ඝන ලෝහ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය හා අරය 3.5 cm වූ ඝන ලෝහ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අතර අනුපාතය සොයන්න.

6. බාහිර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2772 cm^2 ක් වූ කුහර අර්ධ ගෝලයක බාහිර අරය ගණනය කරන්න.

7. පිත්තල ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය 2464 cm^2කි. එම ගෝලයේ විෂ්කම්භය සොයන්න.

8. රූපයේ දැක්වෙන කුහර අර්ධ ගෝලයේ බාහිර අරය 10.5 cmකි. එහි අභ්‍යන්තර අරය 7 cm කි. ගෝලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය සොයන්න.



සාරාංශය

- ආධාරකයේ අරය r ද ඇල උස l ද වූ සෘජු වෘත්ත කේතුවක මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්, $A = \pi rl + \pi r^2$
- අරය r වූ ගෝලයක පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය A නම්, $A = 4\pi r^2$ වේ.