14 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,

- ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වන සයිනය, කෝසයිනය සහ ටැංජනය හඳුනා ගැනීමට,
- සයින, කෝසයින හා ටැංජන වගු භාවිත කර ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් සිදු කිරීමට,
- පරිසරය ආශ්‍රිත විවිධ ගණනය කිරීම් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත යොදා ගැනීමට හැකියාව ලැබේ.

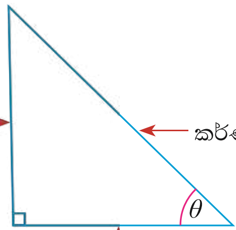
14.1 හැඳින්වීම

ත්‍රිකෝණමිතිය යන වචනය 'ත්‍රිකෝණය' සහ 'මැනීම' යන ග්‍රීක වචන බිඳීමෙන් සෑදී ඇතැයි සැලකේ. මෙහි දී සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ ආධාර කරගෙන සියලුම ගණනය කිරීම් සිදු කරයි. තාරකා විද්‍යාව, මැනුම් ශිල්පය, ඉංජිනේරු විද්‍යාව, භෞතික විද්‍යාව, තරංග චලිතය, නාවික කටයුතු, ගුවන් කටයුතු ආදී ක්ෂේත්‍ර ගණනාවක් පුරා මෙය පැතිරී ඇත.

අපට සරල උපකරණ භාවිත කර ත්‍රිකෝණමිතිය යොදා ගනිමින් පහසුවෙන් ළඟාවීමට නොහැකි ප්‍රායෝගිකව මැනීම් සිදු කළ නොහැකි ස්ථානවලට ඇති දුර, උස ආදිය සරලව ගණනය කර ගැනීමට හැකි ය. කන්දක උස, කුළුණක උස, ගංගාවක පළල, ඈත අහසේ ගමන් කරන ගුවන් යානයකට පොළව මට්ටමේ සිට ඇති උස, ඈත මුහුදේ ඇති වස්තුවකට ඇති දුර ආදිය ඉන් සමහරකි.

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදන ආකාරය ඔබ මීට පෙර උගෙන ගෙන ඇත. පාද දෙකක දිග දන්නා විට ඉතිරි පාදයේ දිග එමගින් ගණනය කර ගත හැකි ය. නමුත් ත්‍රිකෝණයේ සුළු කෝණයක විශාලත්වය සහ එක පාදයක දිග දන්නා විට ඉතිරි පාදවල දිග ගණනය කර ගැනීමට එමගින් නොහැකි ය. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතිය ඇසුරෙන් පයිතගරස් ප්‍රමේයයට වඩා වැඩි ගණනය කිරීම් ප්‍රමාණයක් කළ හැකි ය.

සෘජුකෝණි ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති පාදය කර්ණය ලෙස හඳුන්වන බව ඔබ දැනටමත් දනී. ඉතිරි පාද දෙක හැඳින්වීම එක් සුළු කෝණයකට අනුරූප ව සිදු කරනු ලබයි.



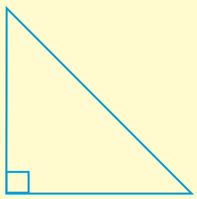
සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ එක සුළු කෝණයක් θ ලෙස සලකමු. එය ඇසුරෙන් ත්‍රිකෝණයේ පාද හඳුන්වමු.

- **සෘජුකෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති පාදය කර්ණය** ලෙස හැඳින්වේ.
- සලකනු ලබන θ කෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති පාදය සම්මුඛ පාදය ලෙස හැඳින්වේ.
- සලකනු ලබන θ කෝණයට සම්බන්ධ වී ඇති කර්ණය හැර අනික් පාදය බද්ධ පාදය ලෙස හැඳින්වේ.

θ කෝණය හැර අනික් සුළු කෝණය සැලකීමේ දී, සම්මුඛ පාදය සහ බද්ධ පාදය එකිනෙක මාරුවන බව ත්‍රිකෝණය නිරීක්ෂණය කිරීමෙන් ඔබට පැහැදිලි වේ.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ
(i) $B\hat{A}C$ කෝණය
(ii) $A\hat{C}B$ කෝණය
සැලකීමෙන් එහි පාද නම් කරන්න.



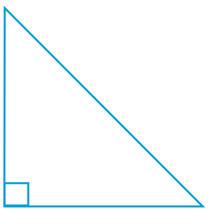
මෙහි කර්ණය $= AC$

(i) $B\hat{A}C$ කෝණය සැළකූ විට,
සම්මුඛ පාදය $= BC$
බද්ධ පාදය $= AB$

(ii) $A\hat{C}B$ කෝණය සැළකූ විට,
සම්මුඛ පාදය $= AB$
බද්ධ පාදය $= BC$

14.1 අභ්‍යාසය

1.

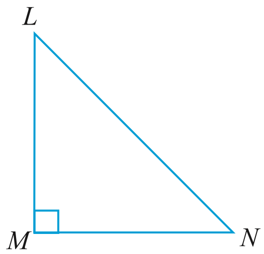


(a) මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නම් කරන්න.

(b) මෙහි $B\hat{A}C$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(c) මෙහි $A\hat{C}B$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

2.

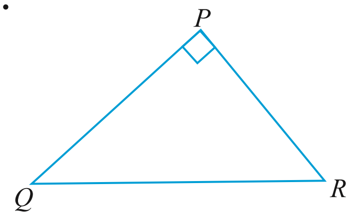


(*a*) මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නම් කරන්න.

