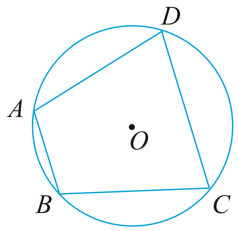
9 වෘත්ත චතුරස්‍ර

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- වෘත්ත චතුරස්‍ර හඳුනා ගැනීමට,
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ යන ප්‍රමේයය සාධනය හඳුනා ගැනීම හා එය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීමට,
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය, එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීම හා එය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීමට,
- ඉහත ප්‍රමේයයන්ගේ විලෝමයන් හඳුනා ගැනීම හා ගණනය කිරීමට

හැකියාව ලැබේ.

9.1 වෘත්ත චතුරස්‍ර

චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ 4ම එකම වෘත්තයක පරිධිය මත පිහිටයි නම්, එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් ලෙස හැඳින්වේ.



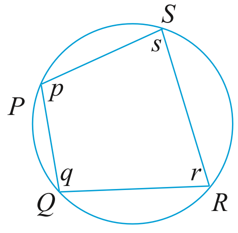
ඉහත A, B, C, D ශීර්ෂ වෘත්තය මත නිසා $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

ක්‍රියාකාරකම 1

පියවර 1 - කවකටුව භාවිතයෙන් වෘත්තයක් අඳින්න.

පියවර 2 - වෘත්තය මත P, Q, R, S ලක්ෂ්‍ය 4ක් ලකුණු කරන්න.

පියවර 3 - P, Q, R, S පිළිවෙළින් යා කර වෘත්ත චතුරස්‍රය ලබා ගන්න.



පියවර 4 - රූපයේ දක්වා ඇති p, q, r, s කෝණ, කෝණමානය භාවිතයෙන් මැන ලියන්න.

පියවර 5 - $p + r$ හා $q + s$ හි අගය සොයන්න.

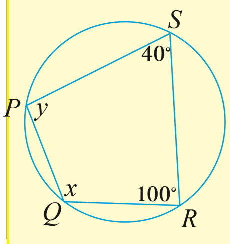
$p + r = 180^\circ$ ද $q + s = 180^\circ$ බව ද ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

ප්‍රමේයය

වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

නිදසුන 1

PQRS වෘත්ත චතුරස්‍රයේ x හා y හි අගයන් සොයන්න.



$x + 40^\circ = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$x = 180^\circ - 40^\circ$

$x = 140^\circ$

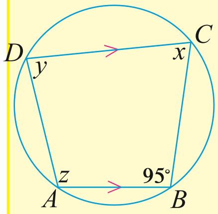
එලෙසම, $y + 100^\circ = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$y = 180^\circ - 100^\circ$

$y = 80^\circ$

නිදසුන 2

ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ *AB//DC* වේ. x, y, z හි අගයන් සොයන්න.



$x + 95^\circ = 180^\circ$ (මිත්‍ර කෝණ එකතුව 180° බැවින්)

$x = 180^\circ - 95^\circ$

$x = 85^\circ$

$y + 95^\circ = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$y = 180^\circ - 95^\circ$

$y = 85^\circ$

එලෙසම, $85^\circ + z = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.)

$z = 180^\circ - 85^\circ$

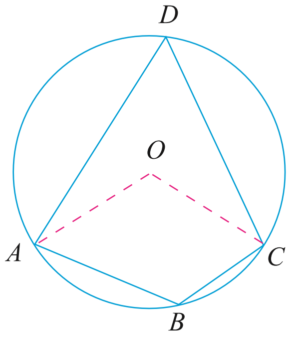
$z = 95^\circ$

ඉහත භාවිත කරන ලද ''වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ'' යන ප්‍රමේයය විධිමත්ව සාධනය කරන අයුරු විමසා බලමු.

දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සාධනය කළ යුත්ත : (i) $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$ බව

(ii) $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^\circ$ බව



නිර්මාණය : OA හා OC යා කරන්න.

සාධනය : $\hat{AOC}$ මහා කෝණය $= 2\,A\hat{D}C$ (කේන්ද්‍රය මත ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

AOC පරාවර්ත කෝණය $= 2\,A\hat{B}C$ (කේන්ද්‍රය මත ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

$\therefore\ A\hat{O}C$ (මහා) $+ A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C$

නමුත් $A\hat{O}C$ (මහා) $+ A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 360^{o}$ (ලක්ෂ්‍යයක් වටා කෝණ)

$$\therefore\quad 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C = 360^{o}$$

$$2\,(A\hat{D}C + A\hat{B}C) = 360^{o}$$

$$A\hat{D}C + A\hat{B}C = \frac{360^{o}}{2}$$

$$A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^{o}$$

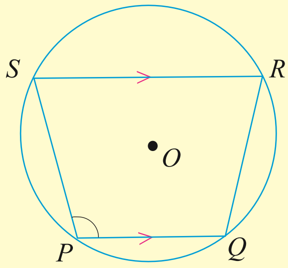
චතුරස්‍රයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 360° බැවින්, $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^{o}$ වේ.

