රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

10 | S | I

2022.04.06 / 07:30-10:40

පැය තුනයි මිනිත්තු දහයයි.
Three hours and ten minutes.

විභාග අංකය							

නම : .... පන්තිය : ....

උපදෙස් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A** කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) සහ **B** කොටස (ප්‍රශ්න 11 -17)
- **A** කොටස
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිතා කළ හැකි ය.
- **B** කොටස
  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු සොයා සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A** කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රය **B** කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රය උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B** කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	01	
	02	
	03	
	04	
	05	
	06	
	07	
	08	
	09	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ 1	
2	
අධීක්ෂණය කළේ	

A කොටස

ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

01. $3+6+12+24+\cdots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය U_r යැයි ගනිමු. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = 3\left(2^n - 1\right)$ බව සාධනය කරන්න.

02. $F(x) \equiv \sqrt{7x - x^2} + \log\left(x^2 - 1\right); x \in (a, b]$ යැයි ගනිමු. F ශ්‍රිතයේ වසම සොයන්න. **ඒනයින්,** a හා b තාත්ත්වික නියත අගයන්න.

03. $A \neq 0, k > 0$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ වන පරිදි, $(1+kx)^n = 1 + \frac{7}{2}x + Ax^2 + Ax^3 + \cdots$ යැයි ගනිමු. x^2 හා x^3 පදවල සංගුණක සැලකීමෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $n = \frac{2k+3}{k}$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්,** n හා k නියත සොයන්න.

04. $\lim_{x \to 1}\left(\frac{\sqrt[5]{22x+10}-2}{\sin(x-1)}\right) = \frac{11}{40}$; බව පෙන්වන්න.

05. $\theta \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$ වන පරිදි වූ C වක්‍රයක්, $x = 2 + 3\cos\theta$ හා $y = 1 - 7\sec\theta$ යන පරාමිතික සමීකරණ මගින් දී තිබේ. $C \equiv x + 2y - xy - 23 = 0$ බව පෙන්වන්න.

06. $L \equiv x - y + 1 = 0$ යැයි ගනිමු. $L = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(t, t+1)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. $t < 0$ වන පරිදි $L = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටි $A \equiv (\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $B \equiv (2, -1)$ ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර ඒකක $2\sqrt{5}$ ක් වන බව දී ඇත්නම්, $\beta = 1 - \sqrt{6}$ බව පෙන්වන්න.

07. **ප්‍රථම මූලධර්ම** උපයෝගී කර ගනිමින්, $\dfrac{d\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{dx} = \dfrac{x.\cos x - \sin x}{x^2}$ බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

08. එකම කාටීසීය තලයක $y = 3 - |x|$ හා $x - 2y + 3 = 0$ ශ්‍රිතවල දළ ප්‍රස්තාර අඳින්න. **ඒනයින්,** $x + 2|x| \leq 3$ අසමානතාවයෙහි විසඳුම් කුලකය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

09. x^2+2 යන්න, $(x-1)$ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස දෙන්න. **ඒනයින්,** $\dfrac{x^2+2}{(x-1)^{2022}}$ යන්න, භින්න භාග වලට වෙන්කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ වසම තුළ $y=\sin x$ ශ්‍රිතයෙහි දළ ප්‍රස්තාරය අඳින්න. දැන් $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. ඉහත ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}>\dfrac{3}{\pi}$ බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11 a. $ax^2+bx+c=0; a\neq 0, (a,b,c)\in\mathbb{R}$ වර්ගජ සමීකරණ විසඳන්න. ඒනයින්, $x=\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{-2a}$ හෝ $x=\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{-2a}$ විය යුතු බව අපෝහනය කරන්න. මෙහි $\Delta=b^2-4ac$ වේ. දැන් $(a,b,c)\in\mathbb{Q}$ යැයි ගනිමු. $a\neq 0$ හා $(a,b,c)\in\mathbb{Q}$ වන විට $ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයට **තාත්ත්වික පරිමේය මූල පැවතීමට** අනිවාර්ය හා ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාව ලියා දක්වන්න.

$ax^2+(b-2a)x+(a-b+c)=0; a\neq 0, (a,b,c)\in\mathbb{Q}$ වර්ගජ සමීකරණයෙහි මූල $\alpha+1$ හා $\beta+1$ යැයි ගනිමු. සුදුසු පරිණාමනයක් භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ α හා β මූල වන වර්ගජ සමීකරණය a,b,c ඇසුරෙන් දෙන්න. **ඒනයින්,** $a+b+c=0$ වන විට α හා β තාත්ත්වික පරිමේය වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

$F(x)\equiv a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b); a\neq 0, b\neq c\,(a,b,c)\in\mathbb{Q}$ යැයි ගනිමු.

