අ.පො.ස. උසස් පෙළ

13 ශ්‍රේණිය

සංයුක්ත ගණිතය I

පැය තුනයි

Channel NIE

A කොටස

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\sum_{r=1}^{n} 2r(2r^2-1) = n(n+1)\,(n^2+n-1)$$ බව පෙන්වන්න.

02. y =3 | 3-x| හා y = |x|-2 ශ්‍රිතවල ප්‍රස්ථාර එකම oxy තලයක් මත සලකුණු කර දක්වන්න. එමගින්, |x-1|-3|x-4|>2 අසමානතාව සපුරාලන $x \in \mathbb{R}$ අගය කුලකය ලියා දක්වන්න.

03. $\text{Z} = 2+i$ හා $\text{Z}' = x+iy$ යැයි ගනිමු.

$$\frac{|\text{Z}|+\text{Z}'}{|\text{Z}|-\text{Z}'} = \frac{|\text{Z}|^2 - |\text{Z}'|^2 + 2\,|\text{Z}|\,Im\,(\text{Z}')i}{|\text{Z}|^2 + |\text{Z}'|^2 - 2\,|\text{Z}|\,Re\,(\text{Z}')}$$

ලෙස දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, $|\text{Z}| = |\text{Z}'|$ නම් එවිට $\dfrac{|\text{Z}|+\text{Z}'}{|\text{Z}|-\text{Z}'}$ යන්න හුදෙක් අතාත්වික බව අපෝහනය කරන්න.

04. සියලු ධන නිඛිල n සඳහා $3^{2n+1} - 3.2^n$ යන්න 21 න් බෙදිය හැකි බව, ද්විපද ප්‍රසාරණය යොදා ගනිමින් සාධනය කරන්න.

05. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4}{\tan^2 4x - Sin^2 4x}\right) = \dfrac{1}{256}$ බව පෙන්වන්න.

06. $S \equiv x^2+y^2-100=0$ හා $l \equiv x-2y+10=0$ යැයි ගනිමු.

$S=0$ වෘත්තයෙන් $l=0$ රේඛාවෙන් හා $x-$ අක්ෂයෙන් වට වූ වර්ගඵලය $x-$ අක්ෂය වටා රේඩියන 2π කෝණයකින් භ්‍රමණයෙන් ජනිත පරිමාව ඝණ ඒකක 480π බව පෙන්වන්න.

07. $0<\theta<{}^{\pi}/_{2}$ වූ θ යනු පරාමිතියක් විට, C වක්‍රයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් $x = a\,Sec\,\theta$ හා

$y = b\tan\theta$ ලෙස දැක්වේ. a හා b නියත වේ.

C වක්‍රයේ සමීකරණය $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ බව ලබාගන්න.

$\theta = {}^{\pi}/_{6}$ වන, වක්‍රය මත P ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය,

$2bx - ay = \sqrt{3}ab$ බව පෙන්වන්න.

08. $4x-3y+2=0$ හා $4x+3y-7=0$ රේඛා 2 අතර කෝණ සමච්ඡේදක රේඛා 2 න් හා x හා y අක්ෂ මගින් ආවෘත වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 15/16 බව පෙන්වන්න.

09. $S\equiv x^2+y^2-6x-14y+54=0$ වෘත්තයේ y අක්ෂයට සමාන්තර විශ්කම්භයේ දෙකෙලවර හරහා යන $S'=0$ වෘත්තය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා ද යයි. S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

10. $n\epsilon\mathbb{Z}$ සඳහා $\theta\neq n\pi$ විට, $Sin^2\theta+Cos^2\theta=1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන් $Cosec^2\theta=1+Cot^2\theta$ බව පෙන්වන්න. $Cosec\,\theta-Cot\,\theta={}^1/_7$ බව දී ඇති විට $Cosec\,\theta+Cot\,\theta=7$ බව අපෝහනය කර එයින් $Sin\,\theta={}^7/_{25}$ ලබා ගන්න.

<u>B කොටස</u>

11. (a). $f(x)\equiv lx^2+(n-1)\,x+1$ හා $g(x)\equiv(m+1)\,x^2-nx-1$ යැයි ගනිමු. $f(x)=0$ හා $g(x)=0$ මගින් දෙනු ලබන වර්ග සමීකරණ 2 සඳහා ම $x=(\propto+1)$ ලෙස පොදු මූලයක් පවතින අතර ඒවායේ අනෙක් මූලයන් පිළිවෙලින් β හා γ වේ. තව ද $\propto\neq-1$ හා $(l+m)\neq-1$ වේ.

(i). $\propto=\frac{-(l+m)}{l+m+1}$

(ii). $\beta-\gamma=\frac{(1+m)(1-n)-ln}{l(m+1)}$

(iii). $l\beta+(m+1)\gamma=0$ යන ප්‍රතිඵල ලබාගන්න.

$f(x)=0$ හි හා $g(x)=0$ හි විවේචකයන් වන පිළිවෙලින් Δf හා Δg ලියා දක්වා, $\Delta f+\Delta g=2n^2+4m-4l-2n+5$ බව පෙන්වන්න. $(\propto+1),\beta$ හා γ යන සියල්ල තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න නම් $8(l-m)<9$ විය යුතු බව අපෝහනය කරන්න.