ඉහත ප්‍රමේයයේ විලෝමය

චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක වේ නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ සියල්ල එකම වෘත්තයක් මත පිහිටයි.

නිදසුන 3

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. $PQ//SR$ නම්, $S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ බව සාධනය කරන්න.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සාධනය කළ යුත්ත : (i) $PQ//SR$ නම්, $S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ බව

සාධනය : $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නිසා,

$S\hat{P}Q + S\hat{R}Q = 180^{o}$ (සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක නිසා)

$PQ//SR$ නිසා, $P\hat{Q}R + S\hat{R}Q = 180^{o}$ (මිත්‍ර කෝණ එකතුව 180° නිසා)

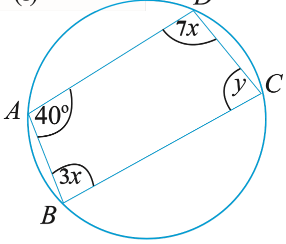
$\therefore\ S\hat{P}Q + S\hat{R}Q = P\hat{Q}R + S\hat{R}Q$

$\therefore\ S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ (දෙපසින් ම $S\hat{R}Q$ ඉවත් කිරීමෙන්)

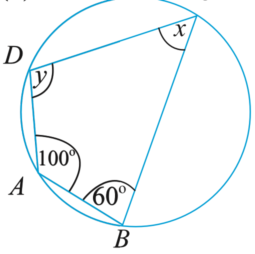
9.1 අභ්‍යාසය

1. දී ඇති තොරතුරු අනුව සංකේතවලින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයෙහි අගය සොයන්න. O ලෙස දැක්වෙන්නේ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.

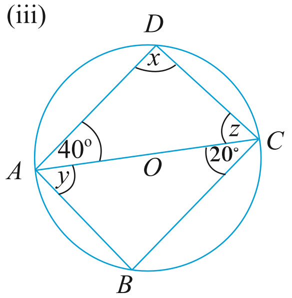
(i)



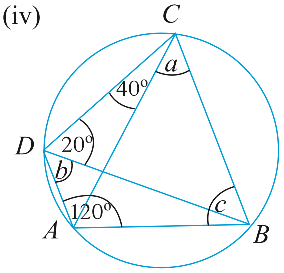
(ii)



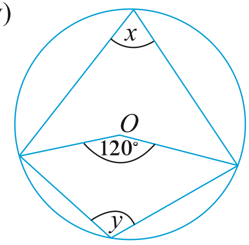
(iii)



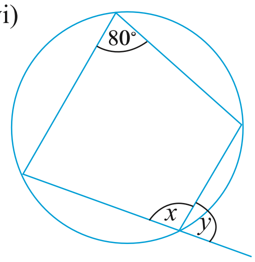
(iv)



(v)



(vi)



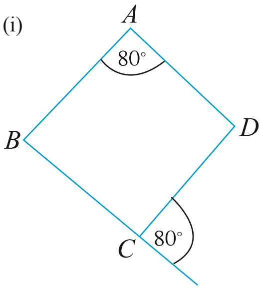
2. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක $\hat{P} = 75^\circ$, $\hat{Q} = 80^\circ$ ද වේ. $\hat{R}$ හා $\hat{S}$ හි අගයන් සොයන්න.

3. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ BC හා CD පාද සමාන වේ. AC හා BD රේඛා X හි දී ඡේදනය වේ. $B\hat{C}D = 80^\circ$ සහ $A\hat{B}D = 40^\circ$ නම් $B\hat{A}C$ හා $A\hat{D}B$ හි අගයන් සොයන්න.

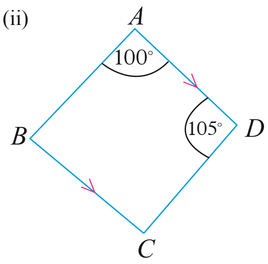
4. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක $\hat{A} : \hat{C} = 1 : 2$ හා $\hat{B} = 100^\circ$ නම්, $\hat{A}$, $\hat{C}$ හා $\hat{D}$ හි අගයන් සොයන්න.

