(11) උසස් ගණිතය

ප්‍රශ්න පත්‍ර ව්‍යුහය

I පත්‍රය **-** **කාලය : පැය 03යි.** (ඊට අමතරව කියවීම් කාලය මිනිත්තු 10 යි.)

මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් **දෙකකින්** සමන්විත වේ.

A කොටස - ප්‍රශ්න **දහයකි.** ප්‍රශ්න **සියල්ලට ම** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 25 බැගින් ලකුණු 250කි.

B කොටස - ප්‍රශ්න **හතකි.** ප්‍රශ්න **පහකට** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ලකුණු 750කි.

I පත්‍රය සඳහා මුළු ලකුණු = 1000

II පත්‍රය **-** **කාලය : පැය 03යි.** (ඊට අමතරව කියවීම් කාලය මිනිත්තු 10 යි.)

මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් **දෙකකින්** සමන්විත වේ.

A කොටස - ප්‍රශ්න **දහයකි.** ප්‍රශ්න **සියල්ලට ම** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 25 බැගින් ලකුණු 250කි.

B කොටස - ප්‍රශ්න **හතකි.** ප්‍රශ්න **පහකට** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ලකුණු 750කි.

II පත්‍රය සඳහා මුළු ලකුණු = 1000

අවසාන ලකුණ ගණනය කිරීම :	I පත්‍රය	=	1000
	II පත්‍රය	=	1000
	අවසාන ලකුණ	=	2000 ÷ 20 = 100

(II) උසස් ගණිතය

I පත්‍රය

සැලකිය යුතුය:

* **A** කොටසේ **සියලුම** ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.
* **B** කොටසේ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

1. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ යන්න සාධකවලට වෙන් කරන්න.

ඒ නයින් $(a-b)^3\,(a+b-2c)+(b-c)^3\,(b+c-2a)+(c-a)^3\,(c+a-2b)=0$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $k\in\mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\mathbb{R}$ මත R යන සම්බන්ධයක් $x^4-y^4-kx^2+ky^2=0$ නම් xRy මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

R යනු $\mathbb{R}$ මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ යැයි ද $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = ax^3 + 1$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි a යනු තාත්වික නියතයකි. තවද, $x \neq 1$ සඳහා $h(x) = (g \circ f)(x)$ යැයි ගනිමු. $h(2) = 28$ බව දී ඇත. $a = 1$ බව පෙන්වන්න. $h^{-1}(x)$ ලියා දක්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. $x + y + z$ යන්න $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^3 & y+z \\ y & y^3 & z+x \\ z & z^3 & x+y \end{vmatrix}$ යන නිශ්චායකයෙහි සාධකයක් බව පෙන්වා Δ යන්න ඒකීය සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. $xy = c^2$ යන සෘජු කෝණාස්‍රාකාර බහුවලයට $(ct\,,\ \frac{c}{t})$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී ඇඳි ලම්බකයෙහි සමීකරණය සොයා එය $(0, c)$ හරහා යන්නේ නම් $t^4 + t - 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ යනු

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{1 + ax} - 1}{x} & , \quad x > 0 \text{ විට} \\ b & , \quad x = 0 \text{ විට} \\ \dfrac{1}{3(1 - e^{\frac{1}{x}})} & , \quad x < 0 \text{ විට} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලබන ශ්‍රිතය යැයි ද ගනිමු. f යන්න $x = 0$ දී සන්තතික නම්, a සහ b හි අගයන් සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ යනු $f(x)=\begin{cases} |x^2-1|\,; & x\geq -1 \text{ විට}\\ -(x^2-1)\,; & x<-1 \text{ විට}\end{cases}$

මගින් දෙනු ලබන ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු. f යන්න $x=1$ දී අවකල්‍ය නොවන බව පෙන්වන්න.

සියලු $x\neq 1$ සඳහා $f'(x)$ ලියා දක්වන්න.

8. $z=\dfrac{1}{y}$ යන ආදේශය යොදා ගනිමින් $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\tan x=y^2\cos^2 x$ යන අවකල සමීකරණය ඒකජ ආකාරයට පරිණාමනය කර **ඒ නයින්**, එය විසඳන්න.