(b). $P(x)\equiv x^4+x^3-px^2+p^2x-1$ යැයි ගනිමු.

$P(x)$ සඳහා $(x+1)$ ලෙස හෝ (x^2+1) ලෙස සාධක පැවතිය නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

එහෙත් $(x+1)$ යනු $P(x)+1$ හි සාධකයක් නම් එවිට $P(x)+1=x(x+1)(x^2+1)$ ලෙස හෝ $P(x)+1=x^3\,(x+1)$ ලෙස දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න.

12. (a). A හා B පාසල් 2 කින් ගැහැණු ළමුන් හා පිරිමි ළමුන් පිළිවෙලින් 4,3, හා 5, 7වන අයුරින් ඇතුළත්වන සංචිතයක් ඇත. මෙම සංචිතයෙන් සාමාජික සංඛ්‍යාව 5ක් වන විට කමිටුවක් තෝරා පත් කරගත යුතුව ඇත.

පහත එක් එක් අවස්ථාව යටතේ වෙනස් කමිටු කොපමණ සංඛ්‍යාවක් පත්කළ හැකි දැයි සොයන්න.

(i). සංචිතයෙන් ඕනෑම 5 ක්,

(ii). සංචිතයෙන් ගැහැණු-පිරිමි දෙපක්ෂය ම නියෝජනය වන පරිදි ඕනෑම 5 ක්,

(iii). A හා B පාසැල් 2 ම ඇතුළත් වන පරිදි ඕනෑම 5 ක්,

(iv). පාසල් 2 ම ඇතුළත් විය යුතු අතර ඒ ඒ පාසැලෙන් අනිවාර්යයෙන් ම ගැහැණු - පිරිමි දෙපක්ෂය ම නියෝජනය වන පරිදි ඕනෑම 5 ක්.

(b). $\lambda \geq 0$ හා $r \in \mathbb{Z}^+$ යැයි සිතමු

$$\frac{2}{r+\lambda} - \frac{2}{r+\lambda-2} = \frac{-4}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)}$$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $U_r = V_r - V_{(r+2)}$ වන පරිදි V_r සොයන්න.

මෙහි $U_r = \frac{2}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)}$ වේ.

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)} - \left[\frac{2(\lambda+n)-1}{(n+\lambda)(n+\lambda-1}\right]$$ බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එම අපරිමිත ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයන්න.

- λ සඳහා සුදුසු අගයක් දෙමින්

  $$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+1)(r+3)} = \frac{5}{6}$$ බව අපෝහනය කරන්න.

13. (a). $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \\ \lambda & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -2 & \lambda \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ හා $R = \begin{pmatrix} \mu-1 & 0 \\ -3 & \mu-1 \end{pmatrix}$ යනු

$P^T Q = R$ වන පරිදි වූ න්‍යාස 3 කි. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

- $\lambda = \mu = -1$ බව පෙන්වන්න.
- අනුරූප R ලියා දක්වන්න.

  එම R න්‍යාසය හා $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය සැලකීමෙන්

- $A = R^{-1}$ බව සාධනය කරන්න.

  $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ විට.

- (i). $(R+I)S = -S$ බව සහ
- (ii). $R+2I+S = 0$ බව පෙන්වා එනයින්
- $(R+2I)(S-I) = S$ බව අපෝහනය කරන්න.

  මෙහි I යනු (2×2) ඝණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ.

(b). $z_1 = -1+2i$ හා $z_2 = 2+i$ යැයි ගනිමු.

$\frac{z_1}{z_2}$ සොයා $\frac{z_2}{z_1}$ අපෝහනය කරන්න. එනයින්

$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$ හා $\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}$ ලබාගෙන

(i). $\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} = 2$ බව හා

(ii). $\frac{(Z_1)^2 - (Z_2)^2}{Z_1 Z_2} = 2i$ බව අපෝහනය කරන්න.

Z_A යනු $|Z_A| = 4$ හා $Arg(Z_A) = \pi/_6$ වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව වන අතර Z_B යනු $Z_B = iZ_A$ වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවයි. **ආගන්ඩ් තලය** මත Z_A හා Z_B ලකුණු කර $Z_C = (Z_A + Z_B)$ හි පිහිටීම ලබාගන්න.

$Tan(^{\pi}/_{12}) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

O,A,B හා C යනු ආගන්ඩ් තලය මත පිළිවෙලින් (o+oi), Z_A, Z_B හා $(Z_A + Z_B)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය 4 විට,

O කේන්ද්‍රය වෙමින් A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්ත චාපයෙන්, AC හා BC රේඛා 2 න් ආවෘත වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $4(4\text{-}\pi)$ බව පෙන්වන්න.

