19 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී වෙන් කර හඳුනා ගැනීමට,
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය ගොඩ නැඟීමට හා එහි භාවිතයට,
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද nහි ඓක්‍යය ගොඩ නැඟීම හා එහි භාවිතයට,
- සමාජයේ තිබෙන යම් යම් ගැටලු විසඳීම සඳහා ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී යොදා ගැනීමේ

හැකියාව ලැබේ.

4 ශ්‍රේණියේ දී ඉගෙන ගත් සමාන්තර ශ්‍රේඪී පිළිබඳ ලබා ගත් දැනුම පුනරීක්ෂණයට පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් සමාන්තර ශ්‍රේඪී තෝරා ලියන්න.

(i) 5, 7, 9, 11, ... (ii) 1, 2, 4, 8, ... (iii) 1, 4, 9, 16, ...

(iv) 20, 16, 12, 8, ... (v) $2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 7, ...$ (vi) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, ...

2. පහත දැක්වෙන සමාන්තර ශ්‍රේඪීවල මුල් පදය (a), පොදු අන්තරය (d) සොයන්න.

(i) 9, 14, 19, 24, ... (ii) 20, 17,14, 11, ...

(iii) 3.8, 4.4, 5, 5.6, ... (iv) $3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 10, ...$

3. 3, 5, 7, 9, ... සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 12 වන පදයත් මුල් පද 12හි ඓක්‍යයත් සොයන්න.

4. 3 වන පදය 7ද 8 වන පදය 12ද වන සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ,

(i) මුල් පදය හා පොදු අන්තරය සොයන්න. (ii) 16 වන පදය සොයන්න.
(iii) 52 වන්නේ කී වන පදය ද? (iv) මුල් පද 20හි ඓක්‍යය සොයන්න.

19.1 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී

අප මීට පෙර සමාන්තර ශ්‍රේඪී පිළිබඳ ව දැනුම ලබා ගත්තෙමු. දැන් අපි තවත් විශේෂිත වූ සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් පිළිබඳ විමසමු.

- 1, 3, 9, 27, ... — මෙම අනුක්‍රමය ගොඩනැඟී ඇත්තේ පෙර පදය 3න් ගුණ කර පසු පදය ලැබෙන ආකාරයෙනි.
- 64, 32, 16, 8, ... — මෙම අනුක්‍රමය ගොඩනැඟී ඇත්තේ පෙර පදය 2න් බෙදූ විට පසු පදය ලැබෙන ආකාරයෙනි.
- 5, −10, 20, −40, ... — මෙම අනුක්‍රමය ගොඩනැඟී ඇත්තේ පෙර පදය (− 2)න් ගුණ කර පසු පදය ලැබෙන ආකාරයෙනි.

ඉහත දැක් වූ සංඛ්‍යා අනුක්‍රම තුනෙහි ම ඇති විශේෂිත ලක්ෂණය කුමක් ද?

මෙම අනුක්‍රමයන්හි මුල් පදය හැර ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදූ විට නියත අගයක් ලැබේ.

මෙවැනි සංඛ්‍යා ශ්‍රේඪියක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ලෙස හඳුන්වන අතර මේ නියත අගය පොදු අනුපාතය ලෙස හඳුන්වයි.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ලෙස ද සංකේතවත් කරයි.

නිදසුන 1

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් දැයි පරීක්ෂා කිරීම.

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය	පදය	ඊට පෙර පදය	අනුපාතය	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වේ/ නොවේ.
3, 6, 12, 24, ...	6	3	$\frac{6}{3} = 2$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
	12	6	$\frac{12}{6} = 2$	
	24	12	$\frac{24}{12} = 2$	
600, 300, 150, 75, ...	300	600	$\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
	150	300	$\frac{150}{300} = \frac{1}{2}$	
	75	150	$\frac{75}{150} = \frac{1}{2}$	
2, 4, 8, 14, ...	4	2	$\frac{4}{2} = 2$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් නොවේ.
	8	4	$\frac{8}{4} = 2$	
	14	8	$\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$	
1, −3, 9, −27, ...	−3	1	$\frac{-3}{1} = -3$	ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
	9	−3	$\frac{9}{-3} = -3$	
	−27	9	$\frac{-27}{9} = -3$	

නිදසුන 2

මුල් පදය 5ද පොදු අනුපාතය 2ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

5, (5 × 2), (5 × 2 × 2), (5 × 2 × 2 × 2), ...

