රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College - Colombo 07

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022
General Certificate of Education (Adv.Level) Examination, 2022

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11 a. $F(x) \equiv px^2+qx+r; p \neq 0, (p,q,r) \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. සමීකරණය විසඳීමකින් **තොරව**, $F(x)=0$ ට තාත්ත්වික මූල පවතින්නේ නම්, $\Delta \geq 0$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\Delta = q^2-4pr$ වේ.

දැන්, $G(x) \equiv x^3+3kx^2+(k^2-3k-1)x-k^2; k \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

1 යන්න, $G(x)=0$ හි මූලයක් වේද? නොවේද? සාධනය කරන්න.

තවද $G(x)$ යන්න, $G(x) \equiv (x-a)(x^2+bx+c)$ වන පරිදි ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියතයක් වන අතර b හා c යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියත වෙයි.

ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $G(x)=0$ ඝනජ සමීකරණය තාත්ත්වික මූල තුනක් පවතින පරිදි k හි අගයන් සොයන්න.

තවදුරටත් $G(x)=0$ සමීකරණයෙහි **මූල දෙකක් පමණක් සෘණවන පරිදි** k අගය කුලකය සොයන්න.

b. $H(x)$ බහුපද ශ්‍රිතය, $(x-\alpha)$ ඒකජය මගින් බෙදූවිට ශේෂය $H(\alpha)$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

$I(x) \equiv ax^4+bx^3+62x^2+bx+a; (a,b) \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. (x^2-5x+6) යන්න $I(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත්නම්, a හා b අගයන්න.

තවදුරටත්, $I\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

12 a. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා, $r^3 \equiv A(r-1)(r-2)(r-3)+B(r-1)(r-2)+C(r-1)+D$ යැයි ගනිමු. මෙහි A, B, C හා D යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිල වෙයි.

දැන් $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1^3}{0!}+\dfrac{2^3}{1!}+\dfrac{3^3}{2!}+\dfrac{4^3}{3!}+\cdots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය U_r යැයි ගනිමු.

$r \geq 4$ සඳහා U_r යන්න, $U_r = \dfrac{a}{(r-4)!}+\dfrac{b}{(r-3)!}+\dfrac{b+1}{(r-2)!}+\dfrac{a}{(r-1)!}$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි a හා b යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියත වේ. ඒනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණිය $15e$ ට අභිසාරී වන බව අපෝහනය කරන්න.

b. x යන පුද්ගලයාට යහළුවන් හත් දෙනෙක් සිටී. ඉන් හතර දෙනෙක් කාන්තාවන් වන අතර තිදෙනෙක් පිරිමි වේ. ඔහුගේ y බිරිඳට යහළුවන් හත් දෙනෙක් සිටින අතර තිදෙනෙක් කාන්තාවන් වන අතර හතර දෙනෙක් පිරිමින් වේ. මොවුන් දෙදෙනා සාදයක් පවත්වන අතර ඒ සඳහා කාන්තාවන් තිදෙනෙක් හා පිරිමින් තිදෙනෙක් සහභාගි කර ගනියි. ඒ සඳහා x හා y ගෙන් සමාන යහළුවන් ප්‍රමාණයක් කැඳවයි නම් එලෙස සෑදිය හැකි කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න. (x හා y ට පොදු යහළුවන් නොසිටියි යැයි සලකන්න.)

13 a. α නියතයක් වන පරිදි $P=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $C=P^T\left(P-I_2\right)$ වන පරිදි C න්‍යාසය සොයන්න. මෙහි I_2 යනු ගණය 2×2 වන ඒකක න්‍යාසයයි. C න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝම නයාසය නොපවතියි නම්, α නියතයෙහි අගය නිර්ණය කරන්න.

දැන් $E=\left(1\ \ x\ \ 2\right)$ ද $A=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ x & 2 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$ යැයි ද ගන්න. මෙහි x යනු නියතයකි. $EA=E$ වන පරිදි x හි අගය නිර්ණය කරන්න.

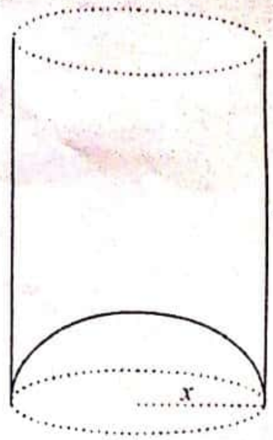
b. z_1, z_2 හා z_3 යනු $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=1$ වන පරිදිවූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් නම්, $\left|z_1+z_2+z_3\right|=1$ බව පෙන්වන්න.

c. $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ බව පෙන්වන්න. $z_1=-1+i$ ද, $z_2=1+\sqrt{3}i$ යැයි ගනිමු. z_1 හා z_2 එක එකක් ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කොට $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න. තවදුරටත් $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^{12}$ හි තාත්ත්වික කොටස සොයන්න.

14 a. $x\neq -1$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x(3x-2)}{(x+1)^2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $x\neq -1$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{2(4x-1)}{(x+1)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. ඒනයින් $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය සහ $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තරය සොයන්න. $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. $x\neq -1$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{-16x+14}{(x+1)^4}$ බව දී ඇත. $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

b. ඇතුලට නෙරාගිය අර්ධ ගෝලාකාර පතුලක් සහිත සිලින්ඩරාකාර මල් බඳුනක් එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවම වන පරිදි නිර්මාණය කල යුතුවේ. එහි පරිමාව ඒකක 45π විය යුතු වේ. පතුලේ අරය x හා උස y ද ලෙස ගෙන මල් බඳුනේ පිටත පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S යන්න $S=\dfrac{10\pi x^2}{3}+\dfrac{90\pi}{x}$ මගින් ලබාදෙන බව පෙන්වන්න. පිටත පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවම x වන අගය සොයන්න.



15.a. $x^3+x^2\equiv A\left(x^2-x+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x^2+x+1\right)$ වන පරිදි A, B හා C නියත අගයන්න. ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\int\dfrac{x^3+x^2}{x^4+x^2+1}.dx$ සොයන්න.

b. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int\sec^3\theta\cdot d\theta$ සොයන්න. $x=\dfrac{7\tan\theta-1}{3}$ ආදේශය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $\int\sqrt{9x^2+6x+50}\cdot dx$ සොයන්න.

c. $I_1=\int_0^{\sin^2 x}\sin^{-1}\sqrt{t}\cdot dt$ ද, $I_2=\int_0^{\cos^2 x}\cos^{-1}\sqrt{t}\cdot dt$ ද, $I=I_1+I_2$ ද, යැයි ගනිමු. සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්, I_1 යන්න, $I_1=\int_0^{x}u\cdot\sin 2u\cdot du$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. තවදුරටත් $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cdot\sin 2u\cdot du$ බව පෙන්වා $I=\dfrac{\pi}{4}$ බව සාධනය කරන්න.

16.a. ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් පිළිවෙලින් $y=m_1x$ හා $y=m_2x$ වේ. m_1 හා m_2 යනු $bx^2+2hx+a=0$ සමීකරණයේ මූල ද $H\equiv(a,b)$ යනු ත්‍රිකෝණයේ ලම්භ කේන්ද්‍රය ද වේ. තුන්වන පාදයේ සමීකරණය, $(a+b)(ax+by)=ab(a+b-2h)$ බව පෙන්වන්න.

b. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ ද $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ වෘත්ත ප්‍රලම්භ ලෙස ඡේදන වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සොයන්න.

$S\equiv 2x^2+2y^2-3x+6y-2=0$ වෘත්තය $(0,-1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නා වූද $y=2$ සරල රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටියා වූ ද $S^1=0$ වෘත්තය ප්‍රලම්භ ලෙස කපයි. $S^1=0$ හි සමීකරණය සොයා එම වෘත්තය $x^2+y^2=5$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේද කරන බව පෙන්වන්න.

17. a. $x \in \mathbb{R}$ වන පරිදි $T(x) \equiv \sin^2 x - 24\sin x\cos x + k \cdot \cos^2 x$ යැයි ගනිමු. මෙහි $k \in \mathbb{Z}^+$ වේ. T ශ්‍රිතයේ පරාසය, $R_T = [-7, 19]$ බව දී ඇත්නම් k අගයන්න. ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ k හි එම අගය සඳහා $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ වසම තුළ $y = T(x)$ ශ්‍රිතය ප්‍රස්තාරගත කරන්න.

b. $ABC\Delta$ ක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් sin ප්‍රමේයය **ප්‍රකාශ කරන්න.**

$\left[\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right)\right]\left[a \cdot \sin^2\left(\frac{B}{2}\right) + b \cdot \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)\right] \equiv c \cdot \cot\left(\frac{C}{2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

c. $\sin A, \sin B, \cos A$ හා $\cos B$ පද ඇසුරෙන් $\sin(A - B)$ ලියා දක්වන්න. **ඒනයින්,** $\cos(A - B) \equiv \cos A\cos B + \sin A\sin B$ බව **අපෝහනය** කරන්න. A හා B සඳහා සුදුසු කෝණ තෝරමින් $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ බව ලබාගන්න. තවදුරටත්, $\left(\sqrt{3} - 1\right)\sin 2x + \left(\sqrt{3} + 1\right)\cos 2x - 2 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න. තවද, $(-\pi, 2\pi)$ වසම තුල වන විසඳුම් **අපෝහනය** කරන්න.