$F(x)=0$ සමීකරණයටද තාත්ත්වික පරිමේය මූල පවතින බව පෙන්වන්න. තවද $abc\neq 0$ වන පරිදි $F(x)=0$ හි මූල යුගල එකිනෙකට සමාන වන බව දී ඇත්නම්, $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}$ හා $\dfrac{1}{c}$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

b. $G(x)\equiv\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}; x\in\mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. G ශ්‍රිතයේ **පරාසය** සොයන්න. **ඒනයින්,** $y=G(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක ලබාගන්න.

12 a. බහුපදයක් සඳහා වන **ශේෂ ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$f(x)\equiv 4x^3+ax^2+bx+7; (a,b)\in\mathbb{Q}$ යැයි ගනිමු. $(2x+\sqrt{7})$ යන්න, $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, $f\left(\dfrac{-\sqrt{7}}{2}\right)=0$ බවත්, $f\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)=0$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, a හා b නියත අගයා $f(x)$ යන්න පූර්ණ ලෙස සාධක වලට බිඳින්න.

තවදුරටත්, $f(-x)+x+1\geq 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

b. g ශ්‍රිතයක් එහි ප්‍රතිබිම්බය $g(x)$ යන්න, $g(x) \equiv x^{2023} + 2022, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ වන පරිදි අර්ථ දැක්වේ. g යනු **එකට - එක ශ්‍රිතයක්** බව සාධනය කරන්න.

c. $h(x) \equiv 2^x, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ වන පරිදි h ශ්‍රිතය අර්ථ දැක්වේ. h හි ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය h^{-1} යන්න, වසම හා පරාසය නිවැරදිව අර්ථ දක්වමින් ලියා දක්වන්න.

සුදුසු කාටීසීය තලයක $y = h(x)$ ප්‍රස්තාරගත කර **ඒනයින්,** $y = h^{-1}(x)$ හි ප්‍රස්තාරය **අපෝහනය** කරන්න. $y = h(x)$ හි ප්‍රස්තාරය $A \equiv (0, a)$ දී y අක්ෂය ඡේදනය කරනු ලබන අතර, $y = h^{-1}(x)$ ප්‍රස්තාරය $B \equiv (b, 0)$ දී x අක්ෂය ඡේදනය කරනු ලබයි.

දැන් A හා B ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරනු ලබන සරල රේඛාව L යැයි ගනිමු. a හා b අගයන් නිර්ණය කරමින් $L = 0$ රේඛාවේ සමීකරණය ලබාගන්න.

තවදුරටත් $y = h(x), y = h^{-1}(x)$ හා $L = 0$ මඟින් පළමු වෘත්ත පාදකය තුල ආවෘත පෙදෙසේ වර්ගඵලය **වර්ග ඒකක** $\frac{1}{2}$ ක් බව පෙන්වන්න.

13 a. $(a, b) \in \mathbb{R}^+$ වන පරිදි $A = \frac{a+b}{2}$ ද, $G = \sqrt{ab}$ යැයි ගනිමු. a හා b හි ඕනෑම අගයක් සඳහා $A \geq G$ බව සාධනය කරන්න. **ඒනයින්,** $f(x) \equiv \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}; x \in (0, \pi)$ මඟින් දැක්වෙන ත්‍රිකෝණමිතික පරිමේය ශ්‍රිතයට ගත හැකි **අවම අගය** 12 බව අපෝහනය කරන්න.

b. $ABC\Delta$ යක $A \equiv (2, 3)$ ද, $B \equiv (-1, 4)$ ද යැයි ගනිමු. ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය $x + 2y + 3 = 0$ රේඛාව මත පිහිටයි නම්, C ලක්ෂ්‍යයෙහි පථයේ සමීකරණය සොයන්න.

තවද බණ්ඩාංක මූලයේ සිට C ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර ඒකක $\sqrt{677}$ ක් වන පරිදි C සඳහා පිහිටීම් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා ඒවා සොයන්න.

එම C හි පිහිටීම් C_1 හා C_2 නම්, $ABC_1\Delta$ හා $ABC_2\Delta$ වල කේන්ද්‍රකයේ **කෝටික** සොයන්න.

c. a හා b ශූන්‍යය නොවන තාත්ත්වික නියත විට $y = e^{ax} \cos bx$ යැයි ගනිමු. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = \frac{3\pi}{2b}$ විට, $\frac{d^2y}{dx^2} = 3b$ හා $\frac{dy}{dx} = 2b$ බව දී ඇත්නම් a අගයන්න. **ඒනයින්,** $b = \frac{9\pi}{8\ln 2}$ බව පෙන්වන්න.