9. f සහ g යනු $[0,1]$ ප්‍රාන්තරය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්ත්වික-අගයැති ශ්‍රිත දෙකක් යැයි ගනිමු. f හා g හි ව්‍යුත්පන්නය වන g', $[0, 1]$ ප්‍රාන්තරය මත සන්තතික යැයි ද $x \in [0, 1]$ සඳහා $3f(1-x) + 2xg'(x) = 4x^3$ යැයි ද ගනිමු. $\int_0^1 f(x) = 2$ හා $g(1) = 1$, නම් $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{2}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. එකම රූපයක, $r - 2\sin\theta = 0$ හා $r^2 - 2r(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta) + 2 = 0$ යන ධ්‍රැවක සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින්න.

මෙම වක්‍ර සෘජු කෝණිකව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

* *

B කොටස

11. (*a*) A, B හා C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උප කුලක යැයි ගනිමු. ඔබ යොදා ගන්නා කුලක වීජීය නියමයන් පැහැදිලිව සඳහන් කරමින්,

(i) $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$,

(ii) $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ සහ

(iii) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$,

බව පෙන්වන්න. මෙහි $A - B$ යන්න $A - B = A \cap B'$ මගින් අර්ථ දැක්වේ.

(*b*) සිසුන් 150 දෙනකු යොදා ගනිමින් ක්‍රිකට්, හොකී හා පාපන්දු යන ක්‍රීඩා අතුරෙන් ඔවුන් කැමති ක්‍රීඩා නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීක්ෂණයක් සිදු කරන ලදී. සිසුන් 60 දෙනකු ක්‍රිකට්වලට ද, 50 දෙනකු හොකීවලට ද, 70 දෙනකු පාපන්දුවලට ද, 35 දෙනකු හොකී හා පාපන්දුවලට ද, 20 දෙනකු ක්‍රිකට් හා පාපන්දුවලට ද, 42 දෙනකු ක්‍රිකට් හා හොකීවලට ද, 10 දෙනකු ක්‍රීඩා තුනට ම ද කැමති බව හෙළිදරව් විය.

(i) මෙම ක්‍රීඩා තුනෙන් එකකටවත් කැමති නැති,

(ii) ක්‍රිකට්වලට පමණක් කැමති,

(iii) වැඩි තරමින් එක් ක්‍රීඩාවකට පමණක් කැමති

සිසුන් ගණන සොයන්න.

12. (*a*) a, b හා c යනු ධන සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$\sqrt{a\,b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ බව පෙන්වන්න.

$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$ බව අපෝහනය කරන්න.

පහත එක් එක් දෑ පෙන්වන්න.

(i) $(a+4b)(b+4c)(c+4a) \geq 64abc$.

(ii) $0 < a < 1$ සඳහා $a(1-a)^2 \leq \frac{4}{27}$.

(*b*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය $xy-$ තලයෙහි වූ $(a, a+2)$ ලක්ෂ්‍යය $x'y'$ තලයෙහි වූ $(2a, b)$ ලක්ෂ්‍යය මතට අනුරූපණය කරයි; මෙහි a හා b තාත්ත්වික නියත වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

$xy-$ තලයෙහි වූ $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ හා $(0, 1)$ ශීර්ෂ සහිත වූ සමචතුරාශ්‍රය පරිණාමනය කරනු ලබන $x'y'-$ තලයෙහි වූ සමාන්තරාශ්‍රයෙහි ශීර්ෂ සොයන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$k = 1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$ යැයි ගනිමු.

$k = 1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $\omega_k^{\,7} = 1$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්**, $z^7 = 1$ සමීකරණයෙහි තාත්ත්වික නොවන ප්‍රභින්න මූල හය ලියා දක්වන්න.

$1 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 = 0$ බව හා $k = 1, 2, 3$ සඳහා $\omega_k + \omega_{7-k} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \{z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)z + 1\}\{z^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)z + 1\}\{z^2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)z + 1\}$ බවත් පෙන්වන්න.