5. පහත එක් එක් රූපයේ දක්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රය, වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ ද නොවේ ද යන්න හේතු සහිත ව දක්වන්න.

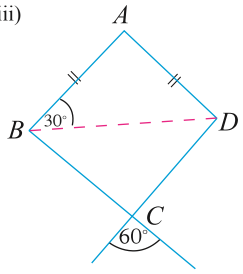
(i)



(ii)



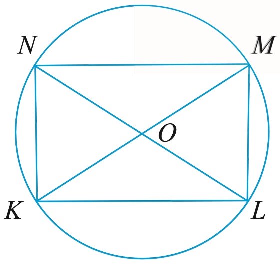
(iii)



6. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක $AB//DC$ වේ. $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ බව සාධනය කරන්න.

7. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ PR හා QS රේඛා O හි දී ඡේදනය වේ. $Q\hat{R}S$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය PR නම්, PQS සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

8. $KLMN$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ LN හා KM සරල රේඛා O හි දී ඡේදනය වේ. LN මගින් $K\hat{L}M$ හා $K\hat{N}M$ කෝණ සමච්ඡේදනය වේ. KNL ඍජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.



9. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ PS ට සමාන්තර ලෙස Q හරහා ඇඳි සරල රේඛාව T හි දී SR හමු වේ.
(i) $P\hat{Q}T = Q\hat{R}S$ බව
(ii) $P\hat{Q}R = Q\hat{T}S$ බව සාධනය කරන්න.

10. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ $\hat{A} = \hat{B}$ හා $\hat{C} = \hat{D}$ වේ. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

9.2 වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණ සහ අභ්‍යන්තර කෝණ අතර සම්බන්ධය

ක්‍රියාකාරකම 2

පියවර 1 - ඔබ කැමති ඕනෑ ම වෘත්තයක් කවකටුව ආධාරයෙන් අඳින්න.
පියවර 2 - වෘත්තය මත A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය 4ක් ලකුණු කරන්න.
පියවර 3 - $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රය සම්පූර්ණ කරන්න.
පියවර 4 - AB සරල රේඛාව E දක්වා දික් කරන්න.
පියවර 5 - $A\hat{D}C$ හා $C\hat{B}E$ හි විශාලත්වයන් කෝණමානය භාවිතයෙන් මැන ලියා ගන්න.
පියවර 6 - DA පාදය F දක්වා දික් කරන්න.
පියවර 7 - $B\hat{A}F$ හා $D\hat{C}B$ හි විශාලත්වයන් කෝණමානය භාවිතයෙන් මැන ලියා ගන්න.

$A\hat{D}C = C\hat{B}E$ බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

$B\hat{A}F = D\hat{C}B$ බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

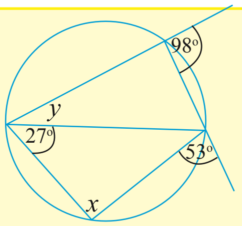
ඉහත ක්‍රියාකාරකම වෙනස් අරයන් ඇති වෘත්ත අඳිමින් සිදු කරන්න. ඔබට ලබා ගත හැකි නිගමනය කුමක් ද?

ප්‍රමේයය

වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන x හා y හි අගයන් සොයන්න.



$x \quad = 98^{\circ}$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා)

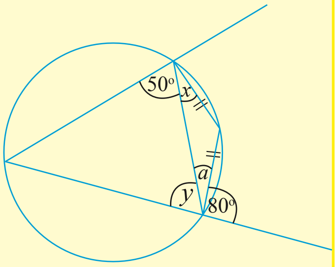
$y + 27^{\circ} \quad = 53^{\circ}$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා)

$y \quad = 53^{\circ} - 27^{\circ}$

$y \quad = 26^{\circ}$

නිදසුන 2

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන a, x හා y හි අගයන් සොයන්න.



$50^{\circ} + x = 80^{\circ}$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර කෝණයට සමාන නිසා)

$x = 80^{\circ} - 50^{\circ}$

$x = 30^{\circ}$

$a \; = \; 30^{\circ}$ (ත්‍රිකෝණයක සමාන පාද දෙකකට සම්මුඛ කෝණ සමාන බැවින්)

$y + 30^{\circ} + 80^{\circ} = 180^{\circ}$ (සරල රේඛාවක් මත පිහිටි බද්ධ කෝණ)

$y + 110^{\circ} = 180^{\circ}$

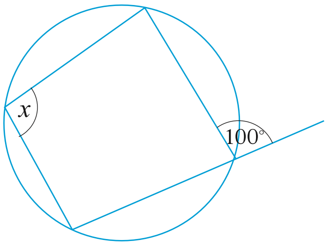
$y = 180^{\circ} - 110^{\circ}$

$\therefore \quad y = 70^{\circ}$

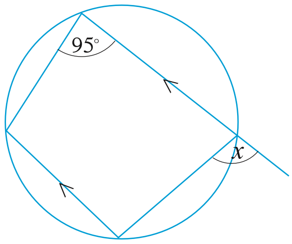
9.2 අභ්‍යාසය

1. පහත රූපවල වීජීය සංකේත මගින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ අගය සොයන්න. O ලෙස නම් කර ඇත්තේ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.