(*b*) මෙහි $M\hat{N}L$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $M\hat{L}N$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

3.

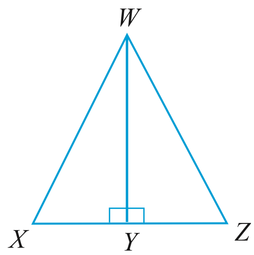


(*a*) මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නම් කරන්න.

(*b*) මෙහි $P\hat{Q}R$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $P\hat{R}Q$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

4.



(*a*) මෙම රූපයේ කර්ණයන් නම් කරන්න.

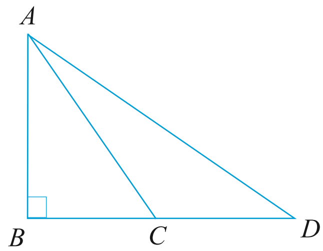
(*b*) මෙහි $W\hat{X}Y$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*c*) මෙහි $X\hat{W}Y$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*d*) මෙහි $W\hat{Z}Y$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

(*e*) මෙහි $Y\hat{W}Z$ ට අනුරූප වන බද්ධ පාදය සහ සම්මුඛ පාදය ලියා දක්වන්න.

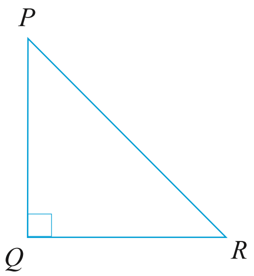
5.



(i) මෙම ත්‍රිකෝණය ආශ්‍රිතව පවතින කර්ණයන් දෙකක් ලියා දක්වන්න.

(ii) මෙහි සම්මුඛ පාදය AB වන, කෝණ දෙකක් ලියා දක්වන්න.

6.



(i) සම්මුඛ පාදය PQ වන කෝණය ලියා දක්වන්න.

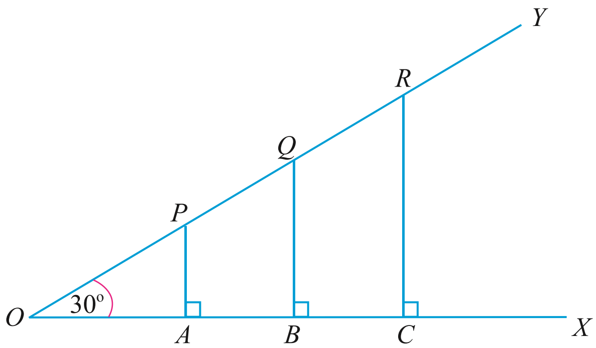
(ii) බද්ධ පාදය PQ වන කෝණය ලියා දක්වන්න.

14.2 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

එකම විශාලත්වයක් ඇති කෝණයක් සඳහා විවිධ වූ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාද අතර සම්බන්ධතාව විමසා බැලීමට පහත ක්‍රියාකාරකමේ නියැලෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම 1

- OX සහ OY බාහු 10 cm වන සේ 30° ක් විශාල වූ XOY කෝණය අඳින්න.
- OX පාදය ඔස්සේ O සිට 3 cm, 5 cm, 8 cm දුරින් පිළිවෙළින් A, B, C ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න.
- විහිත චතුරස්‍රය භාවිතයෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල සිට ලම්බක නිර්මාණය කරන්න. ඒවා OY රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍ය P, Q හා R ලෙස නම් කරන්න.
- එවිට පහත ආකාරයේ රූපයක් ඔබට ලැබෙනු ඇත.



- එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග මැන පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න. (සියලුම මිනුම් සහ ගණනය කිරීම් පළමු දශමස්ථානයට ගන්න.)

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	කර්ණය (cm)	සම්මුඛ පාදය (cm)	බද්ධ පාදය (cm)	$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$
OAP	3.5	1.8	3	$\frac{1.8}{3.5} = 0.5$	$\frac{3}{3.5} = 0.9$	$\frac{1.8}{3} = 0.6$
OBQ	....	....	....	....	....	....
OCR	....	....	....	....	....	....

එකම විශාලත්වයක් ඇති කෝණයක් සඳහා විවිධ විශාලත්වවලින් යුත් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණවල නිශ්චිත පාද දෙකක් අතර අනුපාතය නියත අගයක් වන බව ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව පැහැදිලි ය. එසේ නියත වීමට හේතුව එම ත්‍රිකෝණ සමකෝණී ත්‍රිකෝණ වීමයි. ඒ බව රූප සටහන හොඳින් නිරීක්ෂණය කළ විට පැහැදිලි වේ.

එකම කෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණවල පාද අතර නියත වන මෙම අනුපාත සඳහා විශේෂිත නම් තුනක් භාවිත වේ.

$\frac{\text{සම්මුඛ පාදයේ දිග}}{\text{කර්ණයේ දිග}}$ යන අනුපාතය **සයිනය** ලෙස හඳුන්වයි.

$\frac{\text{බද්ධ පාදයේ දිග}}{\text{කර්ණයේ දිග}}$ යන අනුපාතය **කෝසයිනය** ලෙස හඳුන්වයි.

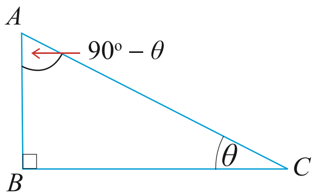
$\frac{\text{සම්මුඛ පාදයේ දිග}}{\text{බද්ධ පාදයේ දිග}}$ යන අනුපාතය **ටැංජනය** ලෙස හඳුන්වයි.