14.a. $x \neq 1$ සඳහා $f(x) \equiv \dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට සිරස් හෝ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ පවතිනම්, ඒවා සොයන්න.

$f(x)$ හි ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $x \neq 1$ සඳහා $f'(x) \equiv \dfrac{x+\alpha}{(1-x)^3}; \alpha \in \mathbb{Z}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි α යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියතයකි. **ඒනයින්,** $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න. තවද $x \neq 1$ සඳහා $f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය $f''(x)$ යන්න $f''(x) \equiv \dfrac{2(x+\alpha+1)}{(1-x)^4}$ බව දී ඇත. **ඒනයින්,** $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා $f(x)$ යටි අවතල වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ උඩු අවතලවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, $y-$අන්තඃඛණ්ඩය , වර්තන ලක්ෂ්‍යය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

b. දිග **ඒකකයක්** වන පරිදි වූ සිහින් කම්බියක් අපතේ නොයන පරිදි අරය r වූද, කේන්ද්‍රකෝණය රේඩියන θ වූ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩාකාර සංවෘත කම්බි රාමුවක් තනා තිබේ. රාමුවේ වර්ගඵලය A යන්න $A = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\theta}{(\theta+2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. A **උපරිම** වන පරිදි කේන්ද්‍ර කෝණය අගයා උපරිම වර්ගඵලයද ලබා ගන්න.

15.a. $\dfrac{1+2x}{3} = \tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+2x+5} \cdot dx$ සොයන්න.

$x^2+3x+5 \equiv A(2x^2+2x+5) + B(2x+1) + C; (A, B, C) \in \mathbb{R}$ වන පරිදි A, B හා C නියත සොයන්න.

ඒනයින්, $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+5}{2x^2+2x+5} .dx$ සොයන්න.

b. සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(a+b-x) \cdot dx; a < b, (a, b) \in \mathbb{R}$ ප්‍රතිඵලය පිහිටුවන්න.

$I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\tan^{2022} x} \cdot dx$ ද, $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\cot^{2022} x} \cdot dx$ ද යැයි ගනිමු. ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $I = J$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්,** I අගයන්න.

c. **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^3 x dx = \frac{3\sqrt{3}-1}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right|$ පෙන්වන්න.

16.a. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \equiv \sec x - \tan x$ බව සාධනය කරන්න. **ඒනයින්,** $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$ බව ලබාගන්න.

තවදුරටත් $\tan\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

b. $T(x) \equiv 2\sqrt{2}\sin x(\sin x + \cos x) + 2 - \sqrt{2}$ යැයි ගනිමු.

$T(x)$ යන්න, $T(x) \equiv A\sin(2x-\alpha)+B;(A,B)\in\mathbb{R}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ වන පරිදි A, B හා α නියත නිර්ණය කරන්න. $T(x)$ හි අවම අගය හා උපරිම අගය සොයා $[-\pi,\pi]$ වසම තුල $y=T(x)$ හි දළ සටහනක් අඳින්න.

c. $A+B+C=\pi$ නම්, $\tan\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{B}{2}\right)+\tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)+\tan\left(\frac{C}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{A}{2}\right)=1$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, $\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{B}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{C}{2}\right)\geq 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

17.a. $ABC\Delta$ ක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් **සයින නීතිය** හා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සයින නීතිය ඇසුරෙන්, කෝසයින නීතිය **අපෝහනය** කරන්න.

තවදුරටත් මහාකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින නීතිය හා කෝසයින නීතිය සාධනය කරන්න.

$ABC\Delta$ ක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් AB හා AC පාද වල දිග මෙන්ම B කෝණය ද නියත විට a සඳහා a_1 හා a_2 ලෙස ප්‍රභින්න අගයන් දෙකක් ඇතැයි ගනිමු.

$|a_1-a_2| = 2b\sqrt{(1-ck)(1+ck)}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි k යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්ත්වික නියතයකි.

b. $\sin x = \sin\theta; 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ නම්, $x = n\pi + (-1)^n\theta; n\in\mathbb{Z}$ ප්‍රතිඵලය පිහිටුවන්න.

ඒනයින්, $4\sin^4 x - 7\sin^2 x + 3 = 0$ විසඳන්න.

c. වසම හා පරාසය දක්වමින් $y=\cos^{-1}(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරය අඳින්න. තවදුරටත්, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ බව විධිමත්ව සාධනය කරන්න.

රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය විද්‍යාලය රාජකීය
Royal College Royal College Royal College Royal College Royal College Royal College Royal

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අප්‍රේල් 2022

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, April 2022

සංයුක්ත ගණිතය II
Combined Mathematics II

10 **S** **II**

2022.04.04 / 07:30-10:40

පැය තුනයි මිනිත්තු දහයයි.
Three hours and ten minutes.

විභාග අංකය							

නම : .... පන්තිය : ....

උපදෙස් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A** කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) සහ **B** කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- **A** කොටස
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිතා කළ හැකි ය.
- **B** කොටස
  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු සොයා සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A** කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රය **B** කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රය උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B** කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	01	
	02	
	03	
	04	
	05	
	06	
	07	
	08	
	09	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

I පත්‍රය	
II පත්‍රය	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ		

A කොටස

ප්‍රශ්ණ සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

01. එකිනෙකට $\theta; 0<\theta<\pi$ ආනතියකින් ක්‍රියා කරන P හා Q බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්ත R වේ. Q හි විශාලත්වය දෙගුණ කළ විට R දෙගුණයක් වේ. Q ප්‍රතිවර්තනය කළ විට ද R දෙගුණයක් වේ නම්, $P^2:Q^2:R^2=2:3:2$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

02. A හා B රථ දෙකක් සමාන්තර මාර්ග දෙකක එකම දිශාවකට ගමන් කරනු ලබයි. A ට ඒකාකාර ත්වරණයක් හා B ට ඒකාකාර මන්දනයක් ඇති අතර එක්තරා මොහොතක රථ එකිනෙකට අසලින් පිහිටන විට A හා B හි ප්‍රවේග අතර අනුපාතය $1:2$ වේ. **ඒකක කාලයකට** පසු රථ d දුරක් ගමන් කර එකිනෙක අසලින් නැවත පිහිටන විට A හා B හි ප්‍රවේග අතර අනුපාතය $2:1$ වේ. A හි ත්වරණයේ විශාලත්වයත්, B හි මන්දනයේ විශාලත්වයත් සමාන වන බව පෙන්වා එය $\frac{2d}{3}$ බව ලබාගන්න..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

03. $k \in \mathbb{R}$ වන පරිදි, O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හි පිහිටුම් දෛශිකය $3\mathbf{i}+(k+1)\mathbf{j}$ බවත්, A ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් B හි පිහිටුම් දෛශිකය $k(\mathbf{i}-\mathbf{j})-2(\mathbf{i}+2\mathbf{j})$ බවත් දී ඇත. k හි අගය කුමක් වූවත් $AOB=\dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න. AB හි පළමු ත්‍රිච්ඡේද ලක්ෂ්‍යය C නම්, $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}(4\mathbf{i}-\mathbf{j})$ වන පරිදි k අගයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

04. $4W$ බරැති ඒකාකාර තුනී අර්ධගෝලාකාර සුමට පාත්‍රයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් සමඟ ස්පර්ශව, සමතුලිතව තබා ඇත්තේ පාත්‍රයේ ගැට්ය මත ලක්ෂ්‍යයක දී $\dfrac{W}{4}$ බරැති අංශුවක් ඇඳීමෙනි. සමතුලිත පිහිටීමේ දී ගැට්යේ තලය **තිරසට** දරන ආනතිය $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{8}\right)$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

05. අරය a වූ ද ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, ජ්‍යාමිතික කේන්ද්‍රයට b දුරින් පිහිටන්නා වූද ගෝලයක් තිරසට θ ආනත රෑළු තලයක සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී. ගෝලයට $2\cos^{-1}\left(\frac{a\sin\theta}{b}\right)$ කෝණයකින් හැරීමෙන් පසු ද සීමාකාරී සමතුලිත පිහිටීමක් පවතින බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

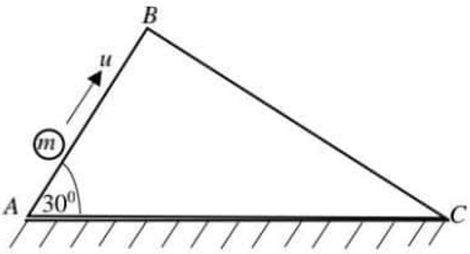
....

....

....

....

