



ආභන්ද විද්‍යාලය - කොළඹ 10

10 S I

අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2023 ජනවාරි
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Maths I

12 ශ්‍රේණිය

පැය 2 1/2
2 1/2 hours

නම :

උපදෙස් :

- * මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 8) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 9 - 13)
- * **A කොටස**
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- * **B කොටස**
 ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- * නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටස**, **B කොටසට** උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- * ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස** පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංක	ලැබූ ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
B	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක	
උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ:	1
	2
අධීක්ෂණය	

22 A/A Ananda College Exam [papers grp]

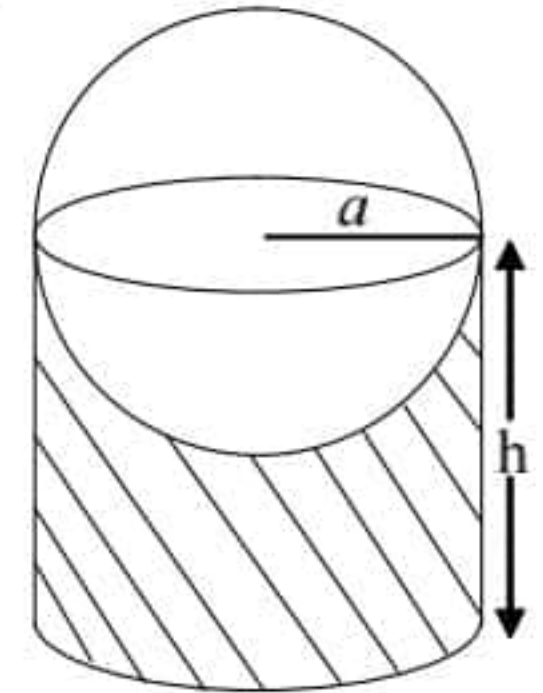
11. (a) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{(x-1)^3}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය $f'(x) = \frac{x(4-x)}{(x-1)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. එනමින් $f(x)$ හි වැඩිවන ප්‍රාන්තර හා අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල බන්ධාංක සොයන්න. $x \neq 1$ සඳහා $f''(x) = \frac{2(x^2 - 5x - 2)}{(x-1)^5}$ බව දී ඇත.

$y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ තනිවර්තන ලක්ෂ්‍ය ඇත්නම් ඒවායේ x බන්ධාංක සොයන්න. ස්පර්ශෝත්මුව, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය, තනිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = f(x)$ වක්‍රය, එහි තිරස් ස්පර්ශෝත්මුවය මගින් ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යවල x බන්ධාංක සොයන්න.

(b) අරය a වූ උස h වූ ඒකාකාර ඝන සාඝ්‍ර වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් අරය a වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් ඉවත් කර, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරය a වූ කුහර අර්ධ ගෝලාකාර පියනකින් සමන්විත වන පරිදි මංජුසාවක් සෑදිය යුතුව ඇත. ඒවායේ සමමිතික අක්ෂ දෙක සමපාත වන පරිදි පිහිටිය යුතුය. මෙම මංජුසාවේ කුහර නොවන කොටසේ පරිමාව $130 \pi \text{ cm}^3$ වේ. $130 = \frac{a^2}{3}(3h - 2a)$ බව පෙන්වන්න.



මෙම මංජුසාවේ බාහිර පෘෂ්ඨයේ තිත්ත ආලේප කළ යුතුව ඇත. තිත්ත සඳහා වියදම වර්ග සෙන්ටිමීටරයට රු. 500/= කි. තිත්ත සඳහා වැයවන මුළු වියදම රුපියල් C නම්,

$$C = 6500 \pi \left[\frac{20}{a} + \frac{a^2}{3} \right] \text{ බව පෙන්වන්න. } C \text{ අවම වන පරිදි } a \text{ හි අගය සොයන්න.}$$

12. (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවට ඇඳි ලම්බකයේ දිග $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

ABCD සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 05 කි. එහි කේන්ද්‍රය වන E හි බන්ධාංක $(-\frac{1}{2}, 1)$ වන අතර AB හා DC පාද $2x + y = 0$ රේඛාවට සමාන්තර වේ. AD පාදය මත මූල ලක්ෂ්‍ය පිහිටයි. D ශීර්ෂය පළමු වෘත්ත පාදයේ පිහිටයි. සමචතුරස්‍රයේ පාදවල සමීකරණ හා විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න.

