13 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය අවබෝධ කර ගැනීමට,
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා විලෝමය භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට

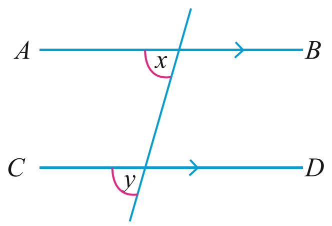
හැකියාව ලැබේ.

පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඉගෙන ගත් ජ්‍යාමිතික පාඩම් ආවර්ජනය කිරීමට පහත දැක්වෙන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසවල යෙදෙන්න.

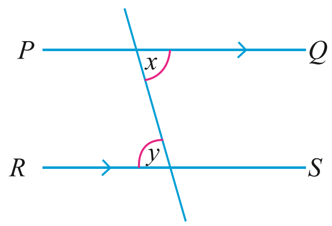
පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ x හා y සමාන වීමට හේතු දක්වන්න.

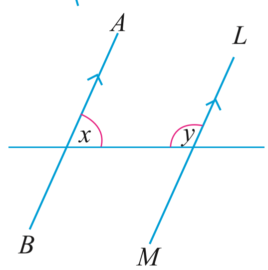
(i)



(ii)

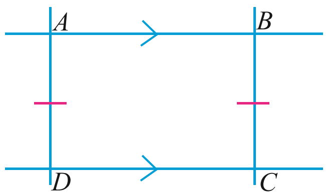


2. පහත දැක්වෙන රූපයේ x හා y කෝණවල ඓක්‍යය 180° ට සමාන වීමට හේතුව දක්වන්න.



3. සමාන්තරාස්‍රයක ඇති ලක්ෂණ මොනවා ද?
4. චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් වීමට තිබිය යුතු අවශ්‍යතා මොනවා ද?

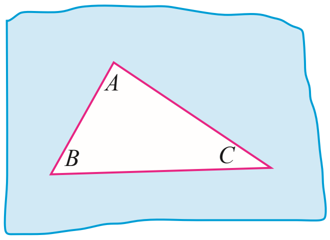
5. පහත රූපයේ දැක්වෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වේද නොවේ ද යන්න හේතු සහිතව සඳහන් කරන්න.



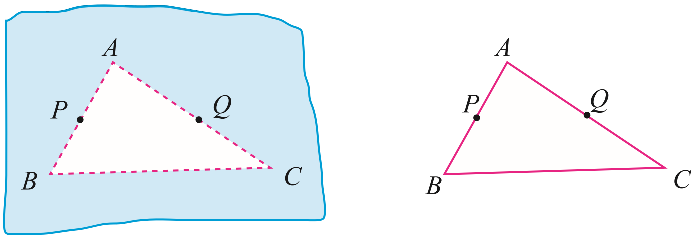
13.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

ක්‍රියාකාරකම 1

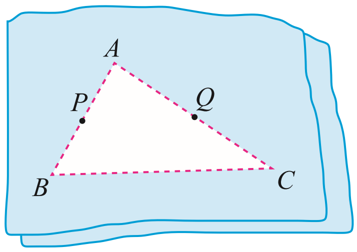
පියවර 1 - කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC ලෙස නම් කරන්න.



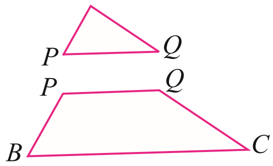
පියවර 2- AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q ලෙස නම් කර ත්‍රිකෝණය කපා ඉවත් කර ගන්න.



පියවර 3 - ඉතිරි කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ල වෙනත් කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක අලවා P හා Q යා වන සේ රේඛාවක් අඳින්න.



පියවර 4- කපා ඉවත් කළ ත්‍රිකෝණයේ P හා Q යා කර එම රේඛාව දිගේ කපා ගන්න.



පියවර 5 - ඉහත කපා ගත් ත්‍රිකෝණයේ ඉහළ ත්‍රිකෝණයේ PQ පාදය මෙන් කී ගුණයක් BC පාදය තුළ ඇති දැයි බලන්න.