සයින අනුපාතය දැක්වීමට sin ද කෝසයින අනුපාතය දැක්වීමට cos ද ටැංජන අනුපාතය දැක්වීමට tan ද යන සංකේත භාවිත වේ.

$$\sin\theta = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}\ ,\quad \cos\theta = \frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}\ ,\quad \tan\theta = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$$

(මෙහිදී සම්මුඛ පාදයේ දිග, බද්ධ පාදයේ දිග, කර්ණයේ දිග පිළිවෙළින් සම්මුඛ පාදය, බද්ධ පාදය, කර්ණය ලෙස සඳහන් කර ඇත.)

- පහත දැක්වෙන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ θ කෝණයට අදාළ ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලියමු.



$\sin\theta = \frac{AB}{AC}\ ,\qquad \cos\theta = \frac{BC}{AC}\ ,\qquad \tan\theta = \frac{AB}{BC}$

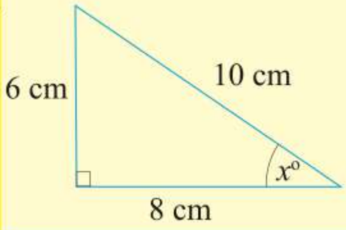
$A\hat{C}B = \theta$ නිසා $B\hat{A}C = 90 - \theta$ වේ.

$\sin(90^\circ - \theta)\ \frac{BC}{AC}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$ වන බැවින්, $\therefore \cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ $\sin x^{\circ}$, $\cos x^{\circ}$ සහ $\tan x^{\circ}$ අනුපාත ලියා දක්වන්න.



$$\sin x^{\circ} = \frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.6$$

$$\cos x^{\circ} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.8$$

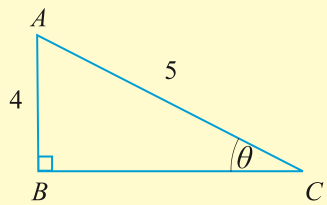
$$\tan x^{\circ} = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0.75$$

නිදසුන 2

$\sin \theta = \frac{4}{5}$ නම්, $\cos \theta$ සහ $\tan \theta$ සොයන්න.

$\sin \theta = \frac{4}{5}$ යන්නෙහි අදහස වන්නේ θහි සම්මුඛ පාදය ඒකක 4ක් ද කර්ණය ඒකක 5ක් ද වන බවයි. මෙම තොරතුරු රූප සටහනක දක්වමු. ත්‍රිකෝණය ABC ලෙස නම් කරමු.

පයිතගරස් සම්බන්ධය ඇසුරෙන් බද්ධ පාදය වන BC හි දිග සොයමු.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$5^2 = 4^2 + BC^2$$
$$25 = 16 + BC^2$$
$$25 - 16 = BC^2$$
$$9 = BC^2$$
$$3 = BC$$

බද්ධ පාදයේ දිග ඒකක 3ක් වේ.

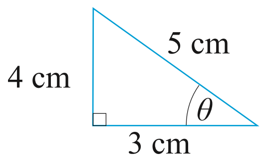
$$\cos \theta = \frac{BC}{AC} \qquad \tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \tan \theta = \frac{4}{3} = 1.33$$

14.2 අභ්‍යාසය

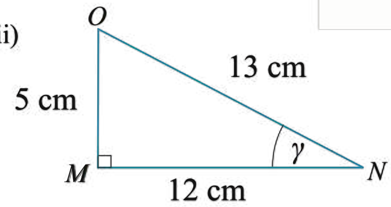
1. පහත දී ඇති එක් එක් ත්‍රිකෝණවල දත්තයන්ට අනුව අසා ඇති ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු ලියා දක්වන්න.

(i)



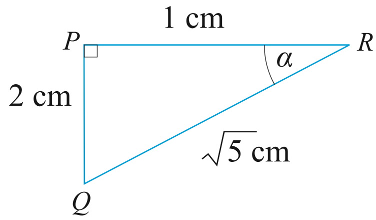
$\sin\theta$, $\cos\theta$ සහ $\tan\theta$ සොයන්න.

(ii)



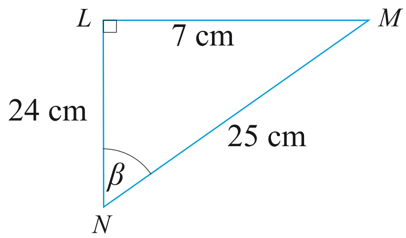
$\sin\gamma$, $\cos\gamma$ සහ $\tan\gamma$ සොයන්න.

(iii)



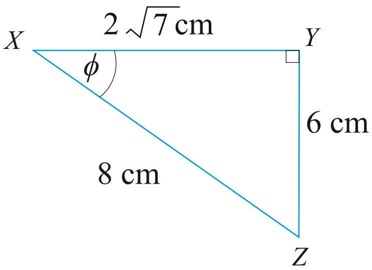
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ සහ $\tan\alpha$ සොයන්න.

(iv)



$\sin\beta$, $\cos\beta$ සහ $\tan\beta$ සොයන්න.

(v)



$\sin\phi$, $\cos\phi$ සහ $\tan\phi$ සොයන්න.

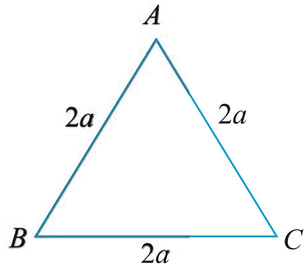
2. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ නම් $\sin\theta$ සහ $\cos\theta$ සොයන්න.