14. (a). $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ සඳහා $f(x) = \frac{2(3-x-x^2)}{(x-2)^3}$ විට $f(x)$ හි x විශයයෙන් ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය වන $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{2(x+7)(x-1)}{(x-2)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තවදුරටත් $f(x)$ දෙවන ව්‍යුපත්පන්න වන $f''(x)$, $f''(x) = \frac{4(x+3)}{(x-2)^4} - \frac{4}{(x-2)} f'(x)$ බව ලබාගන්න. ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය -ස්පර්ශෝන්මුඛ- අක්ෂ මත අන්තඃඛණ්ඩ පැහැදිලිව දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරය දළ සටහන් කරන්න. $f''_{(x)} = \frac{-4(x^2+11x-8)}{(x-2)^5}$ බව දී ඇත. ($\sqrt{153} \approx 12.4$ ලෙස උපකල්පනය කරන්න) $y = f(x)$ වක්‍රයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගන්න. .

(b). තමාගේ ඇස් මට්ටමට උස h වූ තැනැත්තෙකු සිරස් බිත්තියක සිට යම් දුරක තිරස් බිමෙහි නැවතී බිත්තියේ සිරස්තලයේ එල්ලා ඇති පින්තූරයක් නරඹයි. එම පින්තූරයේ උස 3h වන අතර එහි පහල තිරස් දාරය තිරස් බිමට 2h උඩින් පිහිටයි. පින්තූරය මගින් සිරස් තලයේ ඇසෙහි ආපාතනය කෙරෙන කෝණය උපරිම වීම සඳහා නිරීක්ෂකයා බිත්තියේ සිට කොපමණ දුරකින් තිරස්ව පොළොව මත සිට පින්තූරය නැරඹිය යුතු ද?

15. (a) $x^3 = 2\tan^2\theta$ ආදේශය යෙදීමෙන් ($x > 0$ සඳහා) $\int \sqrt{x(2+x^3)}\,dx$ අනුකලනය කරන්න.

(b). $\int_o^a f(x)dx = \int_o^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න. ප්‍රතිඵලය යොදා ගැනීමෙන් හා $\int_o^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3 2\theta} d\theta$ අනුකලනය සැලකීමෙන් $\int_o^{\pi/2} \sec^3 2\theta = 0$ බව අපෝහණය කරන්න.

(c). $\int_o^{\pi} \frac{e^{2x}\cos x - e^x \cos x}{1 - e^x} dx$ අනුකලය අගයන්න.

16. $m > 0$ වූ $l_1 \equiv y = mx$ හා $l_2 \equiv 2mx - 3y + 1 = 0$ වන $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ රේඛා 2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන P හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

- මෙම P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ O මූලයේ සිට ඒකක $\sqrt{2m}$ ක දුරිනි. $m = 1$ බව පෙන්වන්න.
- $l_1 = O$ හා $l_2 = O$ රේඛා 2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යමින් $x-$ අක්ෂ්‍යය

  මත ධන දිශාවෙන් ඒකක 2 ක අන්තඃඛණ්ඩයක් සාදන $l_3 = O$ රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

- $l_2 = O$ රේඛාව $y-$ අක්ෂය ඡේදනය කෙරෙන ලක්ෂ්‍යය A හා $l_3 = 0$ රේඛාව $x-$ අක්ෂය ඡේදනය කෙරෙන ලක්ෂ්‍යය B විට O, A හා B ලක්ෂ්‍ය 3 හරහා යන $S_1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගන්න.
- තවද P කේන්ද්‍රය හා PA අරය වූ $S_2 = 0$ වෘත්තය ද සොයන්න.
- $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත එකිනෙක ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.
- P කේන්ද්‍රය වූ ද $S_1 = 0$ සමග ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන්නාවූ වෘත්තය සොයන්න.

17. (a). සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **'කෝසයින් නීතිය'** ප්‍රකාශ කරන්න.

i. ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාද වල දිග පිළිවෙලින් $(x + y), x$ හා $(x - y)$ වේ.

$\cos A = \frac{x-4y}{2(x-y)}$ බව පෙන්වන්න.

ii. $y = {}^{x}/_{7}$ නම් $A = \cos^{-1}({}^{1}/_{4})$ බව ලබාගන්න.

iii. ත්‍රිකෝණයක පාද 3 හි දිග ආරෝහණ පිළිවෙලින් සැලකූ විට 6:7:8 අනුපාතයට පිහිටයි. මෙම ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය, $\cos^{-1}({}^{1}/_{4})$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b). $(\cos\propto + \cos\beta)^2 + (\sin\propto + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\propto - \beta}{2}\right)$

බව සාධනය කර,

$(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(c). $2\tan^{-1}(\sin x) - \tan^{-1}(2\sec x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