06. ස්කන්ධය m වූ ABC ත්‍රිකෝණාකාර හරස්කඩ සහිත සුමට කුඤ්ඤයක AC මුහුණත සුමට තිරස් තලයක තබා ඇති අතර $BAC = 30^0$ බව දී ඇත. දැන් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් AB තලය දිගේ ඉහළට u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. $\left(\frac{4m+1}{2m}\right)\cdot\frac{u}{g}$ කාලයකට පසු අංශුව නැවත මුල් පිහිටීමට පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

07. ඒකාකාරව ගලන ගඟක යාත්‍රා කරන බෝට්ටුවකට ගඟ ඉහළට මීටරයක් යාමට මිනිත්තු $m-1$ ක්ද, ගඟ පහළට මීටරයක් යාමට මිනිත්තු $m+1$ක් ද ගත වේ. ගඟ හරහා මීටරයක් යාමට බෝට්ටුවට ගත වන කාලය මිනිත්තු $\sqrt{m^2-1}$ බව පෙන්වන්න.

08. **තිරසට** θ ආනතියකින් යුතුව u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කළ අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යයේ සිට h තිරස් දුරකින් පිහිටි $4h$ උසැති සිරස් බිත්තියක මුදුන යන්තමින් ස්පර්ශ කරයි නම්, $\dfrac{1+\tan^2\theta}{2(\tan\theta-4)}=\dfrac{u^2}{gh}$ බව පෙන්වන්න. තවද $u=\sqrt{ngh}$ වන විට අංශුව තිරස සමඟ $\tan^{-1}(5)$ ක ආනතියක් සහිතව ආරම්භක ප්‍රක්ෂේපණය සිදු කරන බව දී ඇත්නම් n අගයන්න.

09. $\alpha P, P, 3P, 4P, 2P$ හා βP විශාලත්වය සහිත බල පිළිවෙලින් $ABCDEF$ සවිධි ෂඩ්‍රාස්‍රයක AB, BC, CD, DE, EF හා FA පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. මෙම බල පද්ධතිය **බල යුග්මයකට ඌණනය වන පරිදි** α හා β අගයන්න. සවිධි ෂඩාස්‍රයේ පාදයක දිග a බව දී ඇත්නම් යුග්මයේ විශාලත්වය හා අත සොයන්න.

10. දිග $2a$ බැගින්ද, බර $2W$ හා W වන AB, BC දඬු දෙකක් සුමටව සන්ධිකර $ABC = \frac{\pi}{2}$ වන සේ A අචල ලක්ෂ්‍යයකදී සුමටව අසව් කර තිබේ. A හා C සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර තිබේ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{4W}{\sqrt{34}}$ බව පෙන්වන්න.

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.a. a පළලැති, සමාන්තර ඉවුරැති ගඟක් දකුණු දිශාවට නියත u ප්‍රවේගයකින් ගලා යයි. නිසල ජලයේ $\sqrt{8}u$ ඒකාකාර වේගයකින් පැදවිය හැකි බෝට්ටුවක් (B_1) නැගෙනහිර ඉවුරේ A ලක්ෂ්‍යයක නවතා තිබේ.

වෙනත් මෝටර් බෝට්ටුවක් (B_2) බටහිර ඉවුරට ආසන්නව දකුණු දෙසට පොළොවට සාපේක්ෂව $4u$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරයි. A ලක්ෂ්‍යයට හරි වයඹ දෙසට මෝටර් බෝට්ටුව පැමිණ ඇති විටෙක A හි නවතා තිබූ බෝට්ටුව මෝටර් බෝට්ටුව හමුවීම සඳහා පිටත් වේ.

ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කර මෝටර් බෝට්ටුව හමුවීම සඳහා බෝට්ටුවට ගමන් කළ හැකි **දිශා දෙකක් පවතින බව** පෙන්වන්න.

මෝටර් බෝට්ටුව හමුවීම සඳහා ගමන් කළ හැකි උපරිම ප්‍රවේගයේ විශාලත්වය $\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)u$ බව පෙන්වන්න. තවදුරටත් එක් එක් අවස්ථා වලදී හමුවීමට ගන්නා කාල t_1 හා t_2 බව දී ඇත්නම්, $|t_1-t_2|=\dfrac{2\sqrt{7}a}{u}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි f_1 හා f_2 යනු පිළිවෙලින් P හා Q ට X සාපේක්ෂ ත්වරණය වේ.

b. $t=0$ මොහොතේ ඉතා කුඩා P වීදුරු බෝලයක් A ලක්ෂ්‍යයක සිට u වේගයෙන් සිරස් ලෙස උඩු අතට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. $t=0$ මොහොතේදීම $AB=h$ වන B පිහිටීමක සිට තවත් කුඩා Q වීදුරු බෝලයක් නිසලව මුදාහරී. AB යනු සිරස් රේඛාවකි. වීදුරුබෝල AB අතර පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේදී එකිනෙක ගැටෙන අතර එවිට ඒවායේ ප්‍රවේග **සමාන බව** ද දී ඇත.