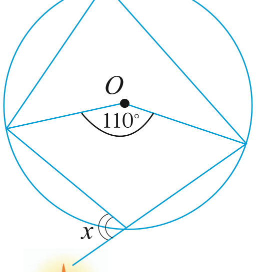
(i)



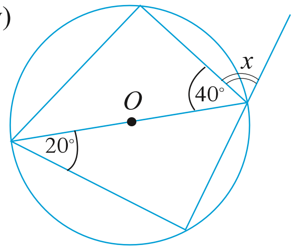
(ii)



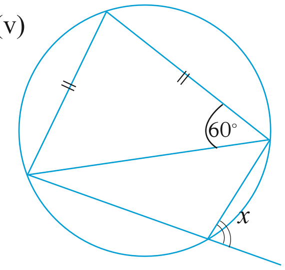
(iii)



(iv)



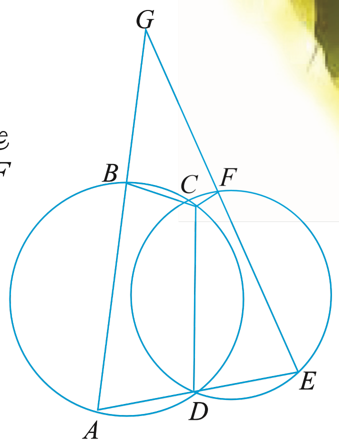
(v)



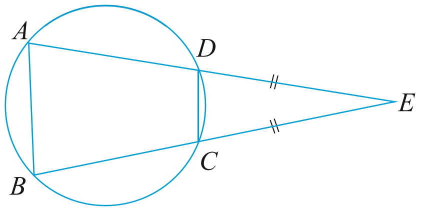
2. රූපයේ පරිදි *ABCD* හා *CDEF* වෘත්ත චතුරස්‍ර 2කි. දික් කළ *AD* රේඛාව වෘත්තය *E* හි දී හමු වේ. දික් කළ *AB* හා *EF* රේඛා *G* හි දී හමු වේ.

(i) $C\hat{F}E = C\hat{B}G$ බව

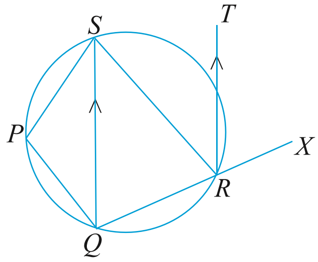
(ii) *BCFG* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව
සාධනය කරන්න.



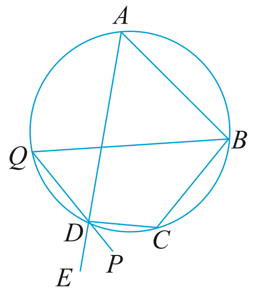
3. *ABCD* වෘත්ත චතුරස්‍රයක *AD* හා *BC* පාද දික් කළ විට *E* හි දී හමු වේ. $ED = EC$ නම් *ABE* සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.



4. *PQRS* වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. *QR* පාදය *X* දක්වා දික් කර ඇත. *QS*ට සමාන්තර ලෙස *RT* ඇඳ ඇත. $R\hat{Q}S + Q\hat{S}R = S\hat{P}Q$ බව සාධනය කරන්න.



5. රූපයේ *ABCD* වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. *AD* පාදය *E* තෙක් දික් කර ඇත. *BCDQ* වෘත්ත චතුරස්‍රය පිහිටා ඇත්තේ, *QD* රේඛාව *P* තෙක් දික් වන පරිදි ය. *DP* මගින් *EDC* කෝණය සමච්ඡේදනය වන්නේ නම්, *BQ* මගින් $A\hat{B}C$ සමච්ඡේද වන බව පෙන්වන්න.



සාරාංශය

- එකම වෘත්තයක පරිධිය මත චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ 4ම පිහිටයි නම්, එය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් ලෙස හැඳින්වේ. වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.
- චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලක් පරිපූරක නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටයි.
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.