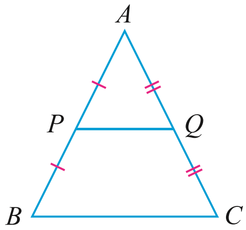
පියවර 6 - PQ පාදය, BC පාදය අතර තවත් සම්බන්ධයක් ඇති දැයි බලන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකම මගින් ලැබෙන ජ්‍යාමිතික සංකල්පය පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් මගින් ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.

මෙම ප්‍රමේයය මගින් දැක්වෙන අදහස රූප සටහනකින් පහත පරිදි දැක්විය හැකි ය. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q වේ.



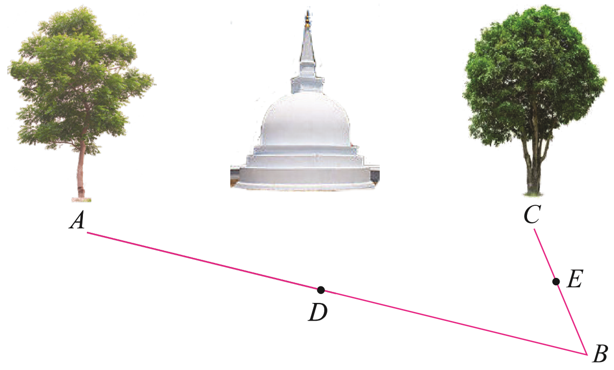
$PQ//BC$ සහ $PQ = \frac{1}{2} BC$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය මගින් ප්‍රායෝගික ජීවිතයේ දී හමුවන ගණනය කිරීම් පවා සිදු කළ හැකි ය.

පහත දැක්වෙන රූපයේ පරිදි පරිසරයේ දී එක එල්ලේ එහා මෙහා යා නොහැකි ස්ථාන දෙකක් අතර දුර සෙවීමට ඇතැයි සිතමු.

මෙම පරිසර පද්ධතියේ ඇති චෛත්‍යය හා ඊට දෙපසින් පිහිටි ගස් දෙකක් අතර දුර සෙවීමට ඇති විට,

AB හා BC ලණු දෙක A හා C කෙළවරවල් ගස් දෙකට ගැට ගසා B ලක්ෂ්‍යයන් එකට සිටින සේ අල්ලා ගත යුතු වේ.



AB හා BC ලණුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් වන D හා E සොයා DE දුර මැන ගන්න.
එවිට DE දුර මෙන් දෙගුණයක් ගස් දෙක අතර පවතී.

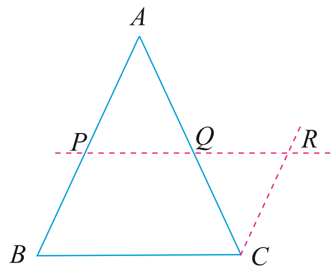
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් විසඳිය හැකි මෙවැනි පරිසරයේ ඇති ගැටලු සාකච්ඡා කරන්න.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විධිමත් සාධනය

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ P සහ Q යනු පිළිවෙළින් AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

සාධනය කළ යුත්ත : $PQ//BC$ බව හා $PQ = \frac{1}{2}\ BC$ බව

නිර්මාණය : දික්කළ PQ ට R හි දී හමු වන සේ BP ට සමාන්තරව C හරහා රේඛාවක් අඳිමු.



සාධනය : APQ සහ QCR ත්‍රිකෝණ දෙක සළකමු.

$AQ = QC$ (AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q බැවින්)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ ($AP//RC$ බැවින් ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$APQ\Delta \equiv QCR\Delta$ (කෝ.කෝ.පා. අවස්ථාව)

තව ද අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන කිරීමෙන්,

$AP = RC$ සහ $PQ = QR$

නමුත් $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

මේ අනුව, $BCRP$ චතුරස්‍රයේ $PB = RC$ සහ $PB//RC$ වේ.

සම්මුඛ පාද යුගලක් සමාන හා සමාන්තර බැවින්, $BCRP$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore PR//BC$ සහ $PR = BC$ වේ.