3. $\sin\beta = \frac{12}{13}$ නම් $\cos\beta$ සහ $\tan\beta$ සොයන්න.

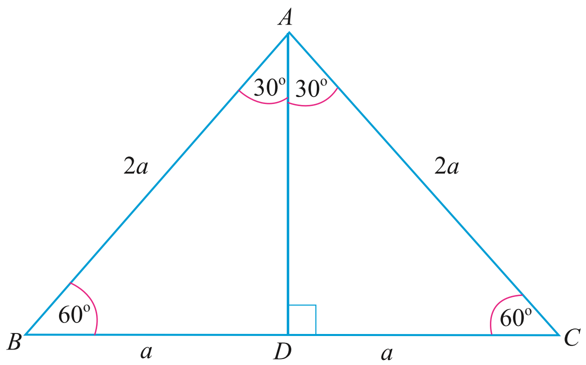
14.3 $30^{\circ}, 45^{\circ}$ හා 60° කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

30° සහ 60° කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම

පාදයක දිග $2a$ වන සමපාද ත්‍රිකෝණයක් ඇසුරෙන් 30° සහ 60° කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගනිමු.



රූපයේ දැක්වෙන්නේ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. එහි ශීර්ෂ ඇතුළත් සියලුම කෝණ 60° බැගින් වේ. $\hat{A}$ කෝණයේ සමච්ඡේදකය ඇඳි විට එය BC පාදයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය වන බව අපි දනිමු. BC පාදය හමුවන ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. එවිට එය පහත ආකාරයට දැක්විය හැකි ය.



* ABD ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යොදා AD පාදයේ දිග ගණනය කරන්න.
* AD පාදයේ දිග දන්නා නිසා ABD ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සලකා පහත ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ගණනය කරන්න.

$\sin 30^{\circ}$, $\cos 30^{\circ}$, $\tan 30^{\circ}$, $\sin 60^{\circ}$, $\cos 60^{\circ}$, $\tan 60^{\circ}$

* ඔබට ලැබුණු අගයන් පහත සඳහන් අගයන් ම දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

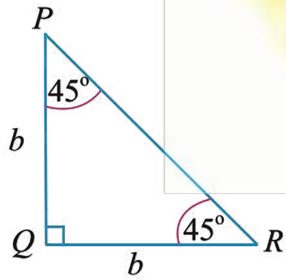
$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

45° කෝණයේ ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම

සෘජුකෝණය අන්තර්ගත වන පාදයක දිග b වන සමද්විපාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක අඩංගු 45° කෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගනිමු.



මෙය සමද්විපාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් නිසා $\hat{P} = \hat{R} = 45^{\circ}$ වේ.

* මෙම ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා PR පාදයේ දිග ගණනය කරමු.

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$= b^2 + b^2$$

$$PR^2 = 2b^2$$

$$PR = \sqrt{2b^2}$$

$$= \sqrt{2}b$$

$$\therefore \sin 45^{\circ} = \frac{PQ}{PR} = \frac{\cancel{b}}{\sqrt{2}\cancel{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Cos } 45^{\circ} = \frac{QR}{PR} = \frac{\cancel{b}}{\sqrt{2}\cancel{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

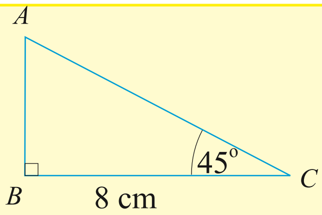
$$\tan 45^{\circ} = \frac{PQ}{QR} = \frac{b}{b} = 1$$

සටහන

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

නිදසුන 1

ABC ත්‍රිකෝණයේ AC පාදයේ දිග සොයන්න.



$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{8\text{ cm}}{AC}$$

$$AC = 8\sqrt{2}\text{ cm}$$

$\sqrt{2} = 1.4$ ආදේශයෙන්

$$AC = 8 \times 1.4\text{ cm} = 11.2\text{ cm}$$

නිදසුන 2

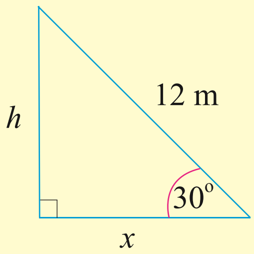
ඍජු කණුවක මුදුනට ගැට ගැසූ කම්බියක්, කණුව පාමුල තිරස් පොළව මත ස්ථානයකට ඇද ගැට ගසා ඇත. කම්බිය ඇදී ඇති කොටසේ දිග 12 m වේ. කම්බිය සහ පොළව අතර කෝණය 30° කි.

(i) මෙම තොරතුරු දැක්වීමට රූප සටහනක් අඳින්න.

(ii) කණුවේ උස සොයන්න.

(iii) කණුවේ පාමුල සිට කොපමණ දුරකින් කම්බිය පොළව මත ගැට ගසා තිබේ ද?

(i)



(ii) කණුවේ උස h යැයි ද ගැට ගැසූ තැනට දුර x යැයි ගනිමු.

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{12\text{ m}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{12\text{ m}}$$

$$\frac{1}{2} \times 12\text{ m} = h$$

$$6\text{ m} = h$$

කණුවේ උස 6 m වේ.

$$\text{(iii) } \cos 30^{\circ} = \frac{x}{12\text{ m}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12\text{ m}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 12\text{ m} = x$$

$$6\sqrt{3}\text{ m} = x$$

$\sqrt{3} = 1.7$ ආදේශ කළ විට

$$x = 6 \times 1.7\text{ m} = 10.2\text{ m}$$

කණුව පාමුල සිට 10.2 m ඈතින් කම්බිය ගැට ගසා ඇත.