5, 10, 20, 40

නිදසුන 3

මුල් පදය 1ද පොදු අනුපාතය (−3)ද වන මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

1, [1 × (−3)], [1 × (−3) × (−3)], [1 × (−3) × (−3) × (−3)], ...

1, −3, 9, −27

නිදසුන 4

2, x, 8 යන පද 3 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාතව පිහිටයි නම් මෙම ශ්‍රේඪියේ x හි අගය සොයා එහි මුල් පද 3 ලියා දක්වන්න.

මෙම සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් නිසා, $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ වේ.

$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ නම්,

$x^2 = 16$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 4^2 = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0$ වේ.

එම නිසා, $x - 4 = 0$ හෝ $x + 4 = 0$

$x = 4$ හෝ $x = (-4)$ වේ.

$x = 4$ විට, 2, 4, 8 යන පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය ලැබේ.

$x = (-4)$ විට, 2, −4, 8 යන පොදු අනුපාතය (−2) වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය ලැබේ.

19.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝතර ශ්‍රේඪි තෝරා ලියන්න.

(i) 2, 6, 18, ... (ii) 5, 10, 20, ... (iii) 2, 4, 6, ...

(iv) −5, 10, 15, −25, ... (v) 100, 50, 25, 12.5, ... (vi) 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, ...

2. පහත ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිවල මුල් පදය (a) හා පොදු අනුපාතය (r) සොයන්න.

(i) 1, 2, 4, 8, ... (ii) 3, 9, 27, 81, ... (iii) 4, −8, 16, −32, ...

(iv) 270, 90, 30, 10, ... (v) 3, 0.6, 0.12, 0.024, ... (vi) a^3, $3a^2$, $9a$, 27, ...

3. මුල් පදය 5 ද පොදු අනුපාතය 2 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 4 ලියන්න.

4. මුල් පදය 100 ද පොදු අනුපාතය $\frac{1}{2}$ ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 4 ලියන්න.

5. 10, y, 40, ... යනු ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත ව පිහිටි පද 3ක් නම් y හි අගය සොයන්න.

19.2 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක අනුයාත (එක ළඟ) පද අතර අනුපාතය නියත අගයක් ලැබේ නම් එය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් බව දැන් අපි දනිමු.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය (a) ද පොදු අනුපාතය (r) ද n වන පදය T_n ලෙස ද සංකේතවත් කරයි.

5, 10, 20, 40, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකා එහි n වන පදය සොයමු.

පළමු පදය ⟶ $T_1 = 5 \times 1 \qquad = 5 \times 2^{1-1}$

දෙවන පදය ⟶ $T_2 = 5 \times 2 \qquad = 5 \times 2^{2-1}$

තුන්වන පදය ⟶ $T_3 = 5 \times 2 \times 2 \qquad = 5 \times 2^{3-1}$

හතරවන පදය ⟶ $T_4 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \qquad = 5 \times 2^{4-1}$

.

.

n වන පදය ⟶ $T_n = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \ldots = 5 \times 2^{n-1}$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 යනු මුල් පදය (a) ද 2 යනු පොදු අනුපාතය (r) ද වේ.

තව ද අප සංකේතාත්මකව ම සූත්‍රය ලබා ගනිමු. එහි මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද පද ගණන n ද n පදය T_n ද වේ.

$$T_1 = ar^{1-1}$$
$$T_2 = ar^{2-1}$$
$$T_3 = ar^{3-1}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$T_n = ar^{n-1}$$

ලෙස දැක්විය හැකි බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

> පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය, $\boldsymbol{T_n = ar^{n-1}}$ මගින් ලබා දෙයි.