14. (*a*) $-1 < x < 1$ සඳහා $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = x^2(1+x)(1-x)^{\frac{3}{2}}$ අවකලන සමීකරණය විසඳා **ඒ නයින්**, $x = 0$ විට $y = 1$ සපුරාලන විසඳුම සොයන්න.

(*b*) λ තාත්වික පරාමිතියක් විට, $y = \lambda(x-1)^2 + 3$ වක්‍ර කුලය මගින් සපුරාලන අවකලන සමීකරණය සොයන්න.

ඒ නයින්, ප්‍රලම්බ පරාවක්‍ර කුලයෙහි සාධාරණ සමීකරණය සොයන්න.

15. (*a*) n යනු සෘණ නොවන නිඛිලයක් විට, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$ යැයි ගනිමු.

$n \geq 2$ සඳහා $I_n + \dfrac{8}{\pi^3}\, n(n-1)\, I_{n-1} = \dfrac{2}{\pi}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I_4 සොයන්න.

(*b*) $y = e^{\tan^{-1}x}$ යැයි ගනිමු. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} = (1-2x)\dfrac{dy}{dx}$ බව පෙන්වන්න.

x^4 පදය දක්වා සහ එම පදය ද ඇතුළත් වන පරිදි y හි මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\tan^{-1}x}\, dx$ අනුකලය සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

16. (*a*) $P(a\cos\theta,\, b\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයක් $\dfrac{x}{a}\cos\theta + \dfrac{y}{b}\sin\theta = 1$ යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. $y = x + c$ රේඛාව $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ඉලිප්සයට ස්පර්ශකයක් වේ. $c = \pm\sqrt{5}$ බව පෙන්වන්න.

P සහ Q ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයන්හි ඛණ්ඩාංක සොයා PQ ජ්‍යාය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

(*b*) $y^2 = 4ax$ පරාවලයෙන් සහ $(ap^2, 2ap)$ සහ $(aq^2, 2aq)$ ලක්ෂ්‍යය යා කෙරෙන ජ්‍යායෙන් ආවෘත වර්ගඵලය වන A යන්න $9A^2 = a^4(p-q)^4$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$P \equiv \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ යැයි ගනිමු. P යන්න $y^2 = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}x$ යන පරාවලය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$y^2 = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}x$ යන පරාවලයට P දී ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $\sqrt{5}\,y - 8\sqrt{5}\,x + 33 = 0$ බව පෙන්වන්න.

PQ රේඛාවෙන්, $\sqrt{5}\,y - 8\sqrt{5}\,x + 33 = 0$ අභිලම්බයෙන් සහ $y^2 = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}x$ පරාවලයෙන් සීමාවන වර්ගඵලය සොයන්න.

17. (*a*) $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ යැයි ද $x \in A$ සඳහා $f(x) = \left(\frac{\text{cosec}x + \sec x}{\tan x + \cot x}\right)^2 - \frac{2}{\text{cosec}^2 x}$ යැයි ද ගනිමු.

$x \in A$ සඳහා $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ යන්න $R\sin(\alpha x + \theta)$, $\alpha > 0$ සඳහා ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි R, α සහ θ නිර්ණය කළ යුතුවේ. $x \in A$ සඳහා f හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ හි 0 සහ 1 අතර දිග 0.25ක් වූ ප්‍රාන්තර හි දී x හි අගයන් සඳහා දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි අගයන් පහත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

x	0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	1	0.94	0.80	0.64	0.50
$xf(x) = \frac{x}{1+x^2}$	0	0.23	0.40	0.48	0.50

සිම්සන් නීතිය යොදා ගනිමින් $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලබා ගන්න.