අ.පො.ස. උසස් පෙළ
13 ශ්‍රේණිය
සංයුක්ත ගණිතය II
පැය තුනයි

Channel NIE

A කොටස

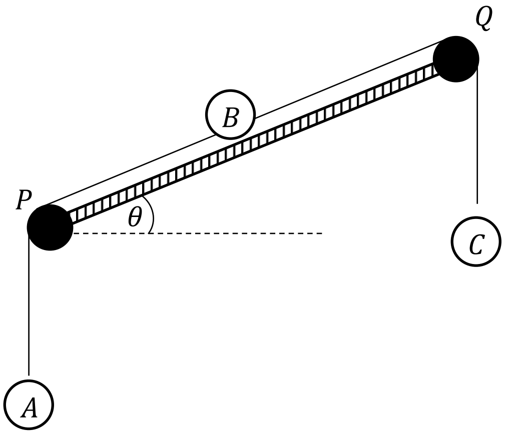
01. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් $3m$ හා λm වූ ප්‍රත්‍යස්ථ අංශු 2 ක් සුමට තිරස් තලයක් මත, එකම සරළ රේඛාවක, ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවනට, පිළිවෙලින් λu හා u ප්‍රවේග වලින් චලිත වී සරළ ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු $3m$ අංශුව නිසලතාවට පත්විනි නම් අනෙක් අංශුව ලබාගන්නා ප්‍රවේගයත්, අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකයත් සොයන්න. තවදුරටත්, ගැටුම නිසා පද්ධතියේ කිසිදු ශක්ති හානියක් සිදු නොවිනි නම්

$\lambda = 1$ බව පෙන්වන්න.

මෙවිට ගැටුමේ දී අංශු අතර බලපෑ ආවේගය සොයන්න.

02. තිරස් ධාවන පථයක $360\ \mathrm{Km\,h^{-1}}$ වේගයෙන් ධාවන වූ යානයක් 0 ලක්ෂ්‍යයක දී තිරසට $\pi/6$ ආනතව ගුවන් ගත වී පැවති ප්‍රවේගයෙන් ඒකාකාරව මිනිත්තුවක් පියාසර කළ පසු එහි සිට බෝම්බයක් සීරුවෙන් මුදා හරී. බෝම්බය බිම පතිත වනුයේ තිරස් පොළව මත 0 සිට කොපමණ දුරකින් ද?

03. රූපයේ පරදි තිරසට θ ආනත තලයේ දෙකෙලවර P හා Q සුමට කප්පි 2 ක් සවිකර ඇත. ආනත තලය මත තබා ඇති B අංශුවට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු 2 ක් පිළිවෙලින් P හා Q කප්පි මතින් ගොස් කෙලවර දී A හා C අංශු දරයි. A, B, C අංශුවල ස්කන්ධ පිළිවෙලින් 2m, 3, හා 3m වේ. පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහල විට එහි ත්වරණය සොයන්න.



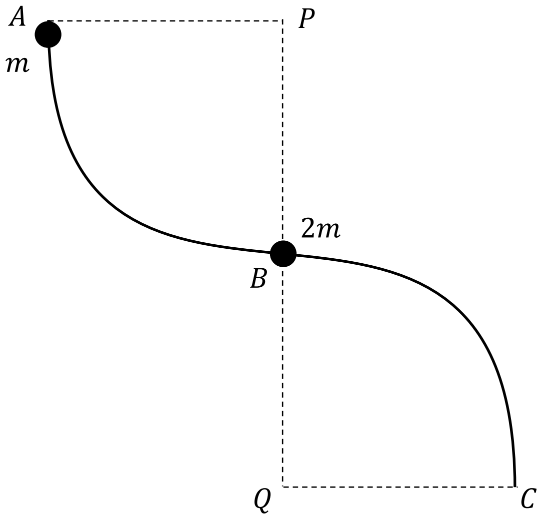
A අංශුව සිරස්ව ඉහලට චලනය වීමට නම්

$\theta < \sin^{-1}(1/3)$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

04. ක්ෂමතාව $10^3 HK\ \ W$ වූ රථයකට තැනිතලා මගෙහි $90\ km\ h^{-1}$ උපරිම ප්‍රවේගයක් ලබාගත හැක. රථයේ චලිතයට බලපාන මුලු ප්‍රතිරෝධය කොපමණ ද? මෙම රථය තිරසට $\pi/6$ ආනත, සරළ රේඛිය මගක ඉහලට $54\ km\ h^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ධාවනය වන මොහොතක එහි ත්වරණය ගණනය කරන්න.

රථයේ ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් K වන අතර මුලු ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතී.

05. එකම සිරස් තලයක රූපයේ දැක්වෙන AB හා BC සුමට සිහින් කම්බි, පිළිවෙලින් P හා Q කේන්ද්‍ර වූ හා සමාන අරයෙන් යුතු වූ වෘත්ත පාදක චාප කොටස් 2 කි.



B හි දී කම්බියට ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට පබළුවක් අමුණා නිසලව ඇති අතර එයින් අඩක ස්කන්ධයෙන් යුතු දෙවන අංශුවක් A දී කම්බියට අමුනා සීරුවෙන් මුදාහරී. එය B දී නිසලව ඇති පබළුව සමඟ ගැටී හා වේ. සංයුක්ත පබළුව හා කම්බිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව ශූන්‍යවන මොහොතේ දී එය හරහා යන අරය BQ සිරසින් උත්ක්‍රමණය වී ඇති කෝණය, $\cos^{-1}\left({}^{20}/_{27}\right)$ බව පෙන්වන්න.

06. O මූලය අනුබද්ධයෙන් PQRS රොම්බසයේ ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්

$\overrightarrow{OP} = -3\underline{i} - 5\underline{j}$, $\overrightarrow{OQ} = 3\underline{i} - 3\underline{j}$, $\overrightarrow{OR} = \propto \underline{i} + \beta\underline{j}$ හා $\overrightarrow{OS} = -\underline{i} + \underline{j}$ වේ.