19.3 $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතය

පළමු පදය (a), පොදු අනුපාතය (r), පද ගණන (n), n වන පදය (T_n) වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සලකමු. a, r හා n හි අගය දී ඇති විට, එම අගයන් $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රයට ආදේශ කිරීමෙන් T_n හි අගය සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 1

මුල් පදය 1ද පොදු අනුපාතය 2 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

මෙහි $a = 1, r = 2, n = 6$

$T_n = ar^{n-1}$ට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$T_6 = 1 \times 2^{6-1}$

$= 1 \times 2^5$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 1 \times 32$

$= 32$

ඉහත ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය 32 වේ.

නිදසුන 2

2, –6, 18, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය හා 8 වන පදය සොයන්න.

මෙහි, $a = 2$ ද $r = \frac{-6}{2} = -3$ ද වේ.

(i) **පස්වන පදය සෙවීම.** මෙහි $n = 5$

$T_n = ar^{n-1}$ට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$T_5 = 2 \times (-3)^{5-1}$

$= 2 \times (-3)^4$

$= 2 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 2 \times 81$

$= 162$

(ii) **හත්වන පදය සෙවීම.** මෙහි $n = 7$

$T_n = ar^{n-1}$ට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$T_7 = 2 \times (-3)^{8-1}$

$= 2 \times (-3)^7$

$= 2 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 2 \times -2187$

$= -4374$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පස්වන පදය 162 ද හත්වන පදය – 4374 ද වේ.

නිදසුන 3

64, 32, 16, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ 6 වන පදය සොයන්න.

මෙහි $a = 64$ ද $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ ද $n = 6$ වේ.

ඉහත දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ට ආදේශයෙන්,

$$T_6 = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$
$$= 64 \times \frac{1^5}{2^5}$$
$$= 64 \times \frac{1}{32}$$
$$= 2$$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ හයවන පදය 2 වේ.

19.2 අභ්‍යාසය

1. පහත වගුවෙහි හිස්තැන් පුරවන්න.

මුල් පදය	පොදු අනුපාතය	ශ්‍රේඪීය			
		පළමු පදය (T_1)	දෙවන පදය (T_2)	තුන්වන පදය (T_3)	හතරවනපදය (T_4)
a	r	a	ar	ar^2	....
4	2	4	8	16	....
1	3	....	....	....	....
−3	2	....	....	....	....
5	−2	....	....	....	....
81	$\frac{2}{3}$	....	....	....	....
0.1	0.2	....	....	....	....

2. පහත එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪීයේ 5 වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

(i) 1, 2, 4, ...
(ii) 10, 20, 40, ...
(iii) 3, − 6, 12, ...
(iv) − 7, 14, − 28, ...
(v) 32, 16, 8, ...
(vi) 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, ...
(vii) 1, 0.1, 0.01, ...
(viii) 0.1, 0.04, 0.016, ...

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{18}, \ldots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය හා 7 වන පදය සොයන්න.

4. $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 6 වන පදය සොයන්න.

5. රෝගයක් මර්දනය සඳහා පළමු මාසයේ රු. 5000ක් ද ඉන්පසු සෑම මාසයක ම ඊට පෙර මාසයේ යෙදූ මුදල මෙන් දෙගුණයක් ද ආදී වශයෙන් මාස කිහිපයක් මුදල් වියදම් කරයි.
   (i) පළමුවන, දෙවන හා තුන්වන මාසවල දී වියදම් කරන ලද මුදල් ප්‍රමාණ පිළිවෙළින් ලියා දක්වන්න.
   (ii) එම වියදම් කළ මුදල් පිළිවෙළින් ලියූ විට කවර ශ්‍රේඪියක පිහිටයි දැයි සඳහන් කර එයට හේතු දක්වන්න.
   (iii) 6 වන මාසයේ දී කොපමණ මුදලක් වියදම් කරයි දැයි ඉහත තොරතුරු අනුව සොයන්න.