$\hat{BFD} = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි F ලක්ෂ්‍ය පිහිටයි නම් F හි පථයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම පථය A හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බව පෙන්වන්න.

13. (a) $\sin(A+B)$ හා $\cos(A+B)$ යන්තෙහි සර්වසාමය $\sin A, \sin B, \cos A, \cos B$ ඇසුරෙන් ලියන්න. එම ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $\tan(A+B)$ සඳහා සර්වසාමයක් $\tan A$ හා $\tan B$ ඇසුරෙන් ලබාගන්න. $\sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ = \sqrt{3} - \tan 20^\circ - \tan 40^\circ$ බව නිගමනය කරන්න.

(b) $\cot^{-1}(\sqrt{\cos 2y}) - \tan^{-1}(\sqrt{\cos 2y}) = x$ නම්, $\sin x = \tan^2 y$ බව පෙන්වන්න.

(c) $f(x) = \cos^2 x - \cos^2(x + \frac{\pi}{3}) - \cos^2(x - \frac{\pi}{3}) = A[B + C \cos 2x]$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A, B, C නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ. $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරයක් $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ප්‍රාන්තරය තුළ අඳින්න. ඉහත ප්‍රාන්තරය තුළ $f(x) \geq 0$ හි විසඳුම් කුලකය සොයා එය ප්‍රස්තාරය මත ලකුණු කරන්න. තවද $f(x) = f(x + \frac{\pi}{4})$ හි පොදු විසඳුම් කුලකය ලබාගන්න.



ආනන්ද විද්‍යාලය - කොළඹ 10

10 S II

අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2023 ජනවාරි
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023

සංයුක්ත ගණිතය II
Combined Maths II

12 ශ්‍රේණිය

පැය 2 1/2
2 1/2 hours

නම :

උපදෙස් :

- * මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 8) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 9 - 13)
- * **A කොටස**
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- * **B කොටස**
 ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- * නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටස**, **B කොටසට** උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- * ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස** පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංක	ලැබූ ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
B	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	එකතුව	
	ප්‍රතිශතය	

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ:	1
	2
අධීක්ෂණය	

22 A/A College Exam [papers grp]



අවසාන වාර පරීක්ෂණය - 2023 ජනවාරි
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023

සංයුක්ත ගණිතය II
Combined Maths II **12 ශ්‍රේණිය**

* ප්‍රශ්න හතරකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

B කොටස

09. (a) සෘජු මාර්ගයක $2a$ දුරින් A හා B නගර දෙකක් පිහිටා ඇත. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන C හිදී ජල නල එලීම සඳහා පටු අඟලක් කපා ඇත. නගර අතර ගමන් කරන X බස් රථය A නගරය $u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් පසු කරයි. AC අතරතුර ඒකාකාර ලෙස වේගය අඩු කරමින් පැමිණ $v \text{ ms}^{-1}$ වේගයෙන් C වෙත පැමිණේ. C හි වන අඟල නිසා වන ක්ෂණික ගැස්සීමෙන් බස් රථයේ ප්‍රවේගය v_0 ප්‍රමාණයක් ක්ෂණිකව පහත වැටේ. ඉන්පසු CB අතර ඒකාකාර මන්දනයෙන් චලනය වන බස් රථය B හිදී නිශ්චලතාවයට පත්වේ. X බස් රථය A නගරය පසු කරන මොහොතේදීම A නගරයට b දුරක් පිටුපසින් ඇති Y බස් රථය නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් අරඹා X රථය C වෙත පැමිණෙන මොහොතේම y සිය උපරිම ප්‍රවේගය වන $v \text{ ms}^{-1}$ ලබාගනී. අනතුරුව එම ප්‍රවේගයෙන්ම චලිත වීම සිදුවේ.

X හා y රථ දෙකෙහි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල වක්‍ර එකම සටහනක අඳින්න. X රථයට A සිට B

වෙත ගමන් කිරීමට ගතවූ කාලය $2a \left[\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-v_0} \right]$ බව පෙන්වන්න.

$v_0 = v - \sqrt{u^2 - v^2}$ නම් AC හා CB අතර වූ මන්දන සමාන බව පෙන්වන්න.