නිදසුන 3

$\sin 30^{\circ} + \cos 30^{\circ}$ හි අගය සොයන්න.

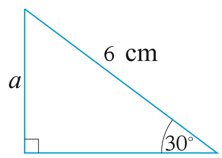
$$\sin 30^{\circ} + \cos 30^{\circ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

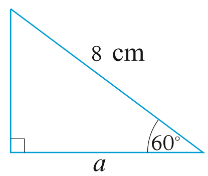
14.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණවල දී ඇති දත්තයන්ට අනුව a වලින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

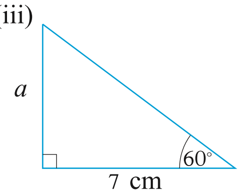
(i)



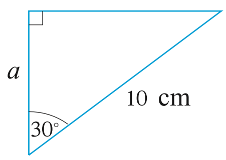
(ii)



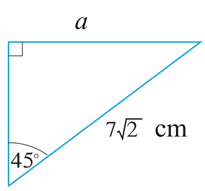
(iii)



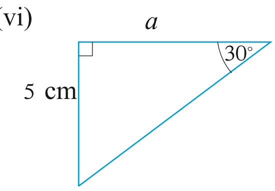
(iv)



(v)

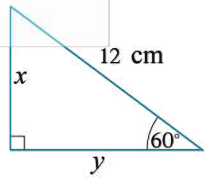


(vi)

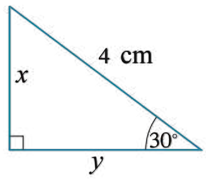


2. පහත ත්‍රිකෝණවල x සහ y මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

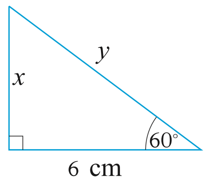
(i)



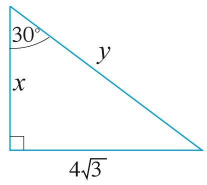
(ii)



(iii)



(iv)



3. අගය සොයන්න.

(i) $\sin 45^{o} + \cos 45^{o}$ (ii) $\sin 30^{o} + \cos 60^{o}$ (iii) $\tan 45^{o} - \cos 60^{o}$

14.4 ත්‍රිකෝණමිතික වගු

අප මෙතෙක් ගණනය කිරීම් සිදු කරන ලද්දේ 30^{o}, 45^{o}, 60^{o} යන කෝණ සඳහා පමණි. නමුත් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක සුළු කෝණයක් $0^{o} - 90^{o}$ අතර අගය පරාසයක් පුරා පැතිරී තිබිය හැකි ය. ගණනය කිරීම් ඉතා නිවැරදි ව සිදු කර ගැනීමට හැකි වන ආකාරයට ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත තුන සඳහා වගු තුනක් පිළියෙල කර තිබේ. ත්‍රිකෝණමිතික වගුවලින් උපුටා ගත් කොටස් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

ටැංජන වගුව

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	.5774	60	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41

සයින වගුව

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences								
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	.7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	.7660	40°	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14

කොසයින වගුව

73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	.9848	10°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	0	1	1	1	1	1	2	2	2
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3	0	0	1	1	1	1	1	1	2
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

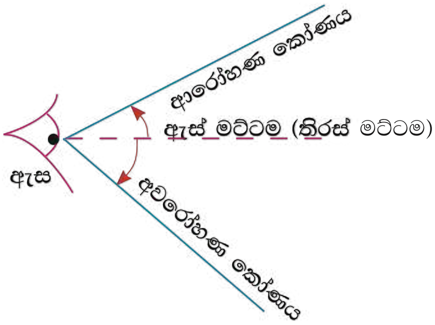
ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ඉහත වගු ඇසුරින් ද 30º, 45º, 60º කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගෙන ගණනය කිරීම් සිදු කළ හැකි ය.

14.5 සිරස් තලයේ කෝණ

පොළොවේ සිට ඍජු ව ඉහළට විහිදෙන තලය සිරස් තලයයි. කුළුණක්, දිය ඇල්ලක්, ගොඩනැගිල්ලක බිත්තියක් පොළොවට ලම්බක වන නිසා ඒවා සිරස් තලයේ පිහිටීම් සඳහා උදාහරණ වේ.

සිරස් තලය සමග සම්බන්ධ වන්නේ ආරෝහණ සහ අවරෝහණ කෝණයන් ය. එම කෝණ සම්බන්ධ වන ගණනය කිරීම් පරිමාණ රූප ඇසුරෙන් 3 ශ්‍රේණියේ දී ඔබ සිදු කරන ලදී. ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සම්බන්ධ කර ගෙන ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය පිළිබඳ ව දැන් සලකා බලමු.

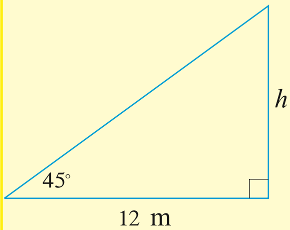


- ඇස් මට්ටමේ සිට ඉහළට මනිනු ලබන කෝණය ආරෝහණ කෝණය වේ.
- ඇස් මට්ටමේ සිට පහළට මනිනු ලබන කෝණය අවරෝහණ කෝණය වේ.