$\propto$ හා β අගයයන් නිර්ණය කර PR හා QS විකර්ණ එකිනෙක ලම්භ සමච්ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න.

07. ඒකාකාර AB දණ්ඩක දිග $2l$ හා බර W වේ. එහි A කෙලෙවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුචලව අසව්කර දණ්ඩ උඩු සිරසට ${}^{\pi}/_{3}$ ආනතව - සමතුලිතව පවත්වාගනුයේ දණ්ඩේ P ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ අවිතන්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙලවර A ට සිරස්ව l ඉහළින් වූ Q ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳීමෙනි. $AP = {}^{l}/_{2}$ වේ. තන්තුව හා දණ්ඩ එකම සිරස් තලයක පවතී. නිවැරදි බල සටහන ඇඳ තන්තුවේ ආතතිය හා A හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

08. අරය $3r$ හා බර W වූ රළු ගෝලයක් තිරසට ${}^{\pi}/_{6}$ ආනත අචල රළු තලයක් මත සමතුලිත තබා ඇත්තේ ගෝලයේ පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් තලයමත ඉහළ දිශාවෙන් වූ P ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳීමෙනි. ගෝලය හා තලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ සිට P ට දුර $4r$ වේ. ගෝලය මත බල සියල්ල නිවැරදිව ලකුණුකර, ගෝලය මත තලයේ අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

09. A හා C සිද්ධීන් එකිනෙක ස්වායත්ත වූ, A, B, C සිද්ධි 3 ක් සඳහා පහත සම්භාවිත අගයයන් දී ඇත.

$$P(A) = \frac{1}{5}\ , \quad P(B) = \frac{1}{6}\ , \quad P(A \cap C) = \frac{1}{20} \quad \text{හා} \quad P(B \cup C) = \frac{3}{8}$$

C සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයා B හා C සිද්ධීන් 2 ද ස්වායත්ත වන බව පෙන්වන්න.

10. 1, 2, 8, 9 යන සංඛ්‍යා කුලකයට x නැමැති ධන සංඛ්‍යාවට ඇතුළත් කළ විට මධ්‍යනාය 1 කින් වැඩි වේ.

x හි අගය සොයා, x ඇතුළත් කිරීම නිසා සිදු වූ සම්මත අපගමනයේ වැඩිවීම $\left(\frac{2\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}\right)$ බව පෙන්වන්න.

B කොටස

11. (a). t = 0 මොහොතේ A අංශුවක් පොළව මත ලක්ෂ්‍යයක සිට ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව ඉහලට ආරම්භක $\sqrt{10ga}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙර්. ${}^{9a}/_{2}$ සිරස් විස්ථාපනයක් ලද මොහොතේ එහි ක්ෂණික අභ්‍යන්තර පිපිරීමක් හේතුවෙන් එය P හා Q සමාන ස්කන්ධ දෙකකට වෙන්වන අතර P කොටසේ ප්‍රවේගය ක්ෂණිකව ශුන්‍ය වේ.

Q කොටසේ ප්‍රවේගය පිපිරීමට මොහොතකට පෙර පැවති අගය මෙන් දෙගුණයක් වන බව පෙන්වන්න.

A අශුවේත් P හා Q කැබලි දෙකෙහිත් චලිතවලට අදාල ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්ථාර එකම රූපයක අඳින්න. (P කැබැල්ල බිම පතිත වන තෙක්.)

එමගින්,

(i). Q පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට එළඹෙන මොහොත් බිම සිට P ට ඇති උස.

(ii). ප්‍රක්ෂේප කල මොහොතේ සිට P කැබැල්ල යලි බිමට පතිතවන මොහොත වන විට ගතවී ඇති කාලය සොයන්න.

(b) නිශ්චල වාතයේ දී හෙලිකොප්ටරයක වේගය $u\, km\, h^{-1}$ වේ. A, B, C ස්ථාන තුනක් සම බිමෙහි පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{C}B = {}^{\pi}/_{2}$, $AB = d\, km$ හා $AC = BC$ වන අයුරිනි. එක්තරා දිනෙක BA දිශාව ඔස්සේ $V\, km\, h^{-1}$, $(v < u)$ වන ඒකාකාර සුළඟක් හමායන විටෙක යානය A ගෙන් පටන්ගෙන පිළිවෙළින් B හා C හරහා නොනැවතී ඒකාකාරීව නැවත A ස්ථානය වෙත පියාසර කරයි. යානයේ චලිත අවස්ථා 3 දැක්වීමට එකම රූපයක ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ 3 අඳින්න. ඒ ඒ ලක්ෂ්‍යයේ දී යානය හැරවීමට ගතවන කාලයන් නොසලකා හරිමින් මුලු ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට යානයට ගතවන කාලය සොයන්න.

(i). $V = U$ විට,

(ii). $V > U$ විට,

පළමු $A \rightarrow B$ ගමන් කොටස සඳහා සිදුවන්නේ කුමක්දැයි හේතු සහිතව පහදන්න.