★★★

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අප්‍රේල් 2022

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, April 2022

සංයුක්ත ගණිතය II

Combined Mathematics II

10 S II

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

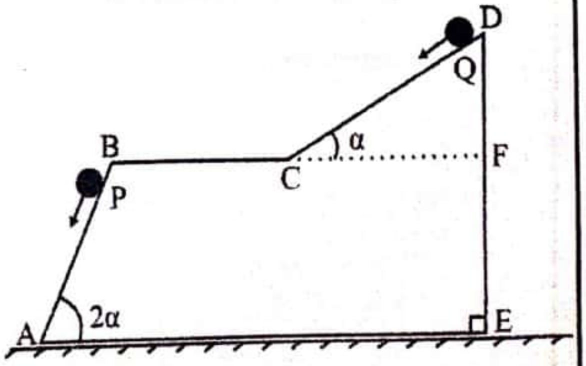
11 a. A සහ B අංශු දෙකක් එකම මොහොතක එකම ලක්ෂ්‍යයක සිට නිශ්චලතාවයෙන් චලිතය අරඹා එකම දිශාවට චලනය වේ. A ට f නියත ත්වරණයක් ද B ට $2f$ නියත ත්වරණයක් ද පවතී. t කාලයකට පසු B අංශුව නියත ප්‍රවේගයෙන් චලනය වීමට පටන් ගනී. $t+T$ කාලයකට පසු A අංශුව නියත මන්දනයකින් චලනය වීමට පටන් ගනී. එවිටම B අංශුවද f නියත මන්දනයකින් චලනය වීමට පටන් ගනී. අංශු දෙක මන්දනය අරඹන මොහොතේ එකම ස්ථානයක පිහිටයි. අංශු දෙක නිශ්චලතාවයට පත්වන්නේ ද එකම ස්ථානයක දීය. අංශු දෙක සඳහා එකම සටහනක ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර නිර්මාණය කර $T^2-2tT-t^2=0$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, T හි අගය t ඇසුරින් සොයන්න. B අංශුවේ මුළු චලිත කාලය $\left(4+\sqrt{2}\right)t$ බවත් A අංශුවේ මන්දනය $\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)f$ බවත් පෙන්වන්න.

b. $AB=a$ ද, $2BC=AB$ ද වන පරිදි වූ A,B හා C යනු ගුවන් තොටුපළ තුනක් යැයි ගනිමු. BC දෙසට අනවරතව u ප්‍රවේගයෙන් සුළඟක් හමන අතර ගුවන් යානයක නිසල වාතයේදී ප්‍රවේගය $\sqrt{2}u$ බව ද දී ඇත. ඉහත ගුවන් යානයක් A හිදී ගමන් අරඹා B,C හරහා නොනැවතී යළි A වෙතම පැමිණෙයි. මුළු ගමනට ගත වන කාලය, $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\dfrac{a}{u}$ බව පෙන්වන්න.

තවද B හි දී, යානය යොමුව ඇති දිශාව $\pi-\sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ ක කෝණයකින් හැරෙන බවද පෙන්වන්න.

12 a. රූපයේ පරිදි වූ ස්කන්ධය M වන සුමට $ABCDEF$ කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත වේ. B හි ආසන්නයේම ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් ද, D හි ආසන්නයේම ස්කන්ධය $2m$ වන Q අංශුවක්ද තබා පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදා හැරේ. P අංශුව BA උපරිම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේද, Q අංශුව DC උපරිම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේ ද චලනය වේ. $AB=CD=a$ ද, $B\hat{A}E=2\alpha$ ද, $D\hat{C}F=\alpha$ ද බව දී ඇත්නම්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණය, $\dfrac{4mg\cos^3\alpha\sin\alpha}{M+m\sin^2 2\alpha+2m\sin^2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.



P අංශුව A වෙත ළඟාවන මොහොතේදීම Q අංශුව C මත ළඟාවේනම්, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හා Q හි ත්වරණය සමාන බව පෙන්වන්න. $\alpha = 30^0$ විට, D සිට C තෙක් යාමට Q ගතවූ කාලය $2\left[\dfrac{a}{\left(\sqrt{3}+1\right)g}\right]^{\frac{1}{2}}$ බව පෙන්වන්න. තවද P අංශුව කුඤ්ඤය හැරයන මොහොතේදී කුඤ්ඤයේ ප්‍රවේගය සොයන්න.

b. තුනී සුමට කම්බියකින් සෑදූ අරය a වන සුමට වෘත්තාකාර වලල්ලක් සිරස් තලයක සවිකර තිබේ. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m හා $3m$ වන P,Q පබළු 2 ක් වලල්ලේ එහා මෙහා නිදැල්ලේ ගමන් කල හැකි පරිදි රඳවා තිබේ. ආරම්භයේ දී Q වලල්ලේ පහලම L ලක්ෂ්‍යයේ නිශ්චලව ඇති අතර P ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ රැඳී සිටින විට $\sqrt{5ag}$ තිරස් ~~බලයක්~~ P ට ලබාදෙයි. වලල්ල ඔස්සේ ගමන් කරන P,L හිදී Q සමඟ ගැටෙයි. පබළු අතර ප්‍රත්‍යස්ථතා සංගුණකය $\frac{1}{3}$ කි. ගැටුමෙන් පසු P නිශ්චලතාවයට පත්වන බව පෙන්වන්න. Q,L විසිවීමේ සිට ඉහළ නඟින සිරස් උසද සොයන්න. දෙවනවර ගැටුමෙන් පසු P අංශුවේ ප්‍රවේගයද සොයන්න.

13. ස්වාභාවික දිග a සහ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වූ ලුහු තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර, අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වන අංශුවක් සම්බන්ධකර නිදහසේ එල්ලා ඇත. තන්තුවේ විතතිය සොයන්න. ස්කන්ධය $2m$ වන අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට චලිත වී ඉහත අංශුවේ ගැටී එයට සංයුක්තය වෙයි. සංයුක්ත චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.

තන්තුවේ විතතිය x වන විට සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x}+\dfrac{2g}{3a}\left(x-\dfrac{3a}{2}\right)=0$ බව පෙන්වන්න. එම සමීකරණයේ විසඳුම $x=\dfrac{3a}{2}+c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ ලෙස දී ඇත්නම්, ω, c_1, c_2 හි අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, $u=2\sqrt{3ga}$ බව දී ඇත්නම්, තන්තුව ප්‍රථම වරට බුරුල් වන විට ගතව ඇති කාලය $\sqrt{\dfrac{3a}{2g}}\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

විස්තාරය A වන විට $\dot{x}^2=\omega^2\left[A^2-\left(x-\dfrac{3a}{2}\right)^2\right]$ බව දී ඇත්නම්, සරල අනුවර්තී චලිතයේ විස්තාරයත් තන්තුව බුරුල්වන මොහොතේ ප්‍රවේගයෙත් සොයන්න.

තන්තුව බුරුල් වීමෙන් තවත් $\sqrt{\dfrac{a}{2g}}\left(3-\sqrt{5}\right)$ කාලයකට පසු සංයුක්ත අංශුව O වෙත පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

14. a. O මූලය අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ වේ. $\alpha, \beta > 0$ වන පරිදි $\alpha+\beta=1$ බව දී ඇත්නම්, A, B හා C ලක්ෂ්‍ය **ඒක රේඛීය බව** පෙන්වන්න. තවද $AC : CB = \beta : \alpha$ බවද ලබාගන්න. AO හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් P හා Q බවත්, $\overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{a}+7\mathbf{b}$ බවත් දී ඇත්නම්, α හා β හි අගය සොයන්න. තවද $\mathbf{a} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ද $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ද බව දී ඇත්නම්, $O\hat{A}B$ සොයන්න.

b. $ABCD$ ත්‍රැපීසියමේ $AB = 2a$ වන අතර $AB // DC$ ද, $A\hat{C}B = 90^0$ ද $C\hat{A}B = 60^0$ ද $AD \perp DC$ බවත් දී ඇත. තවද AB, BC, CD, DA හා AC පාද ඔස්සේ විශාලත්ව පිළිවෙලින් $8P, 5\sqrt{3}P, 5P, 2\sqrt{3}P$ හා $4P$ බල ක්‍රියා කරයි.

a. බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයත්, එය AB සමඟ සාදන කෝණයත් සොයන්න.

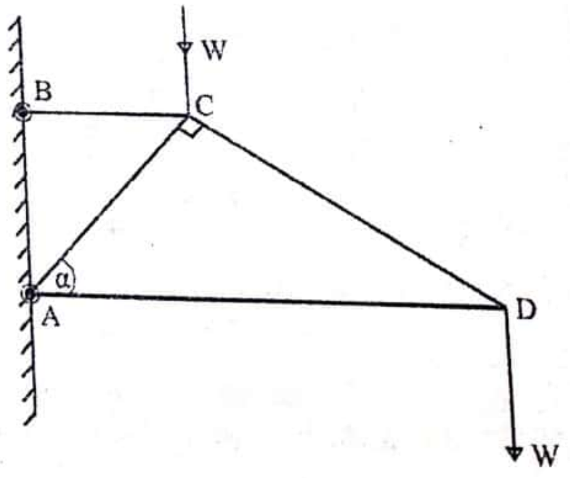
b. සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB පාදය ඡේදනය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර සොයන්න.

c. DA දිගේ වූ බලය ඉවත් කළ විට, නව සම්ප්‍රයුක්තයත්, එය AB ඡේදනය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයත් ලබාගන්න.

15. a. අරය a වූ අචලව සවිකර ඇති රළු කුහර ගෝලයක ඇතුළු පැත්තේ බර W වූ අංශුවක් තබා ඇත. අංශුවත් ගෝලයත් අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{3}$ බව ද දී ඇත. ගෝලයේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට අංශුවට උස x නම්, $10x^2 - 20ax + a^2 \geq 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ, පහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\frac{a}{10}\left(10-3\sqrt{10}\right)$ වඩා සිරස් උසකින් අංශුව සමතුලිතව පැවතිය **නොහැකි** බව පෙන්වන්න.

b. AC, BC, AD, CD යන ලුහු දඬු හතරක් සුමටව සන්ධි කරන ලද රාමු සැකිල්ලක් සටහනෙන් නිරූපණය වේ. A සහ B හි දී සිරස් බිත්තියක් මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සුචලව අසව් කර ඇත. A ට සිරස්ව ඉහළින් B පිහිටයි. BC සහ AD තිරස් වේ. $C\hat{A}D = \alpha, A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$ වේ. C සහ D හිදී W භාර දරයි. ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් නිර්මාණය කරන්න. AC සහ CD දඬුවල ඇතිවන ප්‍රත්‍යාබල විශාලත්වයෙන් සමාන වෙයි නම් α සොයන්න. සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබලන්හි විශාලත්ව W ඇසුරින් පමණක් සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග දක්වන්න.