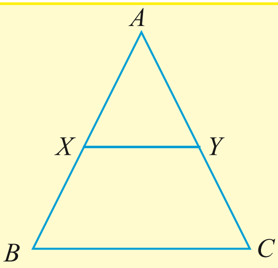
තව ද, $PQ = QR$

$\therefore PQ = \frac{1}{2} PR$

තව ද, $PR = BC$ බැවින් $PQ = \frac{1}{2} BC$

නිදසුන 1

ABC ත්‍රිකෝණයේ AB සහ AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය X හා Y නම් $BC = 20$ cm, $AB = 24$ cm හා $AC = 22$ cm වේ.



(i) BC ට සමාන්තර පාදයක් නම් කරන්න.

(ii) ඉහත (i) ලබා ගැනීම සඳහා භාවිත කළ ප්‍රමේයය ලියා දක්වන්න.

(iii) $A\hat{C}B = 70^\circ$ නම් $A\hat{Y}X$ හි අගය සොයන්න.

(iv) $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය සොයන්න.

(i) $BC//XY$

(ii) ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වේ.

(iii) $A\hat{Y}X = A\hat{C}B = 70^\circ$ ($BC//XY$ බැවින් අනුරූප කෝණ සමාන වේ.)

(iv) $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය $= BX + XY + YC + BC$

$= \frac{1}{2} AB + XY + \frac{1}{2} AC + BC$

(AB, AC සහ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය X හා Y වන බැවින්)

$= \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AC + BC$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය මගින්)

$= \left(\frac{1}{2} \times 24 \text{ cm}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 20 \text{ cm}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 22 \text{ cm}\right) + 20 \text{ cm}$

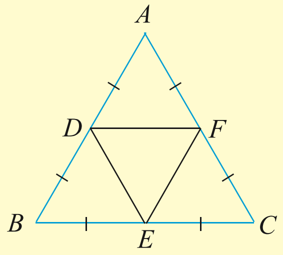
$= 12 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 11 \text{ cm} + 20 \text{ cm}$

$= 53 \text{ cm}$

නිදසුන 2

සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන ත්‍රිකෝණය ද සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.
AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.
BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ.
CA පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F වේ.



ABC ත්‍රිකෝණයේ,

$AD = DB$ වේ. (AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.)
$AF = FC$ වේ. (CA පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F වේ.)

$DF = \frac{1}{2}\ BC$ — 1 (ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් බැවින්)

$AD = DB$ වේ. (AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ.)
$BE = EC$ වේ. (BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ.)

$DE = \frac{1}{2}\ AC$ — 2 (ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් බැවින්)

$BE = EC$ වේ. (BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ.)
$AF = FC$ වේ. (CA පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F වේ.)

$EF = \frac{1}{2}\ AB$ — 3 (ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් බැවින්)

$AB = BC = AC$ (ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන බැවින්)

1 , 2 සහ 3 න්

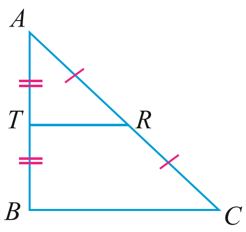
$DF = DE = EF$

එබැවින්, DEF සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වේ.

13.1 අභ්‍යාසය

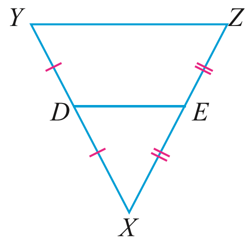
1. වරහන් තුළින් සුදුසු පිළිතුර තෝරා හිස්තැන් පුරවන්න.

(i)



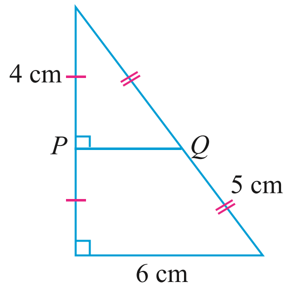
$TR = \frac{1}{2}$ …….. (BC, AR, AC)

(ii)



$DE = \frac{1}{2}$ ……. (XY, XZ, YZ)

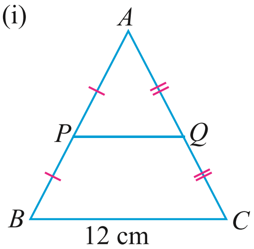
(iii)



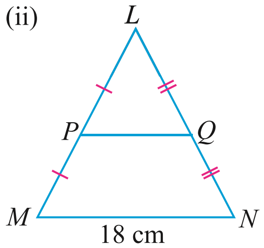
PQ = ... (4 cm, 3 cm, 5 cm)

2. රූපයේ ඇති දත්ත අනුව PQ හි දිග සොයන්න.