P හා Q හි චලිතය විදහා දැක්වෙන ප්‍රවේග වක්‍ර එකම සටහනක අඳින්න.

ඒනයින්,

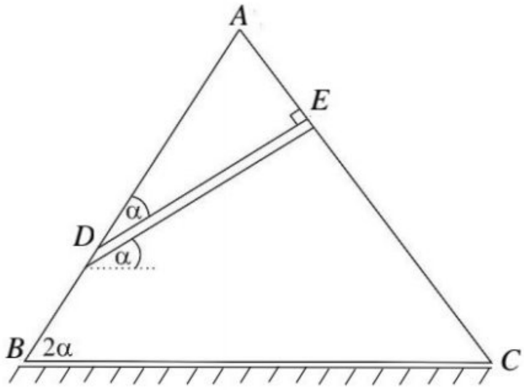
(α) $AC:CB=3:1$ බව පෙන්වන්න.

(β) $u^2=2gh$ බව පෙන්වන්න.

(γ) ගැටුමට ගත වන කාලය සොයන්න.

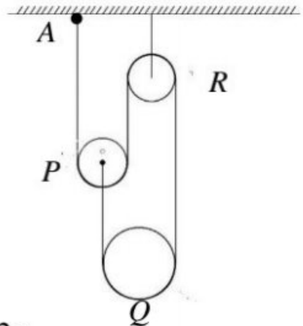
තවදුරටත් ගැටුමට පෙර P ට සාපේක්ෂව Q හි ප්‍රවේග වක්‍රය වෙනම සටහනක අඳින්න.

12 a. රූපයේ ABC ත්‍රිකෝණය, $A\hat{B}C = 2\alpha$ වූ BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $2m$ වන සුමට ඒකාකාර X කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. DE යනු එම සිරස් හරස්කඩ මත වූ සුමට සිහින් සරල රේඛීය ගමන් මාර්ගයකි. මෙහි $A\hat{D}E = \alpha$ හා $D\hat{E}A = 90^0$ වේ. AB රේඛාව, එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. ආරම්භක පිහිටීමේදී, ස්කන්ධ m බැගින් වූ P හා Q අංශු දෙකක් පිලිවෙලින් DE මත E කෙළවරේද DA මත A කෙළවරේද තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. P අංශුව සඳහා එය අඩංගු ආනත තලය දිගේ



$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන් සමීකරණයක් ලියා දක්වා Q අංශුව සඳහාද එවැනි සමීකරණයක් **අපෝහනය කරන්න**. P, Q හා X හි ත්වරණ g හා α ඇසුරින් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් තවත් සමීකරණයක් ලබා ගන්න. DE සරල රේඛීය මාර්ගයේ ආනතිය $\cos^{-1}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ ට වඩා වැඩිවන විට Q අංශුව D වෙත ලඟා වීමට ප්‍රථම P අංශුව D හිදී කුඤ්ඤයෙන් ඉවත් වන බව පෙන්වන්න.

b. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සිවිලිමක A ලක්ෂ්‍යයකට එක් කෙළවරක් ගැටගැසූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, ස්කන්ධය m වන සචල සුමට P කප්පියක් යටින්ද අචල සුමට R කප්පියක් මතින්ද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට සචල Q කප්පියක් යටින්ද යවා, අනෙක් කෙළෙවර P කප්පියේ O කේන්ද්‍රයට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව හා කප්පි එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තු තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



i. Q කප්පිය $\frac{g}{7}$ ත්වරණයෙන් පහළ බසින බවද P කප්පිය $\frac{2g}{7}$ ත්වරණයෙන් ඉහළ නගින බව ද පෙන්වන්න.

ii. Q කප්පිය $14a$ දුරක් සිරස්ව පහළට ගමන් කිරීමෙන් අනතුරුව ගෙබිම මත වැදී ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත් වේ. එම මොහොතේ සිට තන්තුව නැවත තදවීමට ගන්නා මුළු කාලය $8\sqrt{\frac{a}{g}}$ බව සාධනය කරන්න.

13 a. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ශුන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික යුගලයක් යැයි ද $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු. $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ නම්, $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව පෙන්වන්න.