19.4 $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය ආශ්‍රිත ගැටලු

$T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිත කළ ගැටලුවල දී මෙතෙක් අප ගණනය කරන ලදදේ n වන පදය හෙවත් T_n නොදන්නා විටයි. දැන් අප තවදුරටත් මුල් පදය නොදන්නා විට හෝ පොදු අනුපාතය නොදන්නා විට හෝ පද ගණන නොදන්නා විට හෝ ගැටලු විසඳන ආකාරය දැන් විමසා බලමු.

මුල් පදය (a) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 1

පොදු අනුපාතය 2 ද තුන්වන පදය 32 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය සොයන්න.

මෙහි $r = 2, n = 3, T_3 = 32$

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ට ආදේශයෙන්,

$T_3 = a \times 2^{3-1}$

$32 = a \times 2^2$

$32 = 4a$

$\frac{32}{4} = \frac{4a}{4}$

$a = 8$

පොදු අනුපාතය (r) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 2

පළමු පදය 5 ද 5 වන පදය 405 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අනුපාතය සොයා එහි මුල් පද 4 ලියන්න.

මෙහි $a = 5, n = 5, T_5 = 405$

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ ට ආදේශයෙන්,

$$T_5 = 5 \times r^{5-1}$$

$$405 = 5\, r^{5-1}$$

$$\frac{405}{5} = \frac{5 \times r^4}{5}$$

$$81 = r^4$$

$(\pm 3)^4 = r^4$ (දර්ශක ඉරට්ට වූ විට පාදය සඳහා අගයන් 2ක් පවතී).

$\therefore\ r = 3$ හෝ $r = (-3)$ (දර්ශක සමාන නිසා පාද සමාන වේ).

මෙහි පොදු අනුපාතයට අගය දෙකක් ලැබෙන නිසා ඉහත අවශ්‍යතාවට සරිලන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී 2ක් පවතින බව පෙනේ.

$r = 3$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර $5, 15, 45, 135$ වේ.

$r = (-3)$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර $5,\ -15,\ 45,\ -135$ වේ.

නිදසුන 3

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය 21 ද 6 වන පදය $\frac{21}{243}$ ද වේ. එම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

මෙහි $a = 21, n = 6, T_6 = \frac{21}{243}$ වේ.

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ ට ආදේශයෙන්,

$$T_6 = 21 \times r^{6-1}$$

$$\frac{21}{243} = 21 \times r^5$$

$$\frac{21}{243} \times \frac{1}{21} = 21 \times r^5 \times \frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{243} = r^5$$

$$\frac{1^5}{3^5} = r^5$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = r^5$$

$$r = \frac{1}{3}$$

පද ගණන (n) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 4

12, (−24), 48, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ (−1536) වන්නේ කීවන පදය ද?

මෙහි, $a = 12$, $r = \frac{-24}{12} = (-2)$, $T_n = (-1536)$ වේ.

මෙම දත්ත $T_n = ar^{n-1}$ ට ආදේශයෙන්,

$$(-1536) = 12 \times (-2)^{n-1}$$

$$\frac{(-1536)}{12} = \frac{12 \times (-2)^{n-1}}{12}$$

$$(-128) = (-2)^{n-1}$$

$$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$$

$$7 = n-1 \quad \text{(පාද සමාන නිසා දර්ශක සමාන වේ.)}$$

$$n - 1 + 1 = 7 + 1$$

$$n = 8$$

$\therefore$ (−1536) යනු මෙම ශ්‍රේඪියේ අටවෙනි පදයයි.

මුල් පදය (a) හා පොදු අනුපාතය (r) සෙවීමේ අවස්ථාව

නිදසුන 5

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ දෙවැනි පදය 12 ද පස්වන පදය 324 ද වේ. එහි මුල් පදයත් පොදු අනුපාතයත් සොයන්න.