$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ හි නියම අගය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\pi + \ln 4$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

* * *

උසස් ගණිතය

II පත්‍රය

A කොටස

1. O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\beta\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ හා $\mathbf{i}+5\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ වේ; මෙහි β නියතයකි. C ලක්ෂ්‍යය OAB තලය මත පිහිටන බව දී ඇත. β හි අගය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. එක එකක විශාලත්වය $3\,\mathrm{N}$ වූ $\boldsymbol{P}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ හා $\boldsymbol{Q}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ බල දෙකක් පිළිවෙළින් $3\,\mathbf{k}$ හා $-\mathbf{k}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත A හා B ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියා කරයි. එම බලවල දෛශික ඓක්‍යය වූ $\boldsymbol{R}$ හා O මූලය වටා ඒවායේ ඝූර්ණ දෛශිකය වූ $\boldsymbol{G}$ සොයන්න. **ඒ නයින්**, තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට එම බල දෙක ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

3. ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් නියත ρ ඝනත්වයකින් යුත් ද්‍රවයක පාවෙන්නේ එහි ශීර්ෂය ඉහළින්, අක්ෂය සිරස්ව හා අක්ෂයෙන් තුනෙන් දෙකක් නිදහස් පෘෂ්ඨයෙන් ඉහළට තිබෙන පරිදි ය. කේතුවේ ඝනත්වය $\frac{19}{27}\rho$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. t කාලයේ දී, P අංශුවක පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{r} = a(\cos\omega t)\,\mathbf{i} + a(\sin\omega t)\,\mathbf{j} + (c\,\omega t)\,\mathbf{k}$ වේ; මෙහි a, c හා ω ධන නියත වේ. P හි $\mathbf{v}$ ප්‍රවේගය, $\sqrt[\omega]{a^2+c^2}$ නියත විශාලත්වයකින් යුක්ත බව හා OZ - අක්ෂය සමග නියත කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. $t = \frac{2\pi}{\omega}$ වන විට P හි මුල් පිහිටීමේ සිට විස්ථාපනය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. කුඩා සුමට ගෝලයක් u වේගයකින් සිරස්ව පහළට චලනය වෙමින් තිබියදී, තිරසට ආනතිය $\frac{\pi}{6}$ වූ අචල සුමට තලයක ගැටී තිරස්ව පොළා පනී. ගෝලය හා තලය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{3}$ බවත්, ඉතිරි වන චාලක ශක්තිය, ගැටුමට මොහොතකට පෙර එහි අගයෙන් $\frac{1}{3}$ ක් බවත් පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. ස්කන්ධය m හා අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර වළල්ලකට, එහි A ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන තිරස් අක්ෂයක් වටා සිරස් තලයක භ්‍රමණය විය හැකිය. වළල්ලේ C කේන්ද්‍රය A ට සිරස්ව ඉහළින් අල්වා තබා ඊළඟට කුඩා විස්ථාපනයක් දෙනු ලැබේ. C කේන්ද්‍රය A ට සිරස්ව පහළින් ඇති විට එහි වේගය $\sqrt{2ga}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යය ± 3, ± 1 අගයන් පමණක් ගනු ලබන අතර ඒවා $\mathrm{P}(X = x) = k|x|$ සම්භාවිතා සහිත වේ; මෙහි k ධන නියතයක් වේ.

(i) k හි අගය හා $E(X^2)$ සොයන්න.

(ii) X හි සම්මත අපගමනය $\sqrt{7}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. X සසම්භාවී විචල්‍යය 0, 1, 2 හා 3 යන අගයන් පමණක් ගනී. $\mathrm{P}(X \leq 1) = 0.5$, $\mathrm{P}(X \leq 2) = 0.9$ හා $E(X) = 1.3$ බව දී ඇති විට X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ලබා ගන්න. $\mathrm{Var}(X)$ හි අගය, ආසන්න වශයෙන් 1 බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. සෘණ නොවන x අගයන් සඳහා පමණක් අර්ථ දක්වා ඇති X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා සනත්ව ශ්‍රිතය, $f(x)$ පහත දැක්වෙන පරිදි වේ:

$0 \leq x \leq 1$ සඳහා $f(x) = kx$ හා $x \geq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{k}{x^4}$ වේ.