නිදසුන 1

සණ්ඨාර කුළුණක පාමුල සිට 12 mක් දුරින් සමබිමේ පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ දී කුළුණ මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 45° ක් ලෙස දිස් වේ. මෙම තොරතුරු රූප සටහනක දක්වා සණ්ඨාර කුළුණේ උස සොයන්න.

කුළුණේ උස h යැයි ගනිමු.



$$\tan 45^\circ = \frac{h}{12\ \text{m}}$$

$$1 = \frac{h}{12\ \text{m}}$$

$$1 \times 12\ \text{m} = h$$

$$12\ \text{m} = h$$

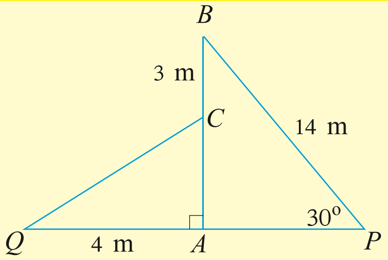
සණ්ඨාර කුළුණේ උස 12 m වේ.

නිදසුන 2

AB නම් කණුවක මුදුනට ගැට ගැසූ 14 m දිග කම්බියක් 30° ආරෝහණ කෝණයක් සෑදෙන ආකාරයට ඇදී සිටින සේ පොළොව මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයට සවි කර ඇත. කණුව මුදුනේ සිට 3 mක් පහළ C ලක්ෂ්‍යයට ගැට ගැසූ තවත් කම්බියක් කණුව පාමුල සිට 4 mක් ඈතින් Pට විරුද්ධ දිශාවේ පිහිටි Q ස්ථානයට ඇද සවි කර ඇත. P, Q සහ කණුව එකම රේඛාවක පිහිටා ඇත.

(i) ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන රූපයක් අඳින්න.
(ii) කණුවේ උස සොයන්න.
(iii) Q ස්ථානයේ ගැට ගැසූ කම්බිය පොළොව සමඟ සාදන කෝණය සොයන්න.

(i)



(ii) කණුවේ උස සෙවීමට ABP සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින අනුපාතය ලියමු.

$$\sin\ 30^{\circ} = \frac{AB}{BP}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{14\ \text{m}}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{14}^{7}\ \text{m} = AB$$

$$7\ \text{m} = AB$$

කණුවේ උස 7 mකි.

(iii) Q ස්ථානයේ දී පොළොව සමග සාදන කෝණය සෙවීමට ACQ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සඳහා ටැංජන අනුපාතය සලකමු.

$$AC = 7\ \text{m} - 3\ \text{m}$$

$$= 4\ \text{m}$$

$$\tan C\hat{Q}A = \frac{AC}{AQ}$$

$$= \frac{4\ \text{m}}{4\ \text{m}}$$

$$\tan C\hat{Q}A = 1$$

$$C\hat{Q}A = 45^{\circ}$$

Q හි දී ගැට ගැසූ කම්බිය පොළොව සමග සාදන කෝණය 45° කි.

14.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් දළ රූප සටහන් අඳින්න.
   (i) උස කොස් ගසක පාමුල සිට 22 mක් ඇතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී ගස මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 30^o ක් විය.
   (ii) උස කුළුණක මුදුනේ සිටින මිනිසෙකුට කුළුණ පාමුල සිට 15 mක් ඇතින් පොළොව මත ඇති ගඩොල් කැටයක් 60^o ක අවරෝහණ කෝණයකින් දිස් වේ.
   (iii) ඇන්ටනා කණුවක මුදුනේ ගැට ගසා ඇති 12 m දිග කම්බියක් පොළොවත් සමඟ 45^o කෝණයක් සෑදෙන ආකාරයට ඈද පොළොව මත ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත.
   (iv) 30 mක් උස ගොඩනැගිල්ලක පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට බලන විට ඈතින් පෙනෙන කන්දක මුදුන 30^oක ආරෝහණ කෝණයකින් දිස් වේ. එතැන් සිට සිරස් ව ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ දී කන්දේ මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය 60^o කි.
   (v) තට්ටු ගොඩනැගිල්ලක 20 m උස ස්ථානයක සිටින මිනිසෙකුට ඉහළ අහසේ ගමන් කරන ගුවන් යානක් 60^oක ආරෝහණ කෝණයකින් දිස් විය. එම මොහොතේ ම ගුවන් යානයට සිරස් ලෙස පහළින් කුඹුරක බැඳ සිටින ගවයෙකු 30^oක අවරෝහණ කෝණයකින් දිස්වේ.

2. ගංගාවක එක ඉවුරක 15 m උස කණුවක් තිබේ. එම කණුවේ සිට හරි කෙළින් අනික් ඉවුරේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කණුවේ මුදුන දකින ආරෝහණ කෝණය 30°ක් ලෙස දිස්වේ.
   (i) ඉහත තොරතුරු දැක්වීමට දළ රූප සටහනක් අඳින්න.
   (ii) ගංගාවේ පළල x ලෙස ගෙන ගංගාවේ පළල ලබා ගන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.)

3. වෙසක් තොරණක පාමුල සිට 8 m දුර තොරණෙන් ඉවතට ගමන් කළ විට තොරණ මුදුන පෙනෙන්නේ පොළොව සමඟ 60°ක ආරෝහණ කෝණයක් සාදන ආකාරයට ය.
   (i) ඉහත තොරතුරු ඇතුළත් දළ සටහනක් අඳින්න.
   (ii) තොරණේ උස h ලෙස ලකුණු කර තොරණේ උස සොයන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.)