මෙහි $T_2 = 12,\ T_5 = 324$

$T_n = ar^{n-1}$ භාවිතයෙන්

$T_2 = ar^{2-1}$

$12 = ar$

$ar = 12$ ——— (1)

$T_5 = ar^{5-1}$

$324 = ar^4$

$ar^4 = 324$ ——— (2)

පද දෙකක් නොදත් හෙයින් එය විසඳීම සඳහා සමීකරණ දෙකක් ගත යුතු ය. එය සමගාමීව විසඳීමෙන් පද දෙකෙහි අගය සොයා ගත හැකි ය. මෙහි දී සමීකරණ එකක් අනෙක් සමීකරණයෙන් බෙදමු.

(2) ÷ (1)

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{324}{12}$$

$r^3 = 27$

$r^3 = 3^3$

$r = 3$ (දර්ශක සමාන බැවින් පාද සමාන වේ.)

$r = 3$, (1) ට ආදේශයෙන්,

$a \times 3 = 12$

$$\frac{a \times 3}{3} = \frac{12}{3}$$

$a = 4$

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය 4 ද පොදු අනුපාතය 3 ද වේ.

නිදසුන 6

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක හතරවන පදය 8 ද අටවන පදය 128 ද වේ.

(i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
(ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

(i) මෙහි $T_4 = 8,\ T_8 = 128$

$T_n = ar^{n-1}$ භාවිතයෙන්,

$T_4 = ar^{4-1}$

$8 = ar^3$

$ar^3 = 8$ ——— ①

$T_8 = ar^7$

$128 = ar^7$

$ar^7 = 128$ ——— ②

② ÷ ①,

$$\frac{ar^7}{ar^3} = \frac{128}{8}$$

$r^4 = 16$

$r^4 = (\pm 2)^4$

$r = \pm 2$ (දර්ශක සමාන බැවින් පාද සමාන වේ.)

මෙහි අර්ථය $r = 2$ හෝ $r = (-2)$ බවයි.

පොදු අනුපාතයට අගයන් දෙකක් ලැබෙන බැවින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් පවතී.

(ii) $r = 2$ ① ට ආදේශයෙන්,

$ar^3 = 8$

$a \times (2^3) = 8$

$8a = 8$

$\frac{8a}{8} = \frac{8}{8}$

$a = 1$

$r = 2$ හා $a = 1$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ

1, 2, 4, 8, 16

(ii) $r = (-2)$ ① ට ආදේශයෙන්,

$ar^3 = 8$

$a \times (-2)^3 = 8$

$-8a = 8$

$\frac{-8a}{-8} = \frac{8}{-8}$

$a = -1$

$r = (-2)$ හා $a = (-1)$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ

$-1,\ 2,\ -4,\ 8,\ -1$

19.3 අභ්‍යාසය

1. පොදු අනුපාතය 2 ද හතරවන පදය 32 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

2. පොදු අනුපාතය 3 ද පස්වන පදය 81 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

3. හතරවන පදය 10 ද පොදු අනුපාතය $\frac{1}{3}$ ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

4. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 12 ද හතරවන පදය 324 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පස්වන පදය 5 ද පළමු පදය 80 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයා මුල් පද 4 ලියන්න.

6. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය (-8) ද, තුන්වන පදය (-18) ද වේ. පොදු අනුපාතය සොයා එලෙස පැවතිය හැකි ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වන්න.

7. $\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \ldots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 512 වන්නේ කී වන පදය ද?

8. 810, (-270), 90, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ $\left(\frac{-10}{3}\right)$ වන්නේ කී වන පදය ද?

9. දෙවන පදය (-14) ද පස්වන පදය 112 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදයත් පොදු අනුපාතයත් සොයන්න.

10. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක දෙවන පදය (-128) ද හයවන පදය (-8) ද වේ.
(i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
(ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

19.5 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද n වල ඓක්‍යය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල පදවල ඓක්‍යය (එකතුව) S යන සංකේතයෙන් දැක්වේ. මේ අනුව මුල් පද n හි ඓක්‍යය S_n වේ. දැන් අප S_n සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගන අයුරු විමසා බලමු.