12. (a) ස්කන්ධය 2m හා කෝණයක් θ වූ සුමට කුඤ්ඤයක් එහි එක් තල මුහුණතක් තිරසට θ ආනත සුමට අචල ආනත තලයක් මත තබා ඇත්තේ කුඤ්ඤයේ උඩත් මුහුණත තිරස් වන අයුරිනි. කුඤ්ඤයේ ආනත තලය සමග ස්පර්ශව පවතින මුහුණතෙහි ඉහල ශීර්ෂයට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ආනත තලයේ ඉහලම කෙලවරෙහි සවිකර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් ගොස් එහි අනෙක් කෙලවරේ ස්කන්ධය 3m වූ අංශුවක් දරයි. දැන් කුඤ්ඤයේ තිරස්, උඩත් මුහුණත මත ස්කන්ධය m වූ සුමට අංශුවක් තබා පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහල විට කුඤ්ඤය ගුරුත්ව ත්වරණයෙන් $\frac{2}{7}$ ක ප්‍රමාණයක විශාලත්යක් සහිත ඒකාකාර ත්වරණයකින් ආනත තලය ඔස්සේ ඉහලට චලනය වේ. $\theta = {}^{\pi}/_{6}$ බව පෙන්වන්න.

t කාලයක් චලනය වූ පසු කිසිදු ආවේගී ගැස්සීමකින් තොරව කුඤ්ඤයේ උඩත් මුහුණත මත වූ m ස්කන්ධය කුඤ්ඤයේ කෙලවරින් ඉවතට ගුරුත්වය යටතට විසිවේ.

පොළොවට සාපේක්ෂව මෙම m ස්කන්ධය විසිවනුයේ තිරස්ව ද? හේතු පහදන්න.

m ස්කන්ධය පද්ධතියෙන් ඉවත් වීමට පෙර හා පසු කුඤ්ඤයේ ත්වරණ අතර අනුපාතය 5:7 බව පෙන්වන්න.

(b) තිරස් පොළව මත පිහිටි 0 ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\pi/3$ ආනත ආරම්භක $\sqrt{48gh}$ ප්‍රවේගයෙන් P අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. P අංශුව තම පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට එළැඹෙන මොහොතේ එම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව පැවති වෙතත් සමාන ස්කන්ධය සහිත Q අංශුවක ගැටී හා වේ. මෙම Q අංශුව l දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් අචල O' ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා තිබුණු අංශුවකි. $l = 3h$ වේ. සංයුක්ත අංශුව R යැයි ගනිමු.

R චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.

$O'R$ තන්තුව සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන සාධාරණ මොහොතක් සඳහා R හි ප්‍රවේගය W විට

$W^2 = 3gh\,(2\cos\theta - 1)$ බවත්,

එම මොහොතේ තන්තුවේ ආතතිය T විට

$T = 2mg\,(3\cos\theta - 1)$ බවත් සාධනය කරන්න.

එනයින්, $O'R$ තන්තුව සිරස සමග $\pi/3$ කෝණයක් සාදන මොහොතේ ක්ෂණිකව ම R සංයුක්ත අංශුව තන්තුවෙන් ගිලිහේ නම්,

(i). R අංශුව තන්තුවෙන් ගිලිහෙන මොහොතේ O සිට එයට ඇති සිරස් උස,

(ii). R අංශුව යළි පොළවට පතිත වන ලක්ෂ්‍යයට O සිට ඇති තිරස් දුර, සොයන්න.

13. 3a ස්වාභාවික දිගින් යුතු සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ දුන්නක දෙකෙළවර A හා B වේ. A කෙළවර අචල තිරස් තලයකට සවිකර දුන්න සිරස්ව නිසල ඇත. ස්කන්ධය 2m වූ P අංශුව දුන්නේ B කෙළවර මත සීරුවෙන් තැබූ විට දුන්නේ දිග 2a වන පරිදි එය හැකිලේ.

දුන්නේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $6mg$ බව පෙන්වන්න.

දැන් P අංශුව A ට සිරස්ව ඉහලින් $4a$ උසින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයේ තබා සීරුවෙන් දුන්න මතට අතහරී. අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේ දී දුන්නට ලැබෙන අවම දිග $(2-\sqrt{3})a$ බව පෙන්වන්න.

අංශුව ගුරුත්වය යටතේ මුදාහල මොහොතේ සිට ඉහත කී දුන්නේ අවම දිග සහිත පිහිටීම පැමිණීමට ගතවන මුලු කාලය,

$\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)\right\}$ බව සාධනය කරන්න.

මෙම, දුන්නේ අවම දිග සහිත පිහිටීමේ දී දුන්නමත ඇති 2m ස්කන්ධය සහිත P අංශුවෙන් m ස්කන්ධයක් සිරුවෙන් ගැලවී දුන්න හා ගැටීමකින් තොරව ඉවතට හැලේ.

ඉතිරි අංශු කොටස තවත් කොපමණ කාලයක් දුන්න මත රැඳී දුන්න හා ස්පර්ශව පවතී ද?