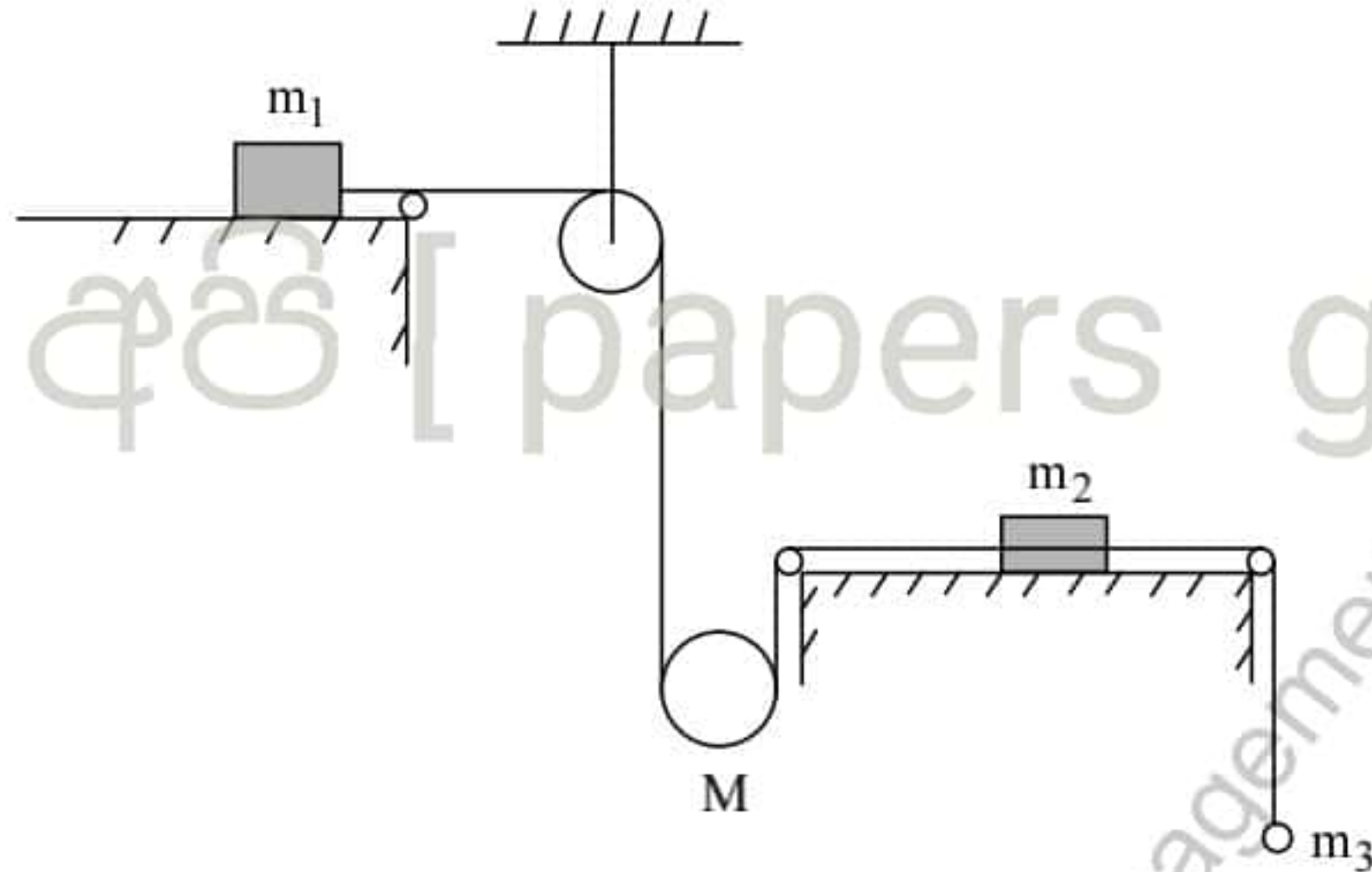
$\frac{v^2 + vv_0 + 2uv_0}{(u+v)(v-v_0)} < \frac{b}{a}$ නම් X රථය B වෙත පැමිණීමට පෙර Y රථයට X පසුකර යා නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(b) සමාන්තර ඉවුරු සහිත පළල x වූ ගඟක් $u \text{ ms}^{-1}$ අනවරත වේගයෙන් බටහිර සිට නැගෙනහිරට ගලා යයි. නිසල ජලයේ $2v \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් පැද යා හැකි පාරුවක් ගඟෙහි එක් ඉවුරක වූ A තොටුපළක සිට අනෙක් ඉවුරේ වූ B හා C තොටුපළවල් වෙත මගීන් රැගෙන යයි. ජලය ගලායන දිශාවට සුළු කෝණයක් ආනතව, $AB = 2x$ වන පරිදි B තොටුපළද B තොටුපළට $2x$ ඉහළින් එම ඉවුරේම C තොටුපළද පිහිටා ඇත. A තොටුපළින් පිටත්වන පාරුව B හි මගීන් බස්සවා අනතුරුව C වෙත ගමන් කර C හි රැඳී සිටින මගීන් නංවාගෙන නැවත B වෙත පැමිණ B හි සිටින මගීන් ද රැගෙන නැවත A වෙත පැමිණේ. පාරුවේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ එකම සටහනක අඳින්න.