$T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතය සැලකූ විට,

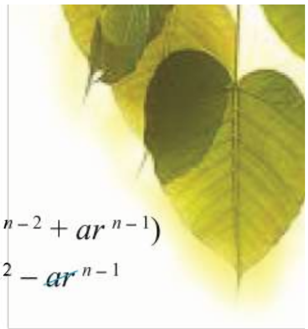
$T_1 = a, T_2 = ar, T_3 = ar^2, \ldots, T_{n-1} = ar^{n-2}, T_n = ar^{n-1}$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-1} + T_n$ වේ. දැන් ඉහත දත්ත මෙහි ආදේශ කරමු.

$\therefore S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ——— (1)

අපි දැන් (1) සමීකරණය rගෙන් ගුණ කරමු.

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$ ——— (2)



දැන් (2) සමීකරණයෙන් (1) සමීකරණය අඩු කරමු. එවිට,

$$rS_n - S_n = (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n) - (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1})$$

$$= ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n - a - ar - ar^2 - \ldots - ar^{n-2} - ar^{n-1}$$

$$S_n(r-1) = ar^n - a$$

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{(r-1)} = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad \text{(දෙපසම } (r-1) \text{ න් බෙදීමෙන්)}$$

$$\therefore S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad (r \neq 1)$$

වැදගත්

පොදු අනුපාතයෙහි අගය 1 වුවහොත් මෙම සූත්‍රය භාවිතයට නොගන්න.

ඉහතින් ලද සූත්‍රයේ හරය සහ ලවය (-1)න් ගුණ කළ විට පහත සූත්‍රය ද ලබා ගත හැකි ය.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \text{ වේ.}$$

S_n සඳහා,

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad \text{සහ} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

යන සූත්‍ර දෙකෙන් ඕනෑ ම එකක් භාවිත කළ හැකි ය.

පොදු අනුපාතයෙහි අගය 1ට වඩා විශාල අගයක් නම් පහත සූත්‍රය මගින් ගැටලු විසඳීම වඩාත් පහසු ය.

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad (r > 1 \text{ වූ විට})$$

පොදු අනුපාතයෙහි අගය 1ට වඩා කුඩා අගයක් නම් පහත සූත්‍රය මගින් ගැටලු විසඳීම වඩාත් පහසු ය.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad (r < 1 \text{ වූ විට})$$

නිදසුන 1

7, 14, 28, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය (එකතුව), පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වෙන වෙන ම සොයන්න.

- මුලින් ම අප පද සොයා පදවල එකතුව ගනිමු.

$T_1 = 7$ ද, $T_2 = 14$ හා $T_3 = 28$ ද ලෙස දී ඇත.

තව ද, $T_4 = 28 \times 2 = 56$ ද, $T_5 = 56 \times 2 = 112$ ද වේ.

$\therefore S_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$ ඉහතින් ආදේශය සලකමු.

$= 7 + 14 + 28 + 56 + 112$

$= 217$

- දැන් අප සූත්‍රය භාවිතයෙන් ඓක්‍යය (එකතුව) සොයමු.

මෙහි $r = \dfrac{14}{7} = 2$ බැවින් ($r > 1$ වේ.)

$\therefore S_n = \dfrac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ මගින් විසඳීම පහසු ය.

$a = 7,\ r = 2,\ n = 5,$ ඉහත සූත්‍රයට ආදේශ කරමු.

$$S_5 = \frac{7\,(2^5 - 1)}{(2 - 1)}$$

$$= \frac{7\,(32 - 1)}{1}$$

$$= 7 \times 31$$

$$= 217$$

මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය 217 වේ.

පද ගණන වැඩිවත් ම සූත්‍රය මගින් ගැටලු විසඳීම පහසු ය.

නිදසුන 2

320, 160, 80, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

$a = 320,\ r = \frac{160}{320} = \frac{1}{2}\ ,\ n = 6$

$r = \frac{1}{2}$ බැවින් $(r < 1$ වේ.) මෙහිදී $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ සූත්‍රය භාවිත කරමු.