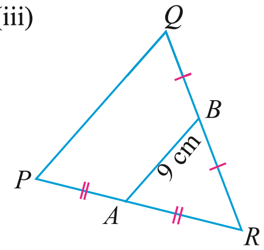
(i)



(ii)

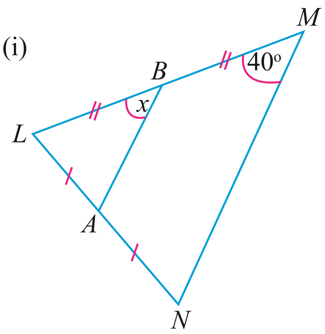


(iii)

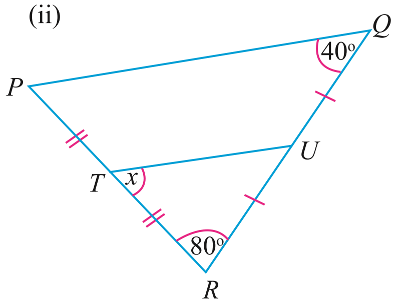


3. රූපයේ ඇති දත්ත අනුව x^{o} හි අගය සොයන්න.

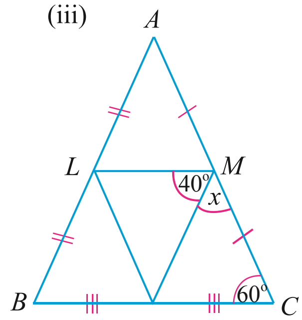
(i)



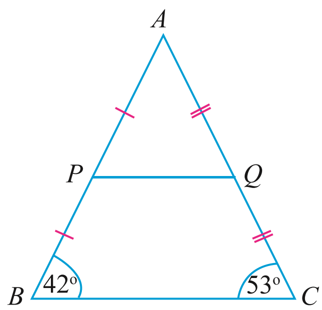
(ii)



(iii)



4. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC සහ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය P හා Q නම් $A\hat{P}Q$ සහ $A\hat{Q}P$ සොයන්න.

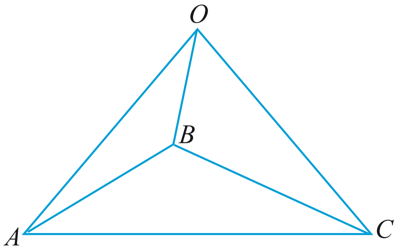


5. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA හා AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q සහ R වේ. $PQAR$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

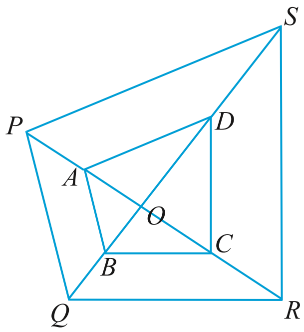
6. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව ABC ත්‍රිකෝණයට පිටතින් O ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇති අතර OA, OB හා OC යා කර ඇත.

   (i) OA, OB හා OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් G, H හා I වේ. රූපය පිටපත් කර මෙම තොරතුරු එහි ලකුණු කරන්න.

   (ii) $A\hat{B}C = G\hat{H}I$ බව පෙන්වන්න.



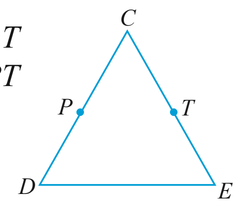
7. $PQRS$ චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ O ලක්ෂ්‍යයට යා කර ඇත. PO, QO, RO හා SO හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් A, B, C හා D වේ. $PQRS$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය, $ABCD$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.



8. (i) ඕනෑ ම චතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

   (ii) මෙය අවතල චතුරස්‍ර සඳහා ගැළපේ ද නොවේ ද යන්න හේතු සහිතව පෙන්වන්න.