14. (a). O යනු දෛශික මූලය වූ $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයකි. පිළිවෙලින් OA, AC, CB හා BO පාද මත P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ

$$OP{:}\,OA = AQ{:}\,AC = CR{:}\,CB = BS{:}\,BO = 1{:}\,3$$

වන අයුරිනි.

O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ.

(i) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික ලියා දක්වන්න.

(ii) $PQRS$ යනු සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

(iii) $A\hat{O}B = \theta$ විට,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{2\left(|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2\right)}{3|\underline{a}|\,|\underline{b}|}$$ වෙතොත්

$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය, ඍජුකෝණාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(b). oxy තලයේ වූ A, B, C ලක්ෂ්‍ය 3 ක දී පිළිවෙලින් P_1, P_2, P_3 බල ක්‍රියාකරයි.

මෙහි, $A \equiv (3a, -2a)$ $P_1 = -P\underline{i} + 3P\underline{j}$

$B \equiv (-a, -3a)$ $P_2 = 2P\underline{i} + 4P\underline{j}$

$C \equiv (2a,\ 5a)$ $P_3 = 3P\underline{i} - 2P\underline{j}$ වේ.

මෙහි a, λ, μ ධන අගයයන් වන අතර a මීටර් වලින් හා P නිව්ටන් වලින් මනිනු ලැබූ ධන රාශි වේ. O මූලය වටා මෙම බල පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $10Pa\ N\ m$ බව පෙන්වන්න.

දැන් මෙම පද්ධතියට අමතරව $D\ (\lambda a, \mu a)$ ලක්ෂයේ දී ක්‍රියාකරන $P_4 = \left(\lambda P\underline{i} + \mu P\underline{j}\right)$ හතරවන බලයක් එකතු කරයි.

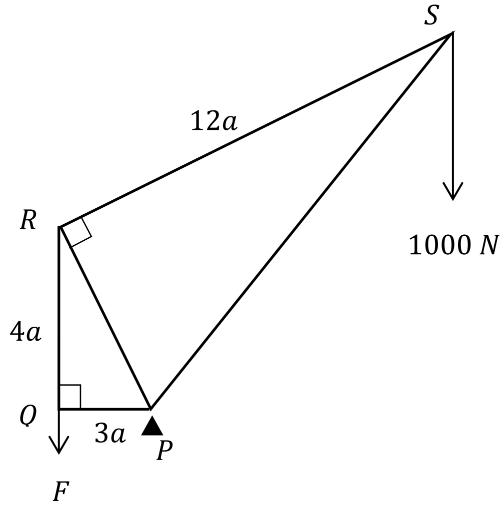
O මූලය වටා පැවති ඝූර්ණයේ කිසිදු වෙනසක් සිදු නොවන බව පෙන්වන්න.

දැන් P_1, P_2, P_3 හා P_4 බල 4 සහිතව නව බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත $E(O, \mu)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන R බලයක් වන අතර, R හි ක්‍රියා රේඛාව OX අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ වාමාර්තව $\pi/3$ කෝණයක් සාදයි. R හි විශාලත්වය ලියා දක්වන්න. λ හා μ හි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

15. (a) දිග $2\sqrt{3}\,r$ හා බර $2w$ වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙලවරක් සිරස් බිත්තියක P ලක්ෂ්‍යයකට සුචලව අසව්කර ඇත. දණ්ඩේ අනෙක් කෙලවරට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙලවරක් ගැටගසා තන්තුව සිරස්ව පවතින අයුරින් එහි අනෙක් කෙලවර සිවිලිමක අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත්තේ දණ්ඩ බිත්තියට ලම්භක සිරස් තලයක, තිරසට $\pi/6$ ආනතව පවතින අයුරිනි.

දැන් දණ්ඩ හා බිත්තිය අතර සුළු කෝණී හිඩැස තුළ බර w හා අරය r වූ සුමට, තුනී, ඒකාකාර තැටියක් දණ්ඩ හා බිත්තිය ස්පර්ශ වන අයුරින් සිරස් තලයක සමතුලිතව තබයි. දණ්ඩ මත හා තැටිය මත ක්‍රියා කරන සියලු බල නිවැරදිව වෙන වෙන ම රූප සටහන් 2 ක දක්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය හා P ලක්ෂ්‍යයේ දී දණ්ඩ මත බිත්තියෙන් ක්‍රියා කරන සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(b). රූපයෙන් දැක්වෙන රාමු සැකිල්ලේ $PQ = 3a, QR = 4a$ හා $RS = 12a$ වන පරිදි එය සැහැල්ලු දඬු 5කින් සමන්විත වේ. තව ද $P\hat{Q}R = P\hat{R}S = \pi/2$ වේ. මෙම රාමු සැකිල්ල P හි දී සුමටව අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇති අතර S දී $1000\ N$ භාරයක් හා Q දී සිරස්ව පහලට ක්‍රියා කරන $F\ N$ බලයක් යෙදා ඇත. F හි විශාලත්වය සොයන්න. බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ දඬු 5 හි ක්‍රියාකෙරෙන ආතති හා තෙරපුම් වෙන වෙන් ම සොයන්න.