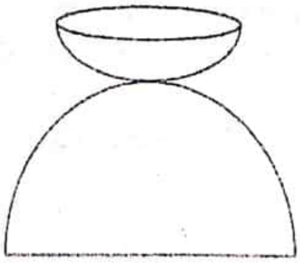


16. අරය ඒකක 1 ක් වූද, පෘෂ්ඨික ඝනත්වය ρ වූද තුනී කුහර ගෝලයක එහි O කේන්ද්‍රයට එක් පසෙකින් සහ O සිට ඒකක a දුරකින් පිහිටන $(1>a)$ තලයක් ඔස්සේ කපන ලදී.

විශාල කබොලෙහි ස්කන්ධය ඒකක $2\pi(a+1)\rho$ බව අනුකලනය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

තවද එහි ස්කන්ධය කේන්ද්‍රයට O සිට පවතින දුර ඒකක $\left(\dfrac{1-a}{2}\right)$ බවද පෙන්වන්න.

අනුකලනය භාවිතයෙන් **තොරව** කුඩා කබොලෙහි ස්කන්ධයත්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට පවතින දුරත් සොයන්න. මෙම කුඩා ගෝල කබොලෙහි ශීර්ෂයත්, විශාල ගෝල කබොලෙහි ශීර්ෂයත් එකට අලවා අරය ඒකක $\sqrt{1-a^2}$ වන ඉහත ගෝල ද්‍රව්‍යයෙන්ම සෑදූ වෘත්තාකාර තුනී පියනකින් විශාල කබොලෙහි විවෘත කෙළවර සංවෘත කර රූපයේ පරිදි කෙළි බඩුවක් තනා තිබේ.



කෙළි බඩුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට පවතින දුර $\lambda(1-a)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\lambda=\dfrac{4-a-a^2}{5-a^2}$ වේ.

කුඩා ගෝල කබොලෙහි පතුල තිරසට α කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත තැබූ විට වස්තුව පෙරළීමට ආසන්න අවස්ථාවේ පවතී නම්, $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2-\lambda+a(\lambda-1)}\right)$ බව පෙන්වන්න. තවද $a=\dfrac{1}{2}$ වන විට කෙළි බඩුව හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය ද සොයන්න.

17.a. A හා B යනු $P(A)=P(A/B)=\dfrac{1}{4}, P(B/A)=\dfrac{1}{2}$ වන පරිදි වූ සිද්ධි දෙකකි. පහත අවස්ථාවල සත්‍ය හෝ නොවීම හේතු සහිතව පැහැදිලි කරන්න.

i. A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ.
ii. A හා B ස්වායත්ත වේ.
iii. $P(A'/B)=\dfrac{3}{4}$
iv. $P(A'/B')=\dfrac{1}{2}$

b. පෙට්ටියක ප්‍රමාණයෙන් සර්ව සම කාසි 21 ක් තිබේ. ඒවායින් 10ක් රතුවන අතරල ඉතිරි ඒවායේ එක් පැත්තක් රතුද අනෙක් පැත්ත නිල් ද වන පරිදි වේ. පෙට්ටියෙන් අහඹු ලෙස කාසියක් ගෙන උඩදැමූවිට රතු පැහැති පැත්තක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\dfrac{31}{42}$ ක් බව පෙන්වන්න.

c. කිසියම් විභාගයක් සඳහා එක්තරා පාසලක සිසුන් පිරිසක් ලබාගත් ලකුණු පහත වගුවෙන් නිරූපණය කෙරේ. මෙම සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියේ මාතය 38 නම් f සොයන්න. තවදුරටත්, මධ්‍යයනය හා සොයන්න.

ලකුණු	සිසුන් ගණන
0-10	4
10-20	2
20-30	18
30-40	$f-24$
40-50	$67-f$
50-60	19
60-70	10
70-80	4
80-90	1

15) a.

Royal college 20

$x^3+x^2 \equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x^2+x+1)$

x^3 සංගුණක සමාන කිරීම.

$1 = \underline{\underline{B}}$ $\qquad 1 = A+B+C$

$A+C=0$ —①

නියත පදය, $0 = A$

x සංගුණක. $0 = -A+B+C$

$-1 = -A+C$ —②

$2C=-1$ $\quad \underline{\underline{C=-1/2}}$ $\quad \underline{\underline{A=1/2}}$

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1x-1/2}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}_{I_1}dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx}_{\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \qquad x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$$

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}/2\,\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sec^2\theta}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

හෝ $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ බව සිහි තබා ගත යුතුය.

$$\therefore I = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + c$$

c) I

b)
$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \int \sec^2\theta \sec\theta\, d\theta = I$$

$$= \int \sec\theta \frac{d}{d\theta}[\tan\theta]d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta - \sec\theta\, d\theta$$

$$2I = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c\right]$$

$$\int\sqrt{9x^2+6x+50}\,dx = \int\frac{1}{3}\sqrt{x^2+\frac{2x}{3}+\frac{50}{9}}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{49}{9}}\,dx$$

college 2022 3rd term

$$x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\tan\theta$$
$$1 = \frac{7}{3}\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{7}{3}\sec\theta \; \frac{7}{3}\sec^2\theta \, d\theta$$
$$\frac{1}{3^3}\cdot 7^2 \int \sec^3\theta \, d\theta$$

ගෙඩ ලොගේ ආගු තලපය
මගින් ලොගෙන.

c) $$I_1 = \int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t}\,dt$$
$$I_2 = \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t}\,dt$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\sin^{-1}\sqrt{t} = u$$
$$\sin u = \sqrt{t}$$
$$\sin^2 u = t$$
$$2\sin u\cos u = \frac{dt}{du}$$
$$dt = \sin 2u\,du$$

$$I_1 = \underline{\int_0^{x} u\sin 2u\,du}$$

$$I_2 = -\int_{\pi/2}^{x} u\sin 2u\,du$$

මෙහි u සොවට v වෙනුවට
ආදේශයෙන් යොදාගනිමු.

$$\cancel{I_2 = \int^{\pi/2} u\sin 2u}$$

$$I_2 = \int_{x}^{\pi/2} u\sin 2u\,du$$
$$= \int_{x}^{0} u\sin 2u\,du + \int_0^{\pi/2} u\sin 2u$$

$$I = I_1 + I_2$$
$$I = \int_0^{x} u\sin 2u\,du - \int_0^{x} u\sin 2u + \int_0^{\pi/2} u\sin 2u$$

$$I = \underline{\int_0^{\pi/2} u\sin 2u\,du}$$

$$I = \left[-\frac{u\cos 2u}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\left[\sin 2u\right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \underline{\pi/4}$$

$\therefore \alpha = 0,$

13

13) a)

$$C = P^T P - P^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & \alpha + 1 \\ \alpha + 1 & \alpha^2 + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(C) = \alpha^2 - \alpha$$
$$= \alpha(\alpha - 1)$$

$\det(C) = 0$ විට. $\underline{\underline{\alpha = 0, 1}}$

$E = \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 2 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$EA = E$

$EA = E$ වීට $A = I$ විය යුතුයි.

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 2 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ වේ.

$\therefore x = 0$

හෝ.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 2 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2 + 2x + 1) & 3x & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore (x+1)^2 = 1$ $\quad 3x = x$

$2x = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

2 වන ක්‍රමය වඩාත් නිවැරදි වේ.

b) $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$

$$\frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{\underbrace{|z_1z_2z_3|}_{=1}} = 1$$

$$|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2| = 1$$

$$(z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2)(\bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1\bar{z}_2) = 1$$

$$= \left(3 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_2 + \bar{z}_3z_2\right) = 1$$

$$= (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 1$$

$$= |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 1$$

$$\therefore |z_1 + z_2 + z_3| = 1$$

c) $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$ මෙය සරල කරමින්. හරය හා ලවය හරයෙ ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමෙන් ආදාළ පිළිතුර ලැබේ.

$z_1 = -1 + i \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} + \frac{i(\sqrt{3} + 1)}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right] = \frac{z_1}{z_2}$$

$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ වන්නේ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

[illegible]

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \frac{1}{2^6}\left[\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right] = z_0$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \Rightarrow Re(z_0) = \frac{1}{2^6}\cos(5\pi)$$

$$\cos 5\pi = -1 \qquad \therefore Re(z_0) = \frac{-1}{2^6}$$

12

a) $r^3 = A(r-1)(r-2)(r-3) + B(r-1)(r-2) + C(r-1) + D$

r^3 සමාන

$$1 = A$$

r^2; $\quad 0 = -3A - 3A + B$

$$B = 6$$

r; $\quad 0 = 9A + 2A - 3B + C$

$$C = 7$$

$$0 = -6A + 2B - C + D$$

$$D = 1$$

$$\frac{1^3}{\lfloor 0} + \frac{2^3}{\lfloor 1} + \frac{3^3}{\lfloor 2} + \frac{4^3}{\lfloor 3} \cdots$$

$$u_r = \frac{r^3}{\lfloor r-1}$$

$$\frac{r^3}{\lfloor r-1} = \frac{A}{\lfloor r-4} + \frac{B}{\lfloor r-3} + \frac{C}{\lfloor r-2} + \frac{D}{\lfloor r-1}$$

$$u_r = \frac{1}{\lfloor r-4} + \frac{6}{\lfloor r-3} + \frac{7}{\lfloor r-2} + \frac{1}{\lfloor r-1}$$

$A = 1$, $b = 6$

$$u_4 = \frac{1}{\lfloor 0} + \frac{6}{\lfloor 1} + \frac{7}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3}$$

$$u_5 = \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{6}{\lfloor 2} + \frac{7}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4}$$

$\oplus$

$$u_4 + u_5 + \cdots u_\infty = \left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \cdots \infty\right)$$

$$+ 6\left[\frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} \cdots \infty\right)$$

$$+ 7\left[\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} \cdots \infty\right) + \left(\frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} \cdot \infty\right)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} \cdot \infty$$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3}$$

$\therefore S_{\infty} = e + 6\left[e - 1\right] + 7\left[e - 2\right]$
$\qquad + e - 5/2$

$= 15e - \frac{5}{2} - 20$

$u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 8 + \frac{27}{2}$ (+)
$= 9 + \frac{27}{2}$