9. CDE යනු පාදයක දිග 16 cm වන සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. P හා T යනු පිළිවෙළින් CD හා CE පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් වේ. CPT ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.



10. DC, EB සරල රේඛා M හිදී එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ. ED රේඛාව $ED = DA$ වන පරිදි A දක්වා දික්කර ඇත. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

13.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

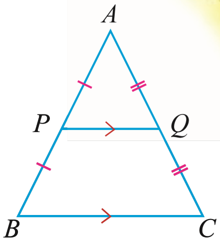
දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙහි විලෝමය පිළිබඳව විමසා බලමු.

ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.

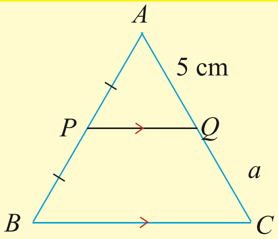
මෙම ප්‍රමේයය මගින් දැක්වෙන අදහස රූප සටහනකින් පහත පරිදි දැක්විය හැකි ය.

ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ.
තවද $PQ//BC$ වේ.



$AQ = QC$

නිදසුන 1

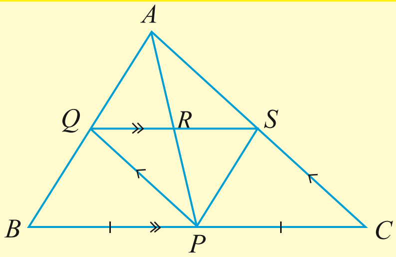


ඉහත රූපයේ a මගින් දැක්වෙන දිග සොයන්න.

මෙහි PQ, BC සමාන්තර වේ.
තව ද, P යනු ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.

එබැවින්, $a = 5$ cm (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

නිදසුන 2



ඉහත රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරින් $AR = RP$ බව පෙන්වන්න.
$BP = PC$
PQ , CS ට සමාන්තර වේ.

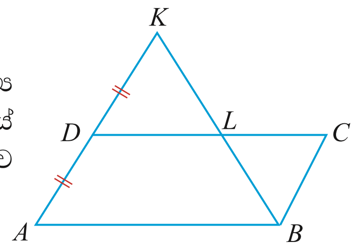
$\therefore BQ = AQ$ (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

එබැවින් Q යනු ABහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.

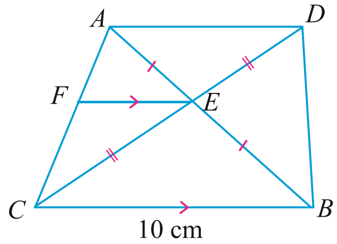
QR, BP ට සමාන්තර වේ.
$\therefore AR = RP$ (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වන බැවින්)

13.2 අභ්‍යාසය

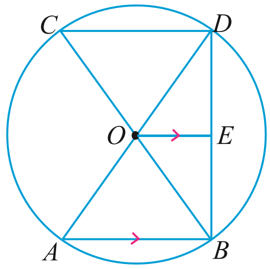
1. $ABCD$ යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. D යනු AK හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. B හා K ලක්ෂ්‍ය යා කර ඇත. රූපයේ පරිදි CD රේඛාව මත L පිහිටයි. $LK = BL$ බව පෙන්වන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන දත්ත අනුව,
   (i) AF හා CF අතර සම්බන්ධයක් ලියන්න.
   (ii) $AD//EF$ බව පෙන්වන්න.
   (iii) AD හා EF අතර ඇති සම්බන්ධය ලියන්න.
   (iv) FE දිග සොයන්න.
   (v) AD දිග සොයන්න.
   (vi) $ACBD$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



3. O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයේ $AB//OE$ වේ. AB හා CD ජ්‍යාය දිගින් සමාන බව පෙන්වන්න.



4. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. AD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන E හරහා AB රේඛාවට සමාන්තර ලෙස අඳිනු ලබන රේඛාවෙන් AC, BC රේඛා පිළිවෙළින් X හිදී ත් Y හිදී ත් ඡේදනය වේ. $4\,XY = 3\,AB$ බව පෙන්වන්න.

සාරාංශය

- ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.
- ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.