$OABCDE$ සවිධි ෂඩාස්‍රයේ O ට සාපේක්ෂව A හා B හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. CD පාදය මත F පිහිටා ඇත්තේ $CF : FD = 3:1$ වන පරිදි නම්, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}(4\mathbf{b} - 11\mathbf{a})$ බව පෙන්වන්න.

BF මගින් CE හා CO රේඛා පිළිවෙලින් G හා H හිදී ඡේදනය වන්නේ යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{EG} = \lambda\overrightarrow{EC}$ හා $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BF}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වා λ හා μ තාත්වික නියත සොයන්න.

ඒනයින්, $BG : GF = 8:3$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තවද $h, k \in \mathbb{R}$ වන පරිදි $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{BH} = h\overrightarrow{BF}$ ලෙස ගනිමින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $OABH$ ත්‍රැපීසියම සලකා $BH : HG : GF$ අනුපාතය සොයන්න.

b. දෛශික දෙකක **තිත් ගුණිතය** අර්ථ දක්වන්න. ඒනයින්, දෛශික යුගලයක් ප්‍රලම්බ වීමට අවශ්‍යතාව **අපෝහනය** කරන්න.

O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{AB}=\alpha(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ වන පරිදි α නියතය සොයන්න. මෙහි $\alpha\in\mathbb{R}$ වේ. තවද $OAB=\cos^{-1}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right); n\in\mathbb{Z}$ වන පරිදි n නිඛිලය අගයන්න.

$OCB=\dfrac{\pi}{2}$ වන පරිදි OA මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්නම්, $\overrightarrow{OC}=\dfrac{8}{13}(2\mathbf{i}-3\mathbf{j})$ බව පෙන්වන්න.

14.a. $t=0$ මොහොතේදී O ඛණ්ඩාංක මූලයේ සිට තිරසට $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ කෝණයකින් u ආනතව ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කළ අංශුවක් $t=t$ මොහොතේදී $P\equiv(x,y)$ ලක්ෂ්‍යය සපුරාලනු ලබයි නම්, $y=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2u^2}\left(1+\tan^2\theta\right)$ බව පෙන්වන්න.

A,B,C හා D යනු එකම තිරස් මට්ටමක පිහිටි ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හතරක් යැයි ගනිමු. $t=0$ මොහොතේදී A හි සිට තිරසට 2α ආනතියක් සහිතව අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලබන්නේ $BC=2h$ වන පරිදි වූ B හා C හි පිහිටි සෘජු සිරස් h උසැති බිත්ති දෙකක් උඩින් යාන්තමින් ගැවී යන සේය. $t=t_1$ හා $t=t_2$ යන අවස්ථාවලදී අංශුව B හා C ලක්ෂ්‍යය පසු කර යයි නම්, $t_1+t_2=\dfrac{2u\sin 2\alpha}{g}$ බවත් $t_1t_2=\dfrac{2h}{g}$ බවත් පෙන්වන්න. AD අංශුවේ තිරස් පරාසය නම්, $AD=2h\cot\alpha$ බව පෙන්වන්න.

b. ස්කන්ධය m වන ගෝලයක් u ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරනු ලබන අතර ස්කන්ධය em වන B ගෝලයක් A ගමන් කරන දිශාවටම eu ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් චලිත වේ. A හා B සරල ලෙස ගැටීමෙන් පසු B හි ප්‍රවේගය e වලින් **ස්වායත්ත වන** බව පෙන්වන්න. තවද A හි ප්‍රවේගය අවම වන විට e අගයන්න. මෙහි e යනු ගැටුම සඳහා ප්‍රත්‍යාගතික සංගුණකය වේ.

15.a. දිගින් සමාන AB හා BC බර දඬු දෙකක් B හි දී සුමටව සන්ධි කොට, A හා C අග්‍ර එකම තිරස් මට්ටමේ වන රළු බිමක ද $ABC=2\theta$ වන පරිදි ද සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතී. AB හි ස්කන්ධය m වන අතර BC හි ස්කන්ධය AB හි ස්කන්ධය මෙන් **දෙගුණයකි**. A හා C ස්පර්ශ සඳහා ඝර්ෂණ සංගුණක පිළිවෙලින් μ_1 හා μ_2 බව දී ඇත.

A හි හා C හි සිරස් ප්‍රතික්‍රියා පිළිවෙලින් $\dfrac{5mg}{4}$ හා $\dfrac{7mg}{4}$ බව පෙන්වන්න.