4. 12 m උස කුළුනක මුදුනේ ගැට ගැසූ කම්බියක් තිරස් පොළොවේ කුළුණේ පාමුල සිට කිසියම් දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට ඇද ගැට ගසා තිබේ. පොළොව සහ කම්බිය අතර කෝණය 45° කි.
   (i) ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන දළ සටහනක් අඳින්න.
   (ii) කම්බිය ඇදී ඇති කොටසේ දිග y ලෙස ගෙන, කම්බියේ දිග ලබා ගන්න.
   ($\sqrt{2} = 1.4$ ලෙස ගන්න.)

5. ඉනිමඟක් බිත්තියකට හේත්තු කර ඇත්තේ පොළොවත් සමඟ 60°ක කෝණයක් සෑදෙන ලෙසිනි. ඉනිමගේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට බිත්තිය දිගේ පොළොවට ඇති සිරස් උස 3 mක් වේ.
   (i) මෙම තොරතුරු දැක්වීමට දළ රූප සටහනක් අඳින්න.
   (ii) ඉනිමගේ දිග සොයන්න.
   (iii) ඉනිමගේ පහළ කෙළවරේ සිට බිත්තියට ඇති කෙටි ම දුර සොයන්න.
   ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.)

14.6 තිරස් තලයේ කෝණ

පොළොවට සමාන්තර වන ආකාරයට පිහිටා ඇති තලය **තිරස් තලයයි.** මෙම තලය තුළ සිදුවන සිදුවීම් සම්බන්ධයෙන් **ත්‍රිකෝණමිතික** අනුපාත ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය අප මෙහි දී සලකා බලනු ලැබේ.

දිගංශය

තිරස් පොළොව මත එක ස්ථානයක් අනුබද්ධයෙන් අවට පිහිටා ඇති ස්ථානවල පිහිටීම දැක්වීමට දිගංශය යොදා ගන්නා බවත් උතුරු දිශාවේ සිට දක්ෂිණාවර්තව මනිනු ලබන කෝණය දිගංශය ලෙස හඳුන්වන බවත්, දිගංශය ඉලක්කම් තුනකින් ලියනු ලබන බවත් මීට පෙර ඔබ ඉගෙන ගෙන ඇත.

ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත යොදා ගනිමින් තිරස් පොළොව මත ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය දැන ගැනීමට පහත නිදසුන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

A සිට B හි දිගංශය 060° නම් B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

A සිට B සහ ලක්ෂ්‍ය දැක්වීමට පහත ආකාරයේ රූපයක් අඳිමු. ජ්‍යාමිතික ආකාරයට B සිට A හි දිශාවට ඇති දක්ෂිණාවර්ත කෝණය ගණනය කරමු.

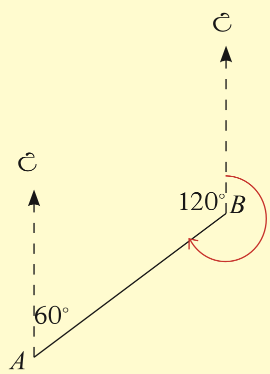
මිත්‍ර කෝණවලට අනුව B හි වාමාවර්ත කෝණය

වාමාවර්ත කෝණය $= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

B සිට A හි දිගංශය $= 360^\circ - 120^\circ$

$= 240^\circ$



නිදසුන 2

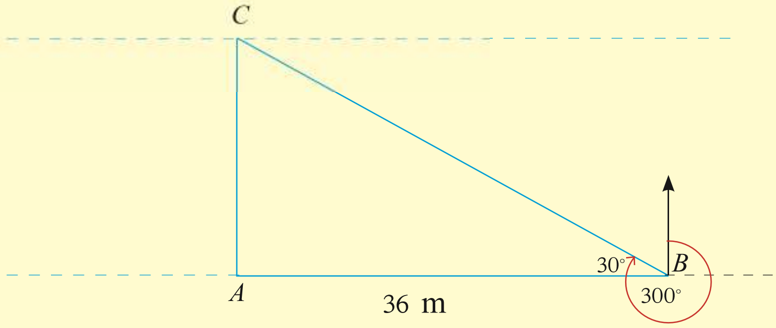
බටහිර සිට නැගෙනහිර දෙසට ගලා බසින ගංගාවක එක ඉවුරක පිහිටි A නම් ලක්ෂ්‍යයේ සිට සෘජු ලෙස අනික් ඉවුරේ තේක්ක ගසක් ඇත. A ලක්ෂ්‍යයේ සිට 36 m ක් දුරින් ගංගාවට සමාන්තරව පහළ B ලක්ෂ්‍යයේ දී තේක්ක ගසේ පාමුල 300^{o} ක දිගංශයකින් දිස් වේ.

(i) තේක්ක ගසේ පාමුල C ලෙස ගෙන ඉහත තොරතුරු දැක්වෙන දළ රූපයක් අඳින්න.

(ii) ගංගාවේ පළල සොයන්න.

$\tan\ 30^{o} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ හා $\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න.