AB, BC, CB, BA තොටුපළ අතර චලිතයේදී පාරුවේ පොළොවට සාපේක්ෂ ප්‍රවේග සොයන්න. පාරුව තොටුපළවල රැඳී නොසිටින්නේ යයි උපකල්පනය කරමින් පාරුවේ මුළු චලිතය සඳහා

ගතවූ කාලය $\frac{2x \left[\sqrt{16v^2 - u^2} + 4v \right]}{(4v^2 - u^2)}$ බව පෙන්වන්න.

10. (a)



ස්කන්ධය m_1 , m_2 හා m_3 වන වස්තු තුනක් ද ස්කන්ධය M වූ සුමට සවල කප්පියක් ද සැහැල්ලු අවිනන්‍ය තන්තුවලින් ඇඳා ඇති අතර තන්තු නොබුරුල්ව තබා නිශ්චලතාවයෙන් මුදාහල විට t කාලයකදී පද්ධතිය වලනය වන අවස්ථාව රූපයේ දක්වා ඇත. තන්තු හා වස්තු ස්පර්ශ වී ඇති පෘෂ්ඨ සියල්ල සුමට වේ. එක් එක් වස්තුවේ හා සවල කප්පියේ ත්වරණය ද තන්තුවේ ආතතිය ද නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියන්න.

එමගින් ත්වරණ රහිත වූද තන්තුවල ආතති ඇතුළත් සමගාමී සමීකරණ දෙකක් ලබාගන්න. ආරම්භයේ සිටම m_3 නිසලව පැවතියේ නම් අනෙක් ස්කන්ධ හා සවල කප්පියේ ත්වරණ සොයන්න.

(b) ස්කන්ධය M වූ හරස්කඩ ABC , $\hat{BAC} = \alpha$, $\hat{ACB} = 90^\circ$ හා $AB = d$ වන කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත AB රේඛාව අසන් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ වනසේ තබා ඇති අතර එහි α ආනත රළු මුහුණත මත ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් කුඤ්ඤයේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ තබා u ප්‍රවේගයෙන් තලය මත වැඩිතම බැවුම් රේඛාව ඔස්සේ ඉහළ දිශාවට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\frac{mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \cos \alpha}{m \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + M}$ වන බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු අංශුව හා කුඤ්ඤය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයයි. තවද කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ඉහළ දිශාවට වූ මන්දනයේ විශාලත්වය සොයන්න.

අංශුව කුඤ්ඤයේ මුදුනට යාමට පෙර නිශ්චල වේ නම් $u^2 < \frac{2d(m+M)g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \cos \alpha}{m \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + M}$ වන බව පෙන්වන්න.

11. (a) OAB ත්‍රිකෝණයක් යයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ OA හා AB මත පිහිටනුයේ $OC : CA = 2 : 3$ හා $AD : DB = 1 : 3$ වන ලෙසය. OD හා BC P හිදී හමුවේ. O ලක්ෂය අනුබද්ධයෙන් A හා B හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් \underline{a} හා \underline{b} වේ.