තවද B සන්ධියේ තිරස් ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{3}{4}mg\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත් $\mu_1\geq\dfrac{3}{5}\tan\theta$ හා $\mu_2\geq\dfrac{3}{7}\tan\theta$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

b. $ABCD$ යනු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකි. එකම තිරස් මට්ටමේ වූ A හා D ලක්ෂ්‍යවලට තන්තුව ගැටගසා ඇත්තේ B හා C හි දී පිළිවෙලින් w_1 හා w_2 භාර දරමින්ය. සමතුලිත පිහිටීමේදී B, C ට ඉහළින් පිහිටන අතර AB, BC හා CD තන්තු කොටස් **උඩු සිරස** සමඟ පිළිවෙලින් θ, α හා β සුළු කෝණ සාදයි. ලාමී ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)\cdot\sin\beta}{\sin\theta\cdot\sin(\alpha+\beta)}$ බව පෙන්වන්න.

16.a. $AB = 2a$ හා $BC = a$ වන $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක AB හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් E හා F වේ. පද්ධතියේ BA, BC, CD, DA, DE, EC හා AC පාද ඔස්සේ පිළිවෙලින් $\lambda P, 2P, 3P, 4P, 2\sqrt{2}P, \sqrt{2}P$ හා $2\sqrt{5}P$ බල ක්‍රියා කරයි. බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය F හරහා ගමන් කරයි නම්, $\lambda = 11$ බව පෙන්වන්න. බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි විශාලත්වය සොයා එය AB සමඟ $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{11}\right)$ ක ආනතියක් දරන බව පෙන්වන්න.

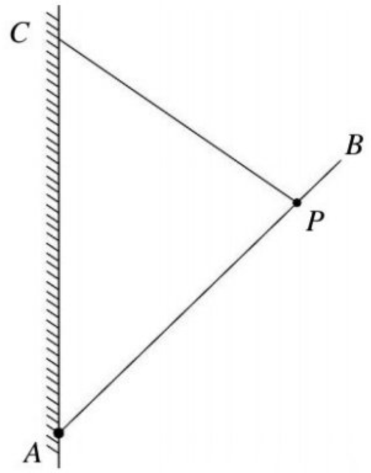
පද්ධතිය සමතුලිත වීම සඳහා පද්ධතියට එකතු කළ යුතු නව බලයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

මුල් බල පද්ධතියේ $\overrightarrow{BA}$ හා $\overrightarrow{BC}$ ඔස්සේ λP හා $2P$ වෙනුවට αP හා βP බල යෙදුවිට පද්ධතිය **යුග්මයකට තුල්‍ය වේ නම්** α හා β සොයන්න.

b. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන අතර පාදයකට දිග $2a$ බව දී ඇත. දැන්, AB, BC හා CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් $D, E,$ හා F යැයි ගනිමු. විශාලත්වය නිවුටන $5, 3, 1, 2, x$ හා y වන බල පිළිවෙලින් AB, BC, CA, DE, EF හා FD ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. x හා y හි අගයන් කුමක් වූවත් බල පද්ධතිය සමතුලිත **නොවන බව** සාධනය කරන්න.

17.a. දිග $2a$ වන ඒකාකාර සෘජු දණ්ඩක එක් කෙළවරක් රළු තිරස් ගෙබිමක ගැටෙමින් සහ ගෙබිමේ සිට h උසකින් පිහිටි සුමට නාදැත්තක ආධාරයෙන් සමතුලිතව තබා තිබේ. දණ්ඩ සීමකාරී සමතුලිත පිහිටීමේ ඇති විට දණ්ඩ තිරස සමඟ 45^0 ක ආනතියක් දරයි. දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}h-a}\right)$ බව පෙන්වන්න.

b. දිග $2a$ සහ බර W වූ ඒකාකාර දණ්ඩක් A හිදී සුමට ලෙස අසව් කර තිබේ. A ට සිරස්ව a උසින් වූ C ලක්ෂ්‍යයකට හා දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකි w බරැති සුමට මුදුවකට ගැටගැසූ a දිගැති තන්තුවක් ද ආධාරයෙන් පද්ධතිය රූපයේ පරිදි සමතුලිතව තිබේ. තන්තුව **යටි** අත් සිරස සමඟ θ ආනතියක් දරයි නම්,



(α) A සිට දණ්ඩ දිගේ මුදුවට ඇති දුර $\sqrt{2(1-\cos\theta)}a$ බව පෙන්වන්න.

(β) මුදුව මඟින් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}\cdot\dfrac{W}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(γ) මුදුවේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් $\dfrac{w^2}{W^2} = \dfrac{1}{8(1-\cos\theta)}$ බව ලබාගන්න.