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ සූත්‍රයට ඉහත දත්ත ආදේශයෙන්,

$$= \frac{320\,[(1-(\frac{1}{2})^6)]}{(1-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{320\,(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}$$

$$= 320\left(\frac{(64-1)}{64}\right) \div \frac{1}{2}$$

$$= 320 \times \frac{63}{64} \times \frac{2}{1}$$

$$= 630$$

ඓක්‍යය සඳහා ලබා ගත් සූත්‍ර දෙකෙහි ම අඥාත (අගය නොදන්නා පද) හතරක් ඇත. ඒවා නම් a, r, n හා S_n ය. මෙම අඥාතවලින් ඕනෑ ම 3ක් දුන් විට ඉතිරි අගය සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 3

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අනුපාතය 4 ද මුල් පද 5හි ඓක්‍යය 682 ද වේ නම් එහි මුල් පදය සොයන්න.

මෙහි $r = 4, n = 5, S_5 = 682$ යන දත්ත $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$ සූත්‍රයට ආදේශයෙන්,

$$S_5 = \frac{a(4^5 - 1)}{(4 - 1)}$$

$$682 = \frac{a(1024 - 1)}{3}$$

$$682 \times \frac{3}{1023} = a \times \frac{1023}{3} \times \frac{3}{1023} \qquad \text{(දෙපස ම } \frac{3}{1023} \text{ න් ගුණ කිරීමෙන්)}$$

$$a = 2$$

එනම්, මුල් පදය 2 වේ.

19.4 අභ්‍යාසය

1. 6, 12, 24, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය, පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වෙන වෙන ම සොයන්න.

2. 81, 27, 9, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

3. 10, 50, 250, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

4. 5, −10, 20, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 10හි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය 15ද පොදු අනුපාතය 10 ද වේ. මුල් පද 5හි ඓක්‍යය සොයන්න.

6. මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය 10 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 6හි ඓක්‍යය 22222.2 වේ. මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය (a) සොයන්න.

7. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අනුපාතය $\frac{1}{3}$ ද මුල් පද 6හි ඓක්‍යය 3640 ද වේ නම් මුල් පදය සොයන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. 3, 12, 48, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ,

(i) මුල් පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(ii) පස්වන පදය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

(iii) 3072 වන්නේ කී වෙනි පදය ද?

(iv) මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

2. −3, 6, −12, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ,

(i) මුල් පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) හයවන පදය සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.
(iii) −192 වන්නේ කී වෙනි පදය ද?
(iv) මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සොයන්න.

3. පළමු පදය 16 වන අතර දෙවැනි පදය, තුන්වන පදයට වඩා 4කින් විශාල ය. මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි. මෙහි,

(i) පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) සූත්‍රය භාවිතයෙන් හතරවන පදය සොයන්න.
(iii) මුල් පද පහේ ඓක්‍යය සොයන්න.
(iv) පස්වන පදය, හයවන පදය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

4. දෙවන පදය 6 ද පස්වන පදය 162 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක,

(i) මුල් පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.
(ii) හයවන පදය සොයන්න.
(iii) මුල් පද හයෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. පිරිවෙණක සිසුන් විසින් සාදන ලද තොරණක විදුලි බල්බ යොදා ඇත්තේ 5, 20, 80, ... ලෙසට ය.

(i) මෙය කුමන ශ්‍රේඪියක පිහිටයි ද යන්න සඳහා හේතු දක්වන්න.
(ii) මෙහි 7 වන පේළියේ විදුලි බල්බ ගණන කීය ද?
(iii) මුළු පේළි ගණන 7 ක් නම් තොරණ සඳහා අවශ්‍ය වූ මුළු විදුලි බල්බ ගණන කීය ද?

සාරාංශය

- පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය, $T_n = ar^{n-1}$ මගින් ලබා දෙයි.
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදවල ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා පහත සූත්‍ර භාවිත කළ හැකි ය.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \quad (r > 1 \text{ වූ විට})$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \quad (r < 1 \text{ වූ විට})$$