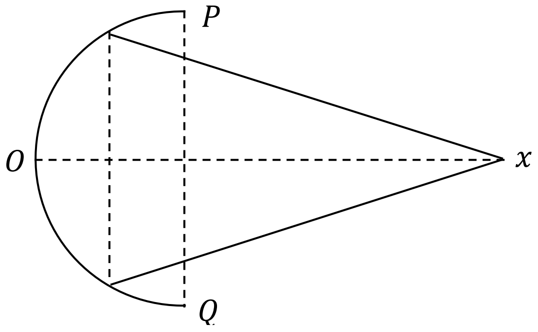


16. (i) අරය a වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධ ගෝලීය කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි තල ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ $\frac{a}{2}$ දුරකින් පිහිටන බවත්,

(ii) උස h වූ ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාරය කුහර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ $\frac{h}{3}$ දුරකින් පිහිටි බවත්,

අනුකලනයෙන් සාධනය කරන්න.

රූපයේ දැක්වෙන සංයුක්ත වස්තුව තනා ඇත්තේ අරය $2a$ හා පෘෂ්ඨීය ඝණත්වය ρ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධගෝලීය කබොලක් හා පතුලේ අරය $\sqrt{3}a$ හා අඩ-සිරස් කෝණය $\frac{\pi}{6}$ වූ ද, පෘෂ්ඨීය ඝණත්වය σ වූ ද ඒකාකාර ඍජු-වෘත්ත කුහර කේතුවක් පොදු සමමිතික අක්ෂයක් ලැබෙන සේ කුහර අර්ධ ගෝලයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨයට කේතුවේ තල ආධාරකයේ ගැටිය දෘඪ ලෙස ඇලවීමෙනි.



සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වන G ට, O සිට OX සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ දුර,

$$OG = 2\frac{(2\rho + 3\sigma)}{(4\rho + 3\sigma)}\ a$$ බව පෙන්වන්න.

මෙම සංයුක්ත වස්තුව P ගෙන් නිදහසේ එල්ලා තැබූ විට OX සමමිතික අක්ෂය සිරසට $\tan^{-1}(3)$ කෝණය ක ආනතයකින් සමතුලිතව පවතීනම් $\rho : \sigma = 3 : 2$ වියයුතු බව සාධනය කරන්න. දැන් කේතුවේ ශීර්ෂයට අමතර ලක්ෂීය ස්කන්ධයක් ඇදීමෙන් වස්තුවේ සමමිතික අක්ෂය තිරස් පිහිටීමකට ගෙන එනු ලැබේ. මෙසේ ඇඳිය යුතු අමතර ලක්ෂීය ස්කන්ධය කුහර අර්ධගෝලීය කබොලේ ස්කන්ධයෙන් අඩක් බව පෙන්වන්න.

17. (a). ස්ත්‍රී-පුරුෂ දෙපක්ෂයම නියෝජනය වන එක්තරා සංගහණයක 40% ක් පිරිමි වන අතර එම පිරිමින්ගෙන් p% ප්‍රමාණයක් රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු අය වෙති. තව ද මෙම පිරිසේ සිටින කාන්තාවක, රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව q වේ.

මෙම සංගහණයෙන් අහඹු ලෙස තෝරාගන්නා අයෙකු, රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු පිරිමියෙකු වීමේ සම්භාවිතාව 0.08 ක් වන අතර රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු කාන්තාවක වීමේ සම්භාවිතාව 0.18 ක් වේ. මෙම තොරතුරු රුක් සටහනකින් නිරූපණය කර p හා q හි අගයයන් ලබාගන්න.

මෙම පිරිසෙන් අහඹු ලෙස තෝරාගන්නා අයෙකු,

(i). රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු නොවූවකු වීමේ,

(ii). පිරිමියෙකු හෝ රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු කාන්තාවක හෝ වීමේ,

(iii). රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු පිරිමියෙකු නොවීමේ,

(iv). රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු නොවූවෙකු නම්, කාන්තාවක වීමේ,

සම්භාවිතාවන් ගණනය කරන්න.

(b).

	පන්ති ප්‍රාන්තරය	මධ්‍ය අගය x_i	සංඛ්‍යාතය	
1		10	12	
2		25	f_1	
3		40	f_2	
4		55	33	
5		70	13	
6		85	14	

මුළු දත්ත ප්‍රමාණය 120 ක් වූ තරම සමාන පන්ති ප්‍රාන්තර 6 කින් යුතු සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක එක් එක් පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය අගය (පන්ති ලකුණ) සහ අනුරූප සංඛ්‍යාතයන් ඉහත වගුවේ සපයා ඇත. මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මාතය 52.5 ක් වේ. ව්‍යාප්තියේ පන්ති ප්‍රාන්තර සියල්ල නිඛිලමය ලෙස ලියා දක්වා f_1 හා f_2 අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය කොපමණ ද?

සුපුරුදු අංකනයෙන් $u_i = \left(\frac{x_i - \bar{x}}{c}\right)$ කේතනය යොදාගනිමින් ව්‍යාප්තියේ **මධ්‍යන්‍යය, විචලතාව** හා **කුටිකතා සංගුණකය** ගණනය කරන්න.