(i)



(ii) $\quad A\hat{B}C = 300^{\circ} - 270^{\circ} = 30^{\circ}$

ABC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ කෝණය සලකා ටැංජන අනුපාතය සලකමු.

$$\tan 30^{\circ} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{36\ \text{m}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times 36\ \text{m} = AC$$

$$\frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times 36\ \text{m} = AC$$

$$\frac{\sqrt{3} \times \cancel{36}^{12}}{\cancel{3}} = AC$$

$$12\sqrt{3} = AC$$

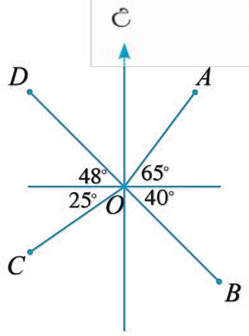
$$12 \times 1.7 = AC$$

$$20.4 = AC$$

ගංගාවේ පළල 20.4 m පමණ වේ.

14.5 අභ්‍යාසය

1. (i) රූපයට අනුව O ලක්ෂ්‍යයේ සිට A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල දිගංශයන් වෙන වෙන ම ලියා දක්වන්න.



(ii) X ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් පහත දැක්වෙන දිගංශ රූපයකින් නිරූපණය කරන්න.

X සිට P හි දිගංශය 055°, X සිට Q හි දිගංශය 125°
X සිට R හි දිගංශය 205°, X සිට S හි දිගංශය 290°

(iii) A සිට B හි දිගංශය 040° නම් B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(iv) C සිට D හි දිගංශය 120° නම් D සිට C හි දිගංශය සොයන්න.

(v) E සිට F හි දිගංශය 200° නම් F සිට E හි දිගංශය සොයන්න.

(vi) G සිට H හි දිගංශය 270° නම් H සිට G හි දිගංශය සොයන්න.

(vii) A නම් ලක්ෂ්‍යයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන ළමයෙකු 090° දිගංශයකින් 50 mක් ගමන් කර B වෙත පැමිණ B සිට 140° දිගංශයකින් 50 mක් ගමන් කර C වෙත පැමිණේ. C සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(viii) P සිට Q හි දිගංශය 180° කි. දුර 35 mකි. Q සිට R හි දිගංශය 240° කි. දුර 35 mකි. R සිට P හි දිගංශය සොයන්න.

(ix) W සිට 130° දිගංශයකින් 25 mදුරින් X ද X සිට 090° දිගංශයකින් 40 m දුරින් Y ද Y සිට 050° දිගංශයකින් 25 mදුරින් Z ද පිහිටා ඇත. Z සිට W හි දිගංශය සොයන්න.

(x) P සිට Q හි දිගංශය මෙන් Q සිට P හි දිගංශය දෙගුණයක් වේ. රූප සටහනක් ඇඳ පෙන්වන්න.

2. P වරායේ සිට 090° දිගංශයකින් 10 km ක් යාත්‍රා කරන නැවක් එතැන් සිට 030° ක දිගංශයකින් 10 km යාත්‍රා කර Q වරායට ළඟා වේ.
(i) මෙම තොරතුරු සඳහා දළ සටහනක් අඳින්න.
(ii) P සිට Q හි දිගංශය සොයන්න.

3. X ස්ථානයේ තිබූ විදුලි පහන් කණුවක් එතනින් ඉවත් කර X සිට 120°ක දිගංශයකින් සහ 20 mක් දුරින් වූ Y ස්ථානයේ සිටුවන ලදී. ($\sin 30° = \frac{1}{2}$)
(i) මෙම තොරතුරු සඳහා දළ සටහනක් අඳින්න.
(ii) කණුව X සිට කොපමණ දුරක් දකුණු දෙසින් පිහිටයි ද?

4. P නම් ස්ථානයේ සිටින පුද්ගලයෙකුට ඊට 500 mක් උතුරින් පිහිටි Q නම් වරායක සිට නැගෙනහිර දිශාවට ගමන් කරන X සහ Y නැව් දෙකක් පිළිවෙළින් 030°, 060° දිගංශයන්ගෙන් නිරීක්ෂණය කරයි. එම අවස්ථාවේදී නැව් දෙක අතර දුර සොයන්න.

5. මුහුදු වෙරළේ උතුරු දකුණු දිශා ඔස්සේ 120 mක් ඇතින් පිහිටි A හා B නම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක සිටින ළමයින් දෙදෙනෙකු ඈත මුහුදේ ගමන් කරන නැවක් එකම මොහොතේ නිරීක්ෂණය කරයි. එක ළමයෙකු 060° දිගංශයකින් ද අනික් ළමයා 150° ක දිගංශයකින් ද නැව දකින ලදි. ($\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3} = 1.7$)

(i) දත්තයන් දැක්වීමට රූප සටහන් අඳින්න.

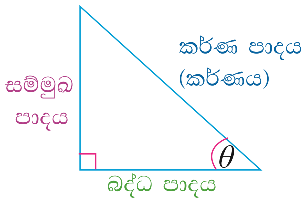
(ii) නැවේ සිට එක් එක් ළමයාට ඇති දුර සොයන්න.

සාරාංශය

- සෘජුකෝණි ත්‍රිකෝණ සඳහා,

$$\text{Sin } \theta = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණ පාදය}} \qquad \text{Cos } \theta = \frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණ පාදය}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$$



- පරිසරයේ පිහිටීම් හඳුනා ගැනීමට ආරෝහණ කෝණය, අවරෝහණ කෝණය සහ දිගංශය භාවිත කරයි.
- සෘජුකෝණි ත්‍රිකෝණයක සුළු කෝණයක් සහ එක පාදයක් දන්නා විට ඉතිරි පාද දෙක සෙවිය හැකි ය.
- සෘජුකෝණි ත්‍රිකෝණ පාද දෙකක් දන්නා විට ඉතිරි පාද සහ සුළු කෝණ දෙක සෙවිය හැකි ය.