$\therefore \underline{\underline{S_{\infty} = 15e}}$

b)

x		y	
m(5)	w(4)	w(5)	m(4)
3	0	3	0
0	3	0	3
2	1	2	1
1	2	1	2

$^3C_3 \cdot {}^3C_3 = 1$
$^4C_3 \cdot {}^4C_3 = 16$
$^3C_2\, {}^4C_1\, {}^3C_2\, {}^4C_1 = 16 \times 9$
$^3C_1\, {}^4C_2\, {}^3C_1\, {}^4C_2 = 36 \times 9$

මුළු ආකාර $= 1 + 16 + 16 \times 9 + 36 \times 9$
$= 1 + 160 + 324$
$= \underline{485}$

14

4)
a) $f(x) = \frac{x(3x-2)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{(x+1)^2\left[6x-2\right] - (3x^2-2x)\left(2(x+1)\right)}{(x+1)^4}$

$= \frac{(6x-2)(x+1) - 2(x+1)(3x^2-2x)}{(x+1)^3}$

$= \frac{8x-2}{(x+1)^3} = \frac{2(4x-1)}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0,$

$x = -1$ (−) $x = 1/4$ (+)
f(x) අඩුවේ. f(x) වැඩිවේ

f(x) අවම, $x = 1/4$ අ.ම $= \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right]$
$f(x) = y$
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය

a) $+\infty \quad y = -1 \quad +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} y = \frac{3 - 2/x}{1 + \frac{2}{x} + 1/x^2}$

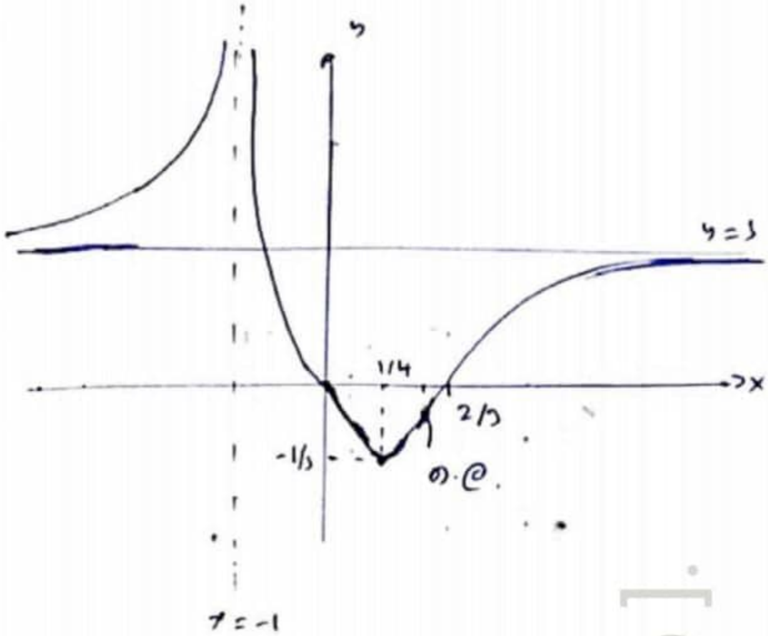
$x \to \pm\infty \quad y \to 3$

$f''(x) = 0, \quad 14 = 16x \quad x = 7/8$

(+) $x = 7/8$ (−) වක්‍රතාව
උත්තල

$x=0,\ y=0$

$y=0,\ x=0,\ 2/3$



b) $4 5\pi = \pi x^2 y - \frac{2}{3}\pi x^3$

$\frac{135 + 2x^3}{3x^2} = y$ — ①

$S = 2\pi x y + 2\pi x^2$

$= 2\pi x\left[\frac{135+2x^3}{3x^2}\right] + 2\pi x^2$

$S = \frac{90\pi}{x} + \frac{10\pi x^2}{3}$

$\frac{dS}{dx} = -\frac{90\pi}{x^2} + \frac{20\pi x}{3}$

$\frac{dS}{dx} = \frac{-270\pi + 20\pi x^3}{3x^2}$

$\frac{dS}{dx} = 0 \qquad 2\cancel{0}x^3 = 27\cancel{0}$

$x^3 = \frac{27}{2},\ x = \frac{3}{2^{1/3}}$

$\overline{\quad ① \quad}$

$(-)\quad x = 3/2^{1/3}\ (+)$

11 a) $f(x) \equiv p x^2 + q x + r$

~~f(x) = 0~~ $f(x) = 0$, මූල α, β නම්.

$\alpha + \beta = -\frac{q}{p} \qquad \alpha\beta = r/p$

$(\alpha+\beta)^2 = \left(\frac{q^2}{p^2}\right) \qquad (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{q^2 - 4pr}{p^2}$

$(\alpha-\beta)^2 = \frac{q^2-4pr}{p^2},\ (\alpha-\beta) = \pm\frac{\sqrt{q^2-4pr}}{p}$

මූල තාත්වික වේ. $q^2 - 4pr \geq 0$ විය යුතුය.

$\therefore \Delta \geq 0$ වේ.

$G(x) \equiv x^3 + 3kx^2 + (k^2 - 3k - 1)x - k^2$

$G(1) = 1 + 3k + k^2 - 3k - 1 - k^2$

$G(1) = 0 \quad \therefore$ 1 මූලයකි.

$G(x) = (x-1)\left(x^2 + (1+3k)x + k^2\right)$

$\underline{a = 1} \quad b = \underline{(3k+1)} \quad c = \underline{k^2}$

$x^2 + (1+3k)x + k^2 = 0$

$\left(x + \frac{1+3k}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[5k^2 + 6k + 1\right] = 0$

තාත්වික මූල 3ක් පැවතීමට.

$\Delta \geq 0$ විය යුතුයි. $x = 1$ දැනටමත් එක් මූලයකි.

$(3k+1)^2 - 4k^2 \geq 0$

$9k^2 + 6k + 1 - 4k^2 \geq 0 \qquad 5k^2 + 6k + 1 \geq 0$

$\left[\left(k + \frac{3}{5}\right) - \frac{2}{5}\right]\left[\left(k + \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{5}\right] \geq 0$

(+) $k = -1/5$ (−) $k = 1/5$ (+)

මූල α, β නම්. $x = 1$ වන මූලයකි.

∴ දෙවන වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම -ඝෘණ විය යුතුයි.

$\alpha + \beta = -(1+3k)$

$\alpha\beta = k^2 \qquad (\alpha\beta > 0) \qquad \underline{k > 0}$

$\alpha + \beta < 0 \qquad -(1+3k) < 0$

$3k + 1 > 0$

$\underline{k > -1/3}$

b) $H(x) = \phi(x)(x - \alpha) + R$

$H(\alpha) = 0 + R \qquad R = H(\alpha)$

R යනු ශේෂයයි.

$I(x) = ax^4 + bx^3 + 62x^2 + bx + a \; ; (a, b) \in \mathbb{R}$

~~$I(x) = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 6x + x + 6$~~

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$I(2) = 0, \quad 0 = 2^4 a + 2^3 b + 62 \cdot 2^2 + 2b + a$

$-248 = 17a + 10b$ — ①

$I(3) = 0$

$0 = 3^4 a + 3^3 b + 62 \cdot 3^2 + 3b + a$

$-558 = 82a + 30b$ — ②

$186 = 82a - 51a, \quad \underline{a = 6} \quad b = \underline{-35}$

$$I\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x^4} - \frac{35}{x^3} + \frac{62}{x^2} - \frac{35}{x} + 6$$

$$I\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0, \quad \frac{6 - 35x + 62x^2 - 35x^3 + 6x^4}{x^4} \geq 0$$

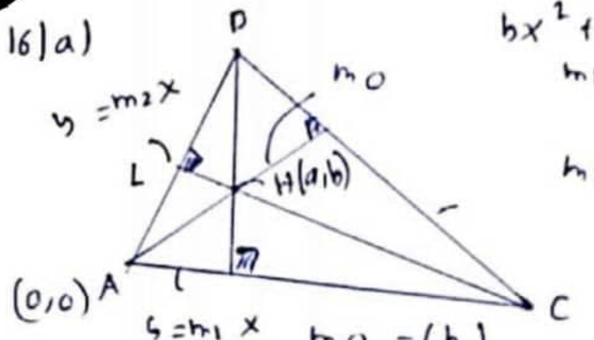
$$\frac{6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6}{x^4} \geq 0$$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)}{x^4} \geq 0$$

16

මෙයින් x හි අගය පරාසය ලැබේ.

16) a)



$$bx^2 + 2hx + a = 0$$

$$m_1 m_2 = \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$$

$y = m_1 x$ $\quad m_D = \left(\frac{b}{a}\right)$

m_a

$$m_{DC} = -\frac{a}{b}$$

$m_{LC} = -\frac{1}{m_2}$ $\quad$ LC හි සමීකරණය

$$(y - b) = -\frac{1}{m_2}(x - a)$$

$$ym_2 + x - m_2 b - a = 0$$

C හි ඡේදනය ගෙන

$$m_1 m_2 x + x = m_2 b + a$$

$$\frac{(a+b)}{b}x = (m_2 b + a)$$

$$x = \frac{b(m_2 b + a)}{(a+b)} \qquad y = \frac{m_1 b(m_2 b + a)}{a+b}$$

$$y = \frac{b(a + m_1 a)}{(a+b)}$$

DC හි සමීකරණය

$$y - \frac{b(m_1 a + a)}{a+b} = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{b(m_2 b + a)}{a+b}\right)$$

$$(a+b)yb - b^2(m_1 a + a) = -ax(a+b) + ab(m_2 b + a)$$

$$(a+b)yb + ax(a+b) = m_2 ab^2 + m_1 ab^2 + a^2 b + ab^2$$

$$(a+b)yb + ax(a+b) = ab\left[-\frac{2h}{b}\right] + a^2 b + ab^2$$

$$(a+b)[yb + ax] = ab[a + b - 2h]$$

b) $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ නම් ප්‍රලම්භ වේ.

$S' = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ලෙස ගනිමු

$0 = 0 + 1 - 2f + c = 0$

$c - 2f = -1$ — (1) $\underline{\underline{c = -5}}$

$y - 2 = 0$ $(-g, -f)$ හරහා යයි.