(i) k නියතයෙහි අගය,

(ii) X හි මධ්‍යන්‍යය වූ $E(X)$ හා

(iii) මෙම සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියෙහි මාතය

යන මේවා සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $0 \leq x \leq 1$ සඳහා අර්ථ දැක්වෙන X සසම්භාවී විචල්‍යයක, සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය වූ $F(x)$ යන්න $F(x) = ax^2 - 2x^3$ මගින් දෙනු ලැබේ. a නියතයෙහි අගය සොයා, $E(X) = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න. තවද $P(\dfrac{1}{4} \leq X \leq \dfrac{3}{4})$ සම්භාවිතාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

* *

B කොටස

11. එක එකක විශාලත්වය P N බැගින් වූ බල හයකින් සමන්විත පද්ධතියක්, $OABC$ සවිධි චතුස්තලයක $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA}$ දාර දිගේ, (දක්වා ඇති දිශා දිගේ) ක්‍රියා කරයි. චතුස්තලයේ A, B, C ශීර්ෂ තුනෙහි, O ශීර්ෂය මූලය වශයෙන් ඇති Ox, Oy, Oz කාටීසීය අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් $(a, a, 0)$, $(a, 0, a)$ හා $(0, a, a)$ වේ. මෙහි a යනු මීටරවලින් මනින ලද දිගකි. මෙම බලවල දිශාවලට ඒකක දෛශික ලියා දක්වා, ඒ නයින්, බල හය දෛශික ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. O මූලයෙහි ක්‍රියා කරන විශාලත්වය $R = \sqrt{6}\,P$ N වූ $\boldsymbol{R}$ බලයකට හා ඝූර්ණය දෛශිකය $\boldsymbol{G}$ වූ යුග්මයකට පද්ධතිය ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න. $\boldsymbol{R}$ හා $\boldsymbol{G}$ දෛශික $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ඒකක දෛශික හා P අදිශය ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, අන්තරාලය $p = \dfrac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{G}}{R^2}$, වූ ප්‍රකුංචයකට පද්ධතිය තුල්‍ය බවත් එහි අක්ෂය, $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = p\boldsymbol{R}$ දෛශික සමීකරණය සහිත රේඛාව දිගේ ඇති බවත් පෙන්වන්න. a ඇසුරෙන් p සොයා ප්‍රකුංචයේ අක්ෂයෙහි පිහිටුම් දෛශික සමීකරණය, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \lambda \boldsymbol{N}$, සම්මත පරාමිතික ආකාරයෙන් ලබා ගන්න; මෙහි $\boldsymbol{r_0}$ හා $\boldsymbol{N}$ සෙවිය යුතු දෛශික වේ. ප්‍රකුංචයේ අක්ෂයෙහි කාටීසීය සමීකරණය හා මෙම රේඛාවේ දිශා කෝසයින අපෝහනය කරන්න.

12. අරය a වූ වෘත්තාකාර තැටියක් ඝනත්වය ρ වූ සමජාතීය ද්‍රවයක එහි O කේන්ද්‍රය ද්‍රවයේ නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සිට $h(\geq a)$ ගැඹුරකින් තිබෙන පරිදි සිරස්ව සම්පූර්ණයෙන් ම ගිල්වා ඇත. තැටිය මත ද්‍රව තෙරපුම ලියා දක්වන්න. අනුකලනය භාවිතයෙන්, තැටියේ පීඩන කේන්ද්‍රය, එහි සිරස් විශ්කම්භය මත, O සිට $\dfrac{a^2}{h}$ ගැඹුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය a හා $2a$ වූ ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත දෙකක් අතර පෙදෙසෙහි ආකාරයට ඇති S නම් තල දොරක්, ඝනත්වය ρ වූ සමජාතීය ද්‍රව්‍යයකින් පුරවා ඇති ටැංකියක සිරස් පැත්තක පිහිටා ඇත. ටැංකියෙහි ද්‍රවයේ ගැඹුර $6a$ වේ. දොර, එහි උච්චතම A ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අසව් කරනු ලැබ ඇති අතර, A ලක්ෂ්‍යය නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සිට a ගැඹුරකින් පිහිටයි. දොර වසා තැබීමට හැකි වන පරිදි එහි පහත් ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි දී දොරට ලම්බව යෙදිය යුතු බලය සොයන්න.