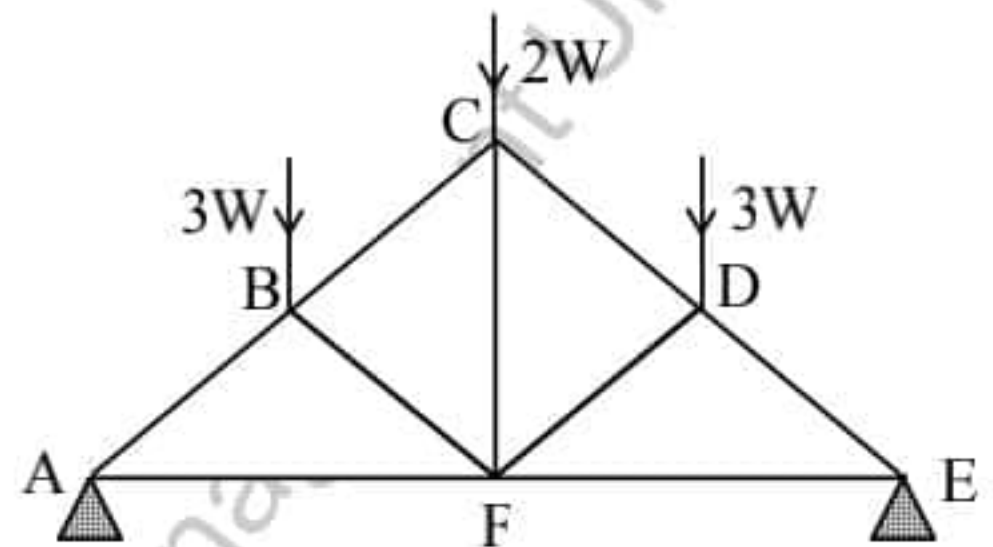
\overline{OD} , \overline{BC} හා \overline{BP} දෛශික \underline{a} හා \underline{b} ඇසුරෙන් සොයන්න.
 $\overline{OP} = \frac{2}{17}(3\underline{a} + \underline{b})$ බව පෙන්වන්න.
 $\overline{OP} \cdot \overline{BP}$ අදිශ ගුණිතය $|\underline{a}|$ හා $|\underline{b}|$ ඇසුරෙන් සොයන්න. තවද \overline{OP} හා \overline{BP} දෛශික ලම්භ නොවන බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයකි. $AB = 6 \text{ cm}$ හා $BC = 4 \text{ cm}$ වේ. AB මත E ලක්ෂය පිහිටා ඇත්තේ $AE : EB = 2 : 1$ වන පරිදි වේ. පිළිවෙලින් ගත් \overline{BA} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{AD} , \overline{DE} හා \overline{EC} පාද මත λP , μP , $2P$, γP , $7\sqrt{2}P$, $\sqrt{5}P$ බල ක්‍රියාකරයි.

- (i) පද්ධතිය සමතුලිත වේ නම් λ , μ , γ හි අගයයන් සොයන්න.
- (ii) $\mu = \gamma$ විට බල පද්ධතිය යුග්මයකට උභතනය වේ නම් λ , μ , γ සොයා යුග්මයේ සුර්ණය සොයන්න. දැන් \overline{DE} , \overline{EC} ඔස්සේ ක්‍රියාකරන බල ඉවත් කර AC ඔස්සේ ක්‍රියාකරන $5\sqrt{13}P$ බලයක් පද්ධතියට එක්කළ විට නව පද්ධතියේ නව සම්ප්‍රයුක්තයට AB ඔස්සේ A හි සිට ඇති දුර සොයන්න.

12. (a) ABCDE සවිධි පංචාස්‍රය තනා ඇත්තේ බර W වූ දිග $2a$ වූ දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවල් සුමට ලෙස සන්ධි කිරීමෙනි. සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ CD තිරස් තලයක් මත අවලව පිහිටන සේත්, BC හා DE හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ලුහු තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධ කිරීමෙන්ද වේ. AB දණ්ඩේ සිරසට ආනතිය α ද BC දණ්ඩේ සිරසට ආනතිය β ද ලෙස ගැනීමෙන් A හා B සන්ධිවල ප්‍රතික්‍රියාත් තන්තුවේ ආනතියන් සොයන්න.

(b) රූප සටහනේ දැක්වෙන්නේ සැහැල්ලු දඬු නවයකින් තනා ඇති රාමු සැකිල්ලකි. AF හා FE දඬු එක සමාන දිගකින්ද ඉතිරි දඬු හත සමාන දිගකින්ද යුක්ත වේ. A හා E ලක්ෂ්‍යවල ඇති දෘඪ ආධාරක දෙකක් මත AE තිරස්ව පිහිටන සේ සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ල සමතුලිතව තිබේ. B, C හා D සන්ධිවලදී සිරස්ව පහළට $3W, 2W$ හා $3W$ බල ක්‍රියා කරයි.