$\therefore$ $-f - 2 = 0$ $\underline{\underline{f = -2}}$

ප්‍රලම්භ නිසා

$2g\left(-\frac{3}{2}\right) + 2f(3) = -2 + c$

$-3g - 12 = -2 + c$

$-3g = 10 + c$

$g = \underline{\underline{-5/3}}$

$S' = x^2 + y^2 - \frac{10x}{3} - 4y - 5 = 0$

$x^2 + y^2 = 5$

$S' - S = -\frac{10x}{3} - 4y - 5 + 5 = 0$

$S' - S = -\frac{10x}{3} - 4y = 0$

මෙය 0,0 හරහා යයි. ∴ S' මගින්

S_0 හි පරිධිය සමච්ඡේදනය වේ.

17

a) $T(x) = \sin^2 x - 24\sin x\cos x + k\cos^2 x$

$= \frac{1 - \cos 2x}{2} - 12\sin 2x + k\left[\frac{1 + \cos 2x}{2}\right]$

$T(x) = \frac{k+1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}(k-1) - 12\sin 2x$

$T(x) = \frac{k+1}{2} + A\left[\cos 2x\cos\alpha - \sin\alpha\sin 2x\right]$

$A = \sqrt{\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + (12)^2}$

$\left[T(x) - \left(\frac{k+1}{2}\right)\right]\frac{1}{A} = \cos(2x + \alpha)$

$-1 \le \left[T(x) - \left(\frac{k+1}{2}\right)\right]\frac{1}{A} \le 1$

$-A + \frac{k+1}{2} \le T(x) \le A + \left(\frac{k+1}{2}\right)$

$T_{min} = -7$ $T_{max} = 19$

$-7 = \frac{k+1}{2} - A$ — (1) $19 = A + \left(\frac{k+1}{2}\right)$ — (2)

(1)+(2), $12 = k + 1$, $\underline{\underline{k = 11}}$

$\underline{\underline{A = 13}}$

$T(x)_{min} = -7$

$-7 = 6 + 13\cos(2x + \alpha)$

$\cos(2x + \alpha) = -1$ $2x + \alpha = \pi$

$2x = \pi + \alpha$

$x = \frac{\pi + \alpha}{2}$ — (1)

$T(x)_{max} = 19$ $\quad \cos(2x+\alpha) = 1$ $\quad x = 0,$

$2x + \alpha = 0,$ $\quad T(0) = 6 + 13\cos\alpha$

$x = -\alpha/2$ $\quad = 6 + 13 \cdot \frac{5}{13}$

$= 11$

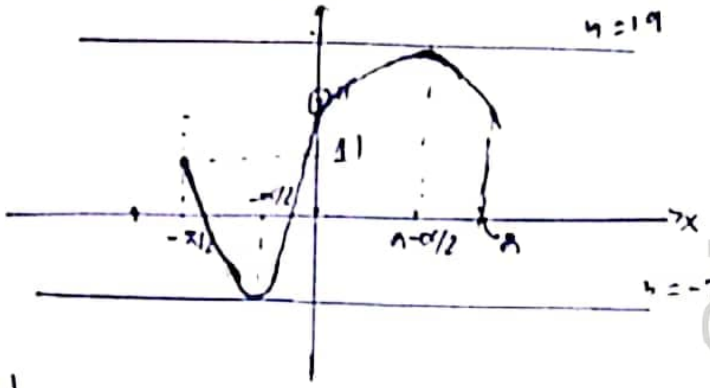
$x = -\pi/2$.

$T(x) = 6 + 13\cos\left(\alpha - \pi\right)$

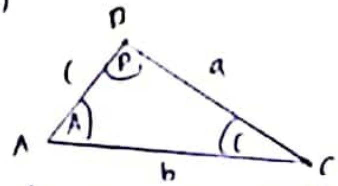
$T(x) = 6 + 13\cos\left(-(\pi - \alpha)\right)$

$= 6 - 13\cos\alpha$

$= 6 - 13\left(\frac{5}{13}\right) = \underline{1}$



b)



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා
පහත ප්‍රකාශය සාධනය.

$$\left[\cot\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{B}{2}\right)\right]\left[a\sin^2\left(\frac{B}{2}\right) + b\sin^2(A/2)\right]$$

$a = 7\sin A \qquad b = 7\sin B$

$$L.H.S = \cos\left[\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sin(A/2)\sin(B/2)}\right]\left[a\sin^2 B/2 + b\sin^2(A/2)\right]$$

$A + B + C = \pi$

$\frac{A+B}{2} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

$\sin(A+B) = \cos(C/2)$

$$L.H.S = \frac{\cos(C/2)}{\sin(A/2)\sin(B/2)}\left[7\sin A\sin^2(B/2) + 7\sin B\sin^2 A/2\right]$$

$$= \frac{7\sin A\cos(C/2)\sin^2(B/2) + 7\sin B\sin^2(A/2)\cos(C/2)}{\sin(A/2)\sin(B/2)}$$

$$= \frac{7\left[\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) + \sin\frac{B-C}{2}\right]\sin A\sin B/2 + 7\left[\sin\left(\frac{A+C}{2}\right) + \sin\left(\frac{A-C}{2}\right)\right] \cdot \sin B\cos\sin A/2}{2\sin A/2\sin B/2}$$

$$= 7\sin C \cdot \frac{\cos(C/2)}{\sin(C/2)} = c\cot\underline{\underline{(C/2)}}$$

c) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$A \to \left(\frac{\pi}{2}-A\right)$, $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$A = \frac{\pi}{3}$, $B = \pi/4$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{3}-1)\sin 2x + (\sqrt{3}+1)\cos 2x - 2 = 0$$

$$\cancel{\sin 2x + \cos 2x - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = 0}$$

$$2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos 2x\right] - 2 = 0$$

$\cancel{2\sqrt{2}\,\sin(2}$

$$2\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = 2$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x - \frac{\pi}{12} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$n = 1$

$$x = \pi + \frac{\pi}{6}, \ \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{6}, \ \frac{5\pi}{6}$$

$n = 0$, $x = \frac{\pi}{6}, -\pi/6$

$n = 2$, $x = \frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ← [illegible]

∴ විසඳුම් $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

13

13)

$T = \frac{\lambda x}{a}$ වේ.

$mg = \frac{2mg x}{a}$

$x = a/2$

විතතිය $a/2$

$2m \uparrow u$, m

ග.ස.නි.

$\uparrow \; 2mu = 3mv$

$v = \frac{2u}{3}$

$\downarrow F = ma$

$3mg - T = \cancel{\frac{2mgx}{a}}\; 3m\ddot{x}$

$3mg - \frac{2mgx}{a} = 3m\ddot{x}$

$-\frac{2g}{3a}\left(x - \frac{3a}{2}\right) = \ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{2g}{3a}\left(x - \frac{3a}{2}\right) = 0$

$w = \sqrt{\frac{2g}{3a}}$

$x = \frac{3a}{2} + c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$

$\dot{x} = -c_1 w \sin wt + c_2 w \cos wt$

$x = a/2$ වට $t = 0$

$\frac{a}{2} - \frac{3a}{2} = c_1 = -a$

$t = 0$ වට $\dot{x} = \frac{2u}{3}$

$\therefore \; \frac{2u}{3} = c_2 w \qquad c_2 = \frac{2u}{3} \cdot \sqrt{\frac{3a}{2g}}$

$c_2 = \sqrt{\frac{2a}{3g}}\, u$

$t = t$ වට ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවේ.

$x = 0 \qquad 0 = \frac{3a}{2} - a\cos wt + 2\sqrt{2}a \sin wt$

$\frac{3a}{2} = \cos wt - 2\sqrt{2} \sin wt$

$\frac{3a}{2} = 3\left[\frac{1}{3}\cos wt - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin wt\right]$

$\frac{1}{2} = \cos(wt + \alpha)$

$wt + \alpha = \frac{\pi}{3}$

$t = \left[\frac{\pi}{3} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{3a}{2g}}$

$\dot{x}^2 = w^2\left[A^2 - \left(x - \frac{3a}{2}\right)^2\right]$

$x = a/2$

$\dot{x}^2 = \frac{8ga}{3} \times 2$

$2 \times \frac{8ga}{3} = \frac{2g}{3a}\left(A^2 - a^2\right) \qquad A = 3a$

$x = 0$ වන විට $\dot{x} = v_0$

$$v_0^2 = \frac{2g}{3a}\left(9a^2 - \frac{9a^2}{4}\right)$$

$$v_0^2 = \frac{3 \cdot 9a^2 \cdot 2g}{4 \cdot 3a}$$

$$v_0^2 = \frac{9ag}{2}, \quad v_0 = 3\sqrt{\frac{ga}{2}}$$

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$

$$v^2 = \frac{9ga}{2} - 2ga$$

$$v^2 = \frac{5ga}{2}$$

$\uparrow v = u + at$

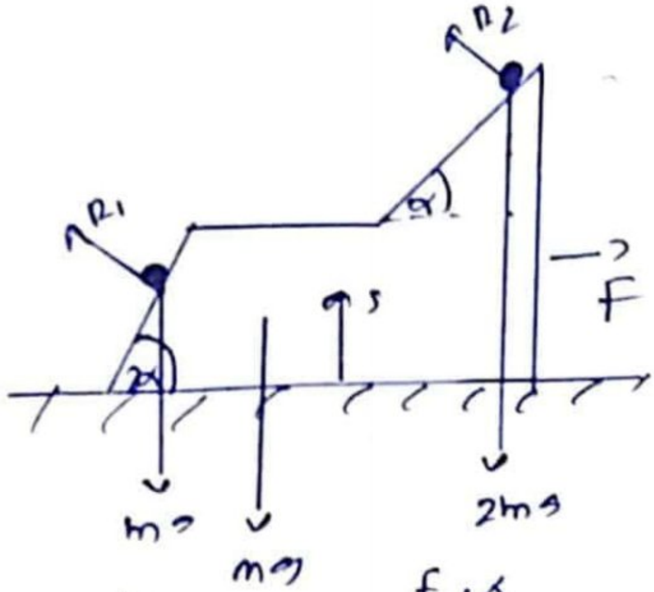
$$\sqrt{\frac{5}{2}ga} = 3\sqrt{\frac{ga}{2}} + gt$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g}}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

Scanned with CamScanner

12

12)