13. වේගය v වන විට ඒකක ස්කන්ධයකට kv ප්‍රතිරෝධයක් ඇති කරන මාධ්‍යයක, තිරස් පොළවේ A ලක්ෂ්‍යයක සිට සිරස්ව ඉහළට U වේගයෙන් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. මෙහි k යනු නියතයකි. $T = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{g + kU}{g}\right)$ කාලයකට පසු A ට H උසකින් පිහිටන B ලක්ෂයේදී අංශුව ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වන්න ; මෙහි $kH = U - gT$ වේ.

B නිශ්චලතාවේ සිට පහළට චලිතයේදී A වෙත ළඟා වීමට අංශුව ගන්නා කාලය T_1 නම් හා A හි දී එහි වේගය U_1 නම් $T + T_1 = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{g + kU}{g - kU_1}\right)$ බව පෙන්වන්න.

14. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග $2a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරකට ද සමාන ස්කන්ධය සහිත Q අංශුවක් තන්තුවේ අනිත් කෙළවරට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයක හා Q අංශුව A ට a දුරක් සිරස්ව පහළින් B ලක්ෂ්‍යයක ද අල්වා තබනු ලැබේ. ආරම්භයේදී, P අංශුවට u තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර, සමගාමීව Q අංශුව B හි නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

Q ට සාපේක්ෂව P අංශුවේ චලිතය සැලකීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ තන්තුව නොබුරුල් වන විට එහි සිරසට ආනතිය $\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියේ ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය වූ G වටා කෝණික ගම්‍යතාව සැලකීමෙන්,

(i) තන්තුව ඇදීමට මොහොතකට පසු හා පද්ධතියේ පසුව සිදුවන චලිතයේදී තන්තුවේ කෝණික ප්‍රවේගය නියතව හා $\frac{u}{4a}$ ට සමානව පවතින බවත්,

(ii) Q ට පහළින් P තිබෙන පරිදි තන්තුව සිරස් වීමට ගතවන කාලය $t_1 = \frac{a}{u}\left(\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right)$ බවත් තවදුරටත් පෙන්වන්න.

G හි චලිතය හා G ට සාපේක්ෂව පද්ධතියේ චලිතය සැලකීමෙන්,

(iii) පද්ධතියේ පසුව සිදුවන චලිතයේ දී G හි පථය පරාවලයක් බව පෙන්වා $t = t_1$ වන විට A ලක්ෂ්‍යයේ සිට G හි තිරස් හා සිරස් දුර සොයන්න.

15. ස්කන්ධය M හා අරය a වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර වළල්ලක කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන, එහි තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය ලියා දක්වන්න. ස්කන්ධය M හා අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක කේන්ද්‍රය හරහා යන එහි තලයට ලම්බ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{1}{2}Ma^2$ බව, අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න. වළල්ල හා තැටිය, තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ අචල තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛා දිගේ ස්වායත්තව පහළට (ලිස්සීමෙන් තොරව) පෙරළී යයි. එක් එක් වස්තුවේ කේන්ද්‍රය $t = 0$ කාලයේදී එකම තිරස් රේඛාවක නිශ්චලතාවේ සිට චලිතය ආරම්භ කරයි.

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය භාවිතයෙන් තලය දිගේ පහළට x දුරක් පෙරළීමෙන් පිළිවෙළින් වළල්ලේ හා තැටියේ කේන්ද්‍ර ලබා ගන්නා v හා V වේග $v^2 = gx\sin\alpha$ හා $V^2 = \frac{4g}{3}x\sin\alpha$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින්, එක් එක් වස්තුවේ ත්වරණය සොයා වළල්ලට වඩා $\frac{1}{12}gt^2\sin\alpha$ දුරක් තැටිය චලනය වන බව පෙන්වන්න.

16. (a) "එක් එක්හි සාර්ථකත්ව සම්භාවිතාව $p\,(0 < p < 1)$ වන ස්වායත්ත උත්සාහ n ගණනක දී ලැබෙන සාර්ථකත්ව ගණන" දක්වන X සම්භාවිතා ශ්‍රිතය $P(X = x) = {}^{n}C_x\,(1 - p)^{n-x}\,p^x$, $x = 0, 1, 2, \;....\; n$ වන ද්විපද ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි. $x \le (n + 1)\,p - 1$ නම්ම පමණක් $P(X = x) \le P(X = x + 1)$ බව පෙන්වන්න.