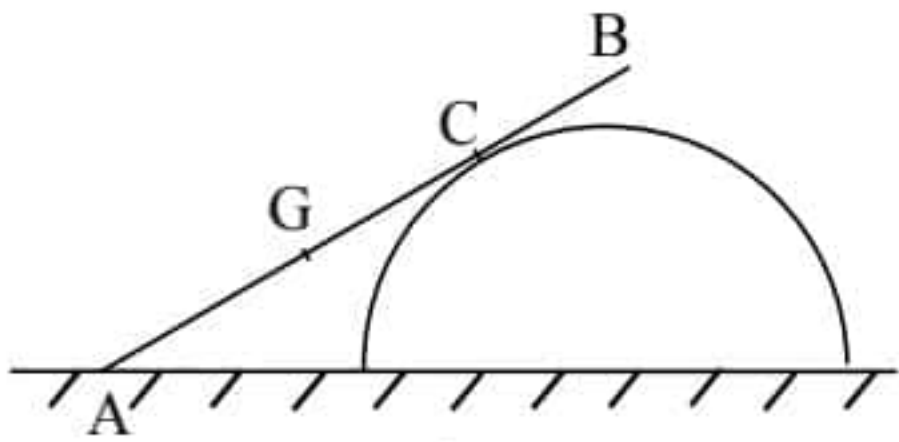


- (i) සන්ධි ගණන හා දඬු ගණන අතර සම්බන්ධතාවක් දක්වමින් ඉහත රාමුව, දෘඪ රාමු සැකිල්ලක් බව පෙන්වන්න.
- (ii) ආධාරක මගින් රාමුසැකිල්ල මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.
- (iii) බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූපසටහන අඳින්න. එනමින් එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබල නිර්ණය කර, ඒවා ආනති ද තෙරපුම්ද යන්න වෙන් වෙන්ව දක්වන්න.

13. (a) අරය a සහ W බරැති ඝන අර්ධ ගෝලයක් තිරස් තලයක් මත දෘඪව සවිකර ඇත. එහි කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයක දිග $2a$ වන AB ඒකාකාර දණ්ඩක A කෙළවර තිරස් තලයක් මතද දණ්ඩ C හිදී අර්ධ ගෝලය මතද රූපයේ ආකාරයට නිශ්චලතාවයේ තබා ඇත. G යනු දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයයි. $GC = \frac{a}{2}$ වේ. A හිදී පෘෂ්ඨ රළු වන අතර C හිදී පෘෂ්ඨ සුමට බව සලකන්න. දණ්ඩ මත තිරස් තලයෙන් ඇතිවන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සහ ඝන අර්ධ ගෝලය මත තිරස් තලයෙන් ඇති කරන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සඳහා ප්‍රකාශන W සහ $\cos \alpha$ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා $\mu > \frac{\sin 2\alpha}{1 + 2\sin^2 \alpha}$

බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු A ලක්ෂ්‍යයේදී පෘෂ්ඨ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයයි.



ඝන අර්ධ ගෝලය ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය මත $\frac{3a}{8}$ දුරක් වේ.

(b) තිරස් පොළොවක් මත A ලක්ෂ්‍යයක සිට P නම් අංශුවක් තිරසට θ කෝණයකින් u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරයි. එම මොහොතේදීම එම සිරස් තලයේම තවත් Q නම් අංශුවක් එම තිරස් තලයේම B ලක්ෂ්‍යයක සිට එකිනෙක දෙසට තිරසට α කෝණයකින් v ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරයි. පොළොවේ සිට h සිරස් උසකින් පිහිටි ස්ථානයක අංශු ගැටේ. $AB = a$ ද ගැටෙන ස්ථානයට A

ලක්ෂ්‍යයේ සිට තිරස් දුර x නම් $x = \frac{a \cot \theta}{\cot \theta + \cot \alpha}$ බව පෙන්වන්න.

ගැටෙන මොහොතේදී P අංශුවේ ප්‍රවේගය තිරසට දරන කෝණය β ද Q අංශුවේ ප්‍රවේගය තිරසට

දරන කෝණය γ ද නම් $\frac{\tan \beta}{\tan \gamma} = \frac{v}{u} \sqrt{\frac{3(3u^2 - 8gh)}{v^2 - 8gh}}$ බව පෙන්වන්න.