$a_{m,E} = \vec{F}$ $\qquad a_{m,m} = f$ (2α)

$a_{2m,m} = f_0$ (α)

$a_{m,E} = f$ (2α) $+ \vec{F}$

$a_{2m,E} = f^0$ (α) $+ \vec{F}$

පද්ධතියට $\vec{F} = ma$

$0 = mF + m[F - f\cos 2\alpha] + 2m[F - f^0\cos\alpha]$ — ①

m ට $F = ma$ ↙

$mg\sin 2\alpha = m[f - F\cos 2\alpha]$ — ②

2m ට ↙ $F = ma$

$2mg\sin\alpha = 2m[f^0 - F\cos\alpha]$ — ③

$f = g\sin 2\alpha + F\cos 2\alpha$

$f^0 = g\sin\alpha + F\cos\alpha$

① → $0 = F[m + 3m] - m\cos 2\alpha[g\sin 2\alpha + F\cos 2\alpha] - 2m\cos\alpha[g\sin\alpha + F\cos\alpha]$

$F[m + 3m - m\cos^2 2\alpha - 2m\cos^2\alpha] - mg\sin 2\alpha\cos 2\alpha - 2mg\sin\alpha\cos\alpha = 0$

Scanned with CamScanner

$3 \cancel{M}\ 5m = 2m + m$ ගේ .

$$\therefore f = \frac{2mg\sin\alpha\cos\alpha + mg\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{M + m\sin^2 2\alpha + 2m\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2mg\sin\alpha\cos\alpha + 2mg\sin\alpha\cos\alpha[2\cos^2\alpha - 1]}{M + m\sin^2 2\alpha + 2m\sin^2\alpha}$$

$$f = \frac{4mg\cos^3\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2 2\alpha + 2m\sin^2\alpha}$$

P ට ↙ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ABCDEF ට යෙදීමෙන්.

$$a = \frac{1}{2}ft^2$$

Q ට ↓ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ මගින්

$$a = \frac{1}{2}f_0 t^2$$

$$\therefore \underline{\underline{f = f_0}}$$

$\alpha = 30°$ ට.

$$F = \frac{4mg\,\frac{3\sqrt{3}}{4\times 2}\,\frac{1}{2}}{M + \frac{m3}{4} + \frac{2m}{4}}$$

$$f = \frac{3\sqrt{3}mg}{M + 5m/4} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}mg}{5m + 4M}}}$$

$$f_0 = g\sin\alpha + F\cos\alpha$$

$$= \frac{g}{2} + \frac{3\sqrt{3}mg}{5m+4M}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{g}{2} + \frac{9mg}{(5m+4M)2} = \frac{g}{2}\left[\frac{5m+4M+9m}{5m+4M}\right]$$

$$= \frac{g}{2}\left[\frac{4M+14m}{5m+4M}\right]$$

$$F = \frac{\sqrt{3}g}{2} + \frac{3\sqrt{3}mg}{5m+4M}\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}g}{2}\left[\frac{5m+4M+3m}{5m+4M}\right] = \frac{\sqrt{3}g}{2}\left[\frac{4M+8m}{5m+4M}\right]$$

$f = f_0$

$$\sqrt{3}\left[\cancel{4M+14m}\right] =$$

$$\sqrt{3}(4M+8m) = 4M + 14m$$

$$\sqrt{3}(2M+4m) = 2M + 7m$$

$$M(2\sqrt{3}-2) = m(7-4\sqrt{3})$$

$$\underline{\underline{M = \frac{m(7-4\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}}} = \frac{m(3\sqrt{3}-5)}{4}$$

Scanned with CamScanner

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යොදා ගත හැකිය.

$$a = \frac{1}{2} f_0' t^2$$

$$\sqrt{\frac{2a}{f_0}} = t \quad \because (t > 0)$$

f_0 හි අගය $\dfrac{m(7-4\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}$ ආදේශයෙන්.

$$f_0 = \frac{(\sqrt{3}+1)g}{2} \text{ වේ.}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{(\sqrt{3}+1)g}}$$

යොදමු $\rightarrow$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$x = \frac{1}{2}Ft^2$$

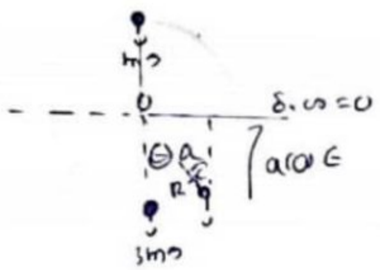
$$F = \frac{3\sqrt{3}mg}{5m+4m} \qquad 5m+4m = 5m + m(3\sqrt{3}-5) = 3\sqrt{3}m$$

$$F = g - ⓧ$$

$$x = \frac{1}{2}g \cdot \frac{4a}{(\sqrt{3}+1)g} \qquad x = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}$$

මෙම කාලය තුළ අංශුවෙහි ගිය තිරස් දුර $2S$ වන බව ලබාගනිමු. $(12, a, b)$

b)



ශ. සං. නි.

$$mga - 3mga + \frac{1}{2}m(5ag) = -3mga + \frac{1}{2}mv^2$$

$$ga + \frac{5ga}{2} = \frac{v^2}{2} \qquad v^2 = 7ga$$
$$v = \sqrt{7ga}$$

ර. ව. නි. $\rightarrow$ $mv = mv_1 + 3mv_2$

නි. ප. නි. $\quad v_2 - v_1 = -e[0 - v]$

$$v_2 - v_1 = \frac{v}{3}$$
$$3v_2 - 3v_1 = v$$

$$\underline{v_1 = 0} \qquad v_1 = \underline{v/3}$$

ශ. සං. නි.

$$-3mga + \frac{1}{2}3mv_2^2 = -3mga\cos\epsilon + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0^2 = v_2^2 - 2ga(1 - \cos\epsilon)$$

Scanned with CamScanner

ඉහළම උසේදී $v = 0$

$$\therefore \quad v_2^2 = 2ga(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{7ga}{9} = 2ga(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{7}{18} = 1 - \cos\theta, \quad \cos\theta = 1 - \frac{7}{18}$$

$$\cos\theta = \frac{11}{18}$$

ඉහළම උස $= a - \dfrac{11a}{18}$

$$= \frac{7a}{18}$$

$\overset{0}{\leftarrow}$ m $\quad$ $\overset{v_2}{\leftarrow}$ $3m$ $\qquad$ $\overset{v_3}{\leftarrow}$ m $\quad$ $\overset{v_4}{\leftarrow}$ $3m$

ග.ස.නි.

$$-3mv_2 = -mv_3 - 3mv_4$$

$$3v_2 = v_3 + 3v_4$$

නි.ප.නි. $\quad -v_4 + v_3 = -e[-v_2 - 0]$

$$v_3 - v_4 = \frac{v_2}{3}$$

$$3v_3 - 3v_4 = v_2$$

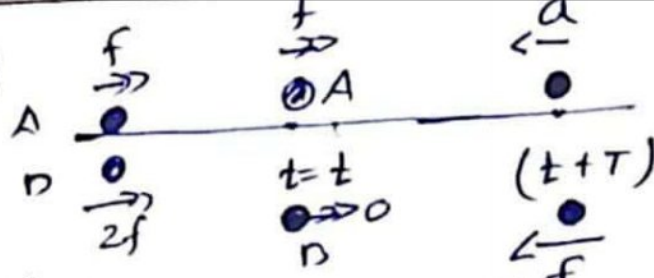
$$4v_2 = 4v_3 \qquad \underline{\underline{v_2 = v_3}}$$

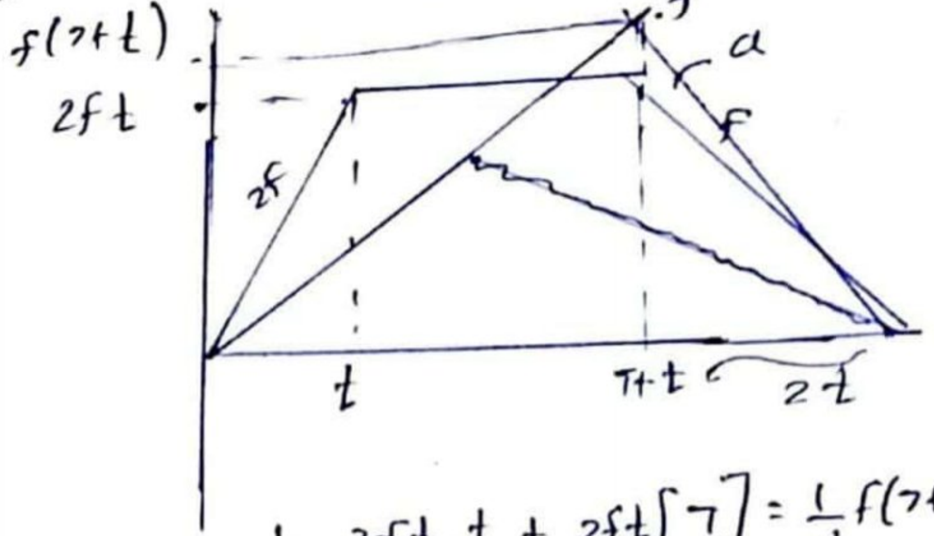
$$v_3 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7ga}}{3}}} \qquad v_4 = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{7ga}}{3}}}$$