එක්තරා වෙඩික්කරුවෙක් නියමිත ඉලක්කයට වෙඩි තැබීමට ස්වායත්තව උත්සාහ ගණනාවක් කරන බව ද එක් එක් උත්සාහයේදී සාර්ථකත්ව සම්භාවිතාව 0.3 ක් යැයි ද සිතමු.

(i) වෙඩික්කරුවා කරන ස්වායත්ත උත්සාහ ගණන 8 ක් නම් වැඩිම සම්භාවිතාවක් සහිත සාර්ථකත්ව ගණන,

(ii) එක් වතාවක්වත් ඉලක්කයට වැදීමේ සම්භාවිතාව 80% කට වඩා වැඩි වීම සඳහා වෙඩික්කරුවා සිදු කළ යුතු අවම උත්සාහ ගණන

සොයන්න.

(b) R විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් $r = 1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $P(R = r) = q^{r-1}p$, වූ සම්භාවිතා ශ්‍රිතය සහිත ගුණෝත්තර ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි; මෙහි $0 < p < 1$ හා $q = 1 - p$ වේ.

(i) සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය, $P(R \leq r) = 1 - q^r$, බවත්

(ii) ඕනෑම s, t ධන නිඛිල දෙකක් සඳහා $P(R > s + t \mid R > s) = P(R > t)$ බවත්

පෙන්වන්න.

17. (a) A බස්නැවතුම්පොළකට ළඟා වන (එක්තරා මාර්ගයක ගමන් ගන්නා) බස්රථවල අනුයාත ළඟා වීම් දෙකක් අතර කාල ප්‍රාන්තරය X (මිනිත්තුවලින්) සසම්භාවී විචල්‍යයක් වන අතර, X යන්න සනත්ව ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} e \ \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0 & \text{විට} \\ 0, & \text{එසේ නොවන විට} \end{cases}$$

වන ඝාතීය ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි. මෙහි λ යනු ධන පරාමිතියකි. X සසම්භාවී විචල්‍යයෙහි μ මධ්‍යන්‍යය හා σ සම්මත අපගමනය λ පරාමිතිය ඇසුරින් සොයන්න.

දැන් පරාමිතිය $\lambda = \dfrac{1}{10}$ යැයි ගනිමු. (මෙම මාර්ගයෙහි ගමන් ගන්නා) බසයක් A නැවතුම්පොළට පෙ.ව. 7.00 ට ළඟා වූයේ යැයි සිතමු. (මෙම මාර්ගයෙහි ම ගමන් ගන්නා) ඊ ළඟ බසය A නැවතුම්පොළට පෙ.ව. 7.15 සහ 7.30 අතර ළඟා වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

[$e^{-1.5} \approx 0.2231$ **බව උපකල්පනය කළ හැකිය.]**

(b) සීඝ්‍රගාමී දුම්රියක් S_1 දුම්රිය ස්ථානයේ සිට ඊ ළඟ S_2 දුම්රිය ස්ථානයට ළඟා වීමට ගතවන කාලය වන Y (මිනිත්තුවලින්) මධ්‍යන්‍යය මිනිත්තු 40 ක් හා සම්මත අපගමනය මිනිත්තු 5ක් වන ප්‍රමත ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන සසම්භාවී විචල්‍යයක් වේ. සීඝ්‍රගාමී දුම්රියක් S_1 දුම්රිය ස්ථානයෙන් ප.ව. 2.00 ට පිටත් වී S_2 දුම්රිය ස්ථානය දෙසට ගමන් කළේ යැයි සිතමු.

(i) දුම්රිය, S_2 දුම්රිය ස්ථානයට ප.ව. 2.45 ට පෙර ළඟා වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) දුම්රිය, S_2 දුම්රිය ස්ථානයට ප.ව. 2.45 ට පෙර ළඟා වී තිබුණ බව දී ඇත්නම්, දුම්රිය ප.ව. 2.30 ට පෙර S_2 දුම්රිය ස්ථානයට ළඟා වී තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

* * *