Scanned with CamScanner

11

11) a)





$$\frac{1}{2}\cdot 2ft\cdot t + 2ft[T] = \frac{1}{2}f(T+t)^2$$

$$T^2 - 2Tt - t^2 = 0$$

$$(T-t)^2 - 2t^2 = 0$$

$$(T-t) = \pm\sqrt{2}\,t$$

$$T = t \pm \sqrt{2}\,t$$

$$T > 0 \;\therefore\; T = t(1+\sqrt{2})$$

ගැටෙන $= 3t + T$

$$= 3t + t + \sqrt{2}\,t$$

$$= t[\sqrt{2} + 4]$$

$$\frac{1}{2}\times 2t\; 2ft = \frac{1}{2}f(T+t)\frac{f(T+t)}{a}$$

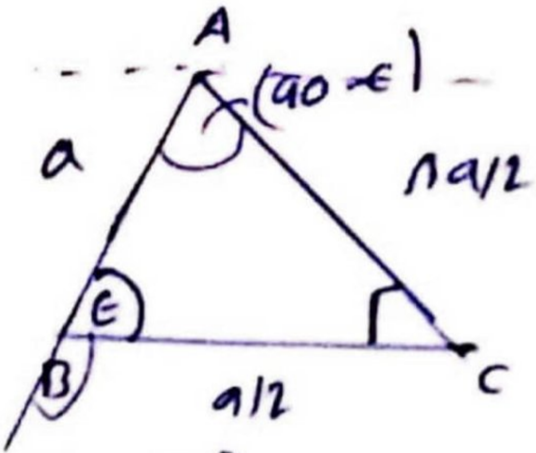
$$\cancel{4t^2}\; a = \frac{(T^2 + 2Tt + t^2)f}{4t^2}$$

$$a = \left[\frac{t^2(1+\sqrt{2})^2 + 2t[1+\sqrt{2}]t + t^2}{4t^2}\right]f$$

$$a = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)f$$

PARCOSE =

b)



$v_{wE} = \vec{u}$ $\quad$ $v_{pw} = \sqrt{2}u$

$v_{pE} = \vec{u} + \sqrt{2}u$

Scanned with CamScanner

PR_2 SAR

$PR_2 + u\cos E = \sqrt{2u^2 - (u\sin 6)^2}$

$PR_1 = \sqrt{2u^2 - \frac{3u^2}{4}} - \frac{u}{2}$

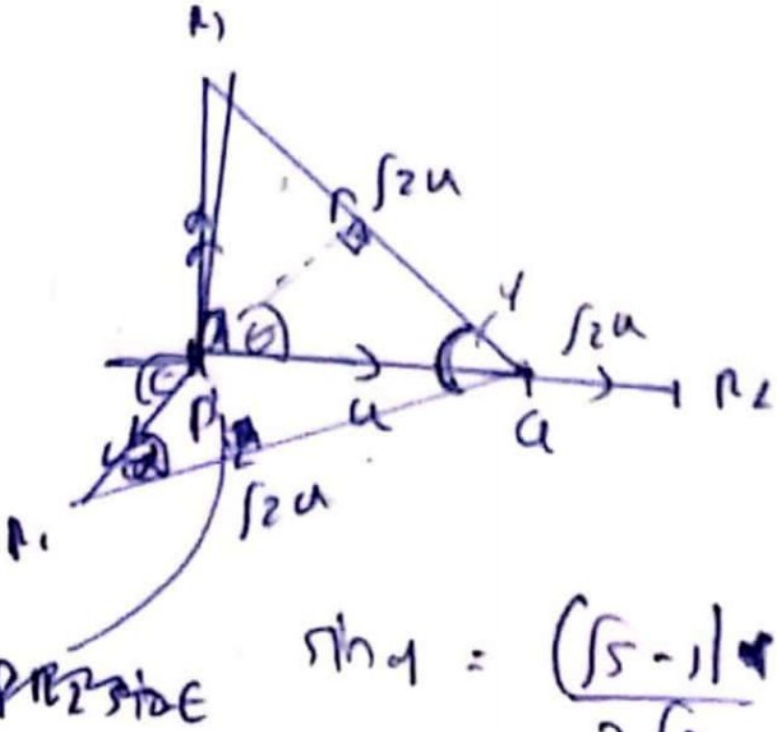
$PR_2 = \frac{\sqrt{5}u - u}{2}$

$PR_3 = u$

$T = \frac{a \cdot 2}{u(\sqrt{5}-1)} + \frac{a}{2(\sqrt{2}+1)u} + \frac{\sqrt{3}a}{2u}$

$= \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+1)a}{2\cancel{4}u} + \frac{(\sqrt{2}-1)a}{2u} + \frac{\sqrt{3}a}{2u}$

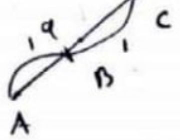
$T = \left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right]\frac{a}{u}$



$\sin\alpha = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}}$

14

14)



$\vec{AD} = (\underline{b} - \underline{a})$

$\vec{BC} = \alpha a + \beta b - b$

$= \alpha a + b(\beta - 1) \leftarrow (-\alpha)$

$= \alpha a - b\alpha$

$\vec{BC} = \alpha(a - b)$

∴ AB හා BC රේඛාව සමාන්තර වේ.

∴ ABC ඒක රේඛීය වේ.

$\vec{AC} = \alpha a + \beta b - a$

$= \beta b + a(\alpha - 1)$

$\vec{AC} = \beta(b - a)$

$\vec{CD} = b - (\alpha a + \beta b)$

$= \alpha(b - a)$

∴ $AC : CD = \beta : \alpha$ වේ.

$\vec{OP} = \frac{a}{2}$

$\vec{AQ} = \frac{\beta(b-a)}{2}$

$\vec{OQ} = \frac{\beta(b-a)}{2} + \underline{a}$

$= \frac{\beta(b-a) + 2a}{2}$

$\vec{PQ} = \frac{\beta(b-a)+2a}{2} - \frac{a}{2}$

$\vec{PQ} = \frac{\beta(b-a)+a}{2} = 2a + 7b$

$\underline{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} - 2\right] = 0, \quad \underline{b}\left(\frac{\beta}{2} - 7\right) = 0$

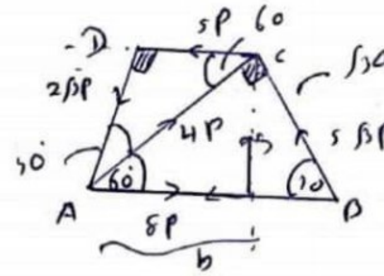
$\beta = 14$

$\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} - 2 = 0$

$\beta \neq -3 \quad \because (\alpha, \beta > 0)$

$\therefore \alpha =$

b)



$AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\vec{X} = 8P + 4P\cos 60 - 5\sqrt{3}P\cos 30 + 2\sqrt{3}P$
$- 5P$

$= 10P - \frac{15P}{2} - 5P = -\frac{5P}{2}$

$\uparrow = 5\sqrt{3}P\sin 30 + 4P\sin 60 - 2\sqrt{3}P$

$= \frac{5\sqrt{3}P}{2} + \frac{4P\cdot\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}P$

$\uparrow = \frac{5\sqrt{3}P}{2}$

$R = \frac{P}{2}\sqrt{25 + 75}$

$R = 5P$

$\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}P}{2} \cdot \frac{2}{5P}$

$\tan\alpha = \sqrt{3} \quad \alpha = 60°$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

14) α හා β>0 බව දී ඇත

මෙහි α, β හි එකතුව 1 වන පරිදි

α, βට ධන අගයන් සොයන.

$a = i + 2j \quad b = 3i - j$

$O\hat{A}D = \theta$

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = |AO|\,|AD| \cos\theta$

$(-i - 2j)(2i - 3j) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cos\theta$

$-2 + 6 = \sqrt{13}\sqrt{5} \cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$

Scanned with CamScanner

ii) $\overset{\frown}{A}$ වටා ඝූර්ණය = $\overset{\frown}{A}$ වටා සම්ප්‍රයුක්තය

$$\frac{5\sqrt{5}p}{2}\cdot 2a + \frac{5p\cdot\sqrt{5}a}{2} = \frac{5\sqrt{5}p}{2}\cdot b$$

$$2a + a = b$$

$$\underline{b = 3a}$$

iii) $R_y = \frac{9\sqrt{5}p}{2}$

$$R = \frac{p}{2}\sqrt{25 + 243}$$

$$R = \underline{\underline{\frac{\sqrt{268}\,p}{2}}}$$

සම්ප්‍රයුක්තය ජවය ක්‍රියාකරන O සිට $= x$ ලෙස ගනිමු.

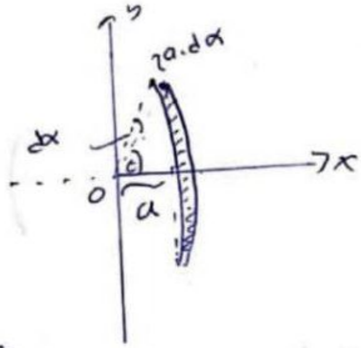
$$\frac{5\sqrt{5}p}{2}\cdot 2a + \frac{5\sqrt{5}p\cdot a}{2} = \frac{9\sqrt{5}p}{2}\cdot x$$

$$10a + 5a = 9x$$

$$15a = 9x, \quad x = \underline{\underline{\frac{5a}{3}}}$$

16

c)



$$w = \int_{\varepsilon}^{\pi} 2\pi a_0 \sin\alpha \, a_0 \, d\alpha \, p$$ ← මෙහි a_0 යනු අරයයි.

$$= 2\pi a_0^2 p \left[-\cos\alpha\right]_{\varepsilon}^{\pi}$$

$$= 2\pi a_0^2 p \left[1 + \cos\varepsilon\right]$$

$$= 2\pi a_0^2 p \left[1 + \underline{\underline{a}}\right] \leftarrow a_0 = 1 \quad \therefore w = \underline{\underline{2\pi(a+1)p}}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{\varepsilon}^{\pi} 2\pi a_0^2 \sin\alpha\cos\alpha \, a_0 \, d\alpha \, p}{\int_{\varepsilon}^{\pi} 2\pi a_0^2 \sin\alpha \, d\alpha \, p}$$

$$= \frac{a}{2}\frac{\left[\sin^2\alpha\right]_{\varepsilon}^{\pi}}{\left[-\cos\alpha\right]_{\varepsilon}^{\pi}} = \frac{a}{2}\left[\frac{-\sin^2\varepsilon}{(a+1)}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2}\,\frac{-(1-a^2)}{(a+1)}$$

$$\bar{x} = \underline{\underline{-\left(\frac{1-a}{2}\right)}}$$

ඉතිරි කොටසේ බර $= w_L$

$$w_L = 4\pi p - \left(2\pi(a+1)p\right)$$

$$= 2\pi(1-a)p \,//$$

Scanned with CamScanner

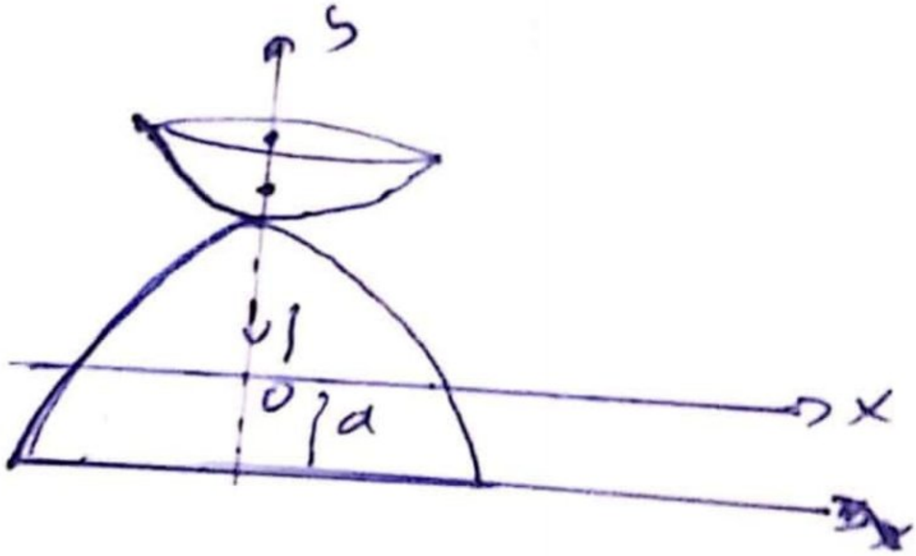
?

a. $\bar{x}_2 = \dfrac{4\pi\rho(0) + 2\pi(a+1)\left[\frac{1-a}{2}\right]}{4\pi\rho - 2\pi(a+1)\rho}$

$\bar{x}_2 = \dfrac{(a+1)(1-a)}{2\pi(1-a)}$

$\bar{x}_2 = \dfrac{a+1}{2}$

1



$\bar{y} = 0$

Scanned with CamScanner

වස්තුව	බර	x ඛණ්ඩාංක (5)
	$2\pi(a+1)\rho$	$\left(\frac{1-a}{2}\right)$
	$2\pi(1-a)\rho$	$1+\frac{1-a}{2}=\left(\frac{3-a}{2}\right)$
	$\pi(1-a^2)\rho$	$-a$

Scanned with CamScanner

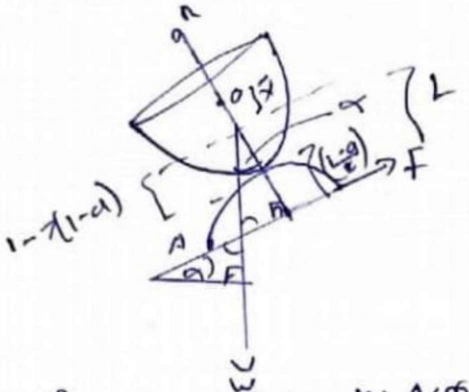
$$\bar{y} = \frac{2\pi(a+1)\rho\left(\frac{1-a}{2}\right) + 2\pi(1-a)\rho\left(\frac{3-a}{2}\right) + \pi(1-a^2)\rho(-a)}{2\pi(a+1)\rho + 2\pi(1-a)\rho + \pi(1-a^2)\rho}$$

$$= \frac{(1-a^2) + 3 - 4a + \cancel{a^2} + a + a^3}{2a+2+2-2a+1-a^2}$$

$$\bar{y} = \frac{4 - 5a + a^3}{5-a^2} = 4 - 5a + a^3$$

$$\bar{y} = \frac{(1-a)(-a^2-a+4)}{5-a^2}$$

$$\bar{y} = \frac{(1-a)(4-a-a^2)}{5-a^2} = \lambda(1-a)$$



පෙරළීමට ආසන්න විට W A හරහා යයි

ගනිමු.

$$\therefore \tan\alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{L}$$

$$= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-\lambda(1-a)+\left(\frac{1-a}{2}\right)}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2-\lambda+a(\lambda-1)} \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{2-\lambda+a(\lambda-1)}$$

$$R = W\cos\alpha \qquad \frac{F}{R} = \mu$$

$$F = W\sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \mu$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1-1/4}}{2-\lambda+1/2(\lambda-1)} = \frac{\sqrt{3}}{(3-\lambda)} = \mu$$

$$\lambda = \frac{4-1/2-1/4}{5-1/4}$$

$$= \frac{16-2-1}{19} = \frac{13}{19}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{44/19} = \frac{19\sqrt{3}}{44}$$

Scanned with CamScanner

17)

17

a) $P\left(\frac{A}{D}\right) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)}$

$P(D/A) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)} \rightarrow P(A\cap D) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = 1/8$

$P(A\cap D) \neq 0$ ∴ අ.ඛ. නොවේ.

ii) $P(D) = \frac{1}{8}\times 4 = \frac{1}{2}$

$P(A).P(D) = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A\cap D)$

∴ A හා D ස්වායත්ත වේ.

iii) $P\left(\frac{A'}{D}\right) = \frac{P(A'\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D) - P(A\cap D)}{P(D)}$

$= 1 - P\left(\frac{A}{D}\right)$

$= 1 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{3/4}}$

iv) $P(A'/D') = \frac{P(A'\cap D')}{P(D')} = \frac{P(A\cup D)'}{P(D')}$

$= \frac{P(A) + P(D) - P(A\cap D)}{1 - P(D)}$

$= \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)}{1 - 1/2}$

$= \frac{1 - 5/8}{1/2}$

$= \underline{\underline{3/4}}$

b)

R - 10
R/B - 11
21

රතු ලැබෙන සම්භාවිතාව $= \frac{10}{21} + \frac{11}{21}\times\frac{1}{2}$

$= \underline{\underline{\frac{31}{42}}}$

c)

ලකුණු	f_i	x_i	$f_i x_i$
0-10	4	5	20
10-20	2	15	30
20-30	18	25	450
30-40	f-24	35	770
40-50	67-f	45	945
50-60	19	55	1045
60-70	10	65	650
70-80	4	75	300
80-90	1	85	85

Scanned with CamScanner

$$mo: 38 = 30 + 10\left[\frac{f-24-18}{f-24-18+f-24-67+f}\right]$$

$$8 = 10\left[\frac{f-42}{3f-133}\right]$$

$$4[3f-133] = 5f - 42\times 5$$

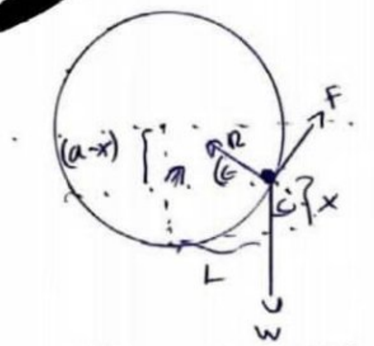
$$7f = 133\times 4 - 42\times 5$$

$$\underline{f = 46}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{4295}{101}$$

$$= \underline{42.524}$$

15



$$L = a^2-(a-x)^2$$
$$= a^2-[a^2-2ax+x^2]$$
$$= \sqrt{2ax-x^2}$$

~~~~ R sin θ $\quad R = W\cos\theta$

$$F = W\sin\theta$$

$$\frac{F}{R} = \tan\theta \qquad \frac{F}{R} \le \mu$$

$$\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} \le \frac{1}{3}$$

$$3a-3x \le \sqrt{2ax-x^2}$$

$$9(a^2-2ax+x^2) \le 2ax-x^2$$

$$10x^2 - 20ax + 9a^2 \ge 0$$

$$x^2 - 2ax + \frac{9a^2}{10} \ge 0$$

$$(x-a)^2 - \frac{a^2}{10} \ge 0$$

$$\left[(x-a)-\frac{3a}{\sqrt{10}}\right]\left[(x-a)+\frac{3a}{\sqrt{10}}\right] \ge 0$$

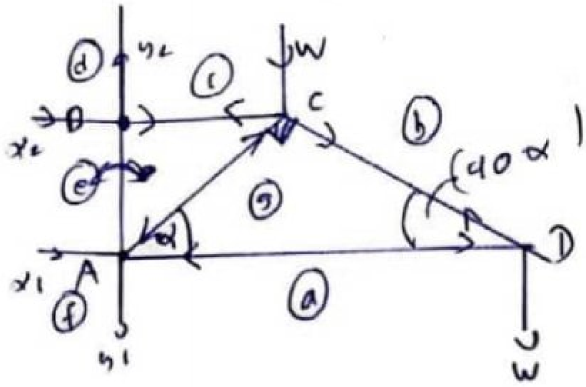
$$x \le a-\frac{3a}{\sqrt{10}} \qquad x \ge a+\frac{3a}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore x = \frac{a}{10}\left[10-3\sqrt{10}\right]$$ ට වඩා සිටින

අවශ්‍ය ආකාරට සමතුලිත නොවන බව පෙනේ

Scanned with CamScanner
~~~~

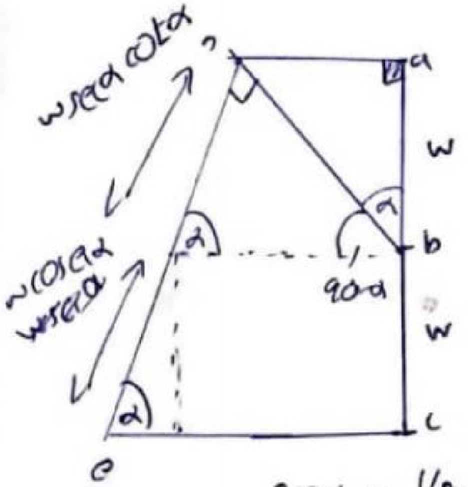
b)



Dහි

$bs = w\sec\alpha$

$bs = es$



$w\sec\alpha = w\sec\alpha\cot\alpha + w\sec\alpha$
$(w \neq 0)$

$\sec\alpha = \sec\alpha\cot\alpha + \csc\alpha$

$\sec\alpha = 1/\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}$

$\sec\alpha = 2/\sin\alpha$

$\tan\alpha = 2$

$\alpha = \tan^{-1}(2)$

දණ්ඩ	බලය	ආතති	තෙරපුම
AD(ad)	2w		✓
DC(bs)	√5w	✓	
AC(es)	√5w		✓
BC(ce)	3w	✓	