අ.පො.ස. උසස් පෙළ
13 ශ්‍රේණිය
සංයුක්ත ගණිතය I
පැය තුනයි

Channel NIE

A කොටස
පිළිතුරු

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\sum_{r=1}^{n} 2r(2r^2-1) = n(n+1)\,(n^2+n-1)$$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -

n=1 විට L.H.S $=\sum_{r=1}^{1} 2r(2r^2-1)$

$= 2.1(2.1^2-1)$

$= 2$ //

L.H.S. $= 1\,(1+1)(1^2+1-1)$

$= 2$ //

$\therefore$ n = 1 ට, L.H.S. = R.H.S. —— 5

$\therefore$ n = 1 ට, ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

n = p, ($p\in \mathbb{Z}^+$) සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් (උපකල්පනය)

$$\sum_{r=1}^{p} 2r(2r^2-1) = p(p+1)(p^2+p-1) \text{ —— } (1) \text{ —— } 5$$

දැන් n=(p+1) සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය,

මේ සඳහා (1) උපකල්පනයේ දෙපසටම, මෙම ශ්‍රේණියේ (p+1) වන පදය,

$T_{(p+1)}$ එකතු කරමු.

එවිට

① $\Rightarrow$

$$\sum_{r=1}^{p} 2r(2r^2-1) + T_{p+1} \quad = p(p+1)(p^2+p-1) + T_{(p+1)}$$ 5

$$\sum_{r=1}^{(p+1)} 2r(2r^2-1) \quad = p(p+1)(p^2+p-1) + 2(p+1)[2(p+1)^2-1]$$

$$= (p+1)[p^3+p^2-p+4p^2+8p+2]$$

$$= (p+1)(p^3+5p^2+7p+2)$$

$$= (p+1)(p+2)(p^2+3p+1)$$

$$= (p+1)((p+1)+1)[(p+1)^2+(p+1)-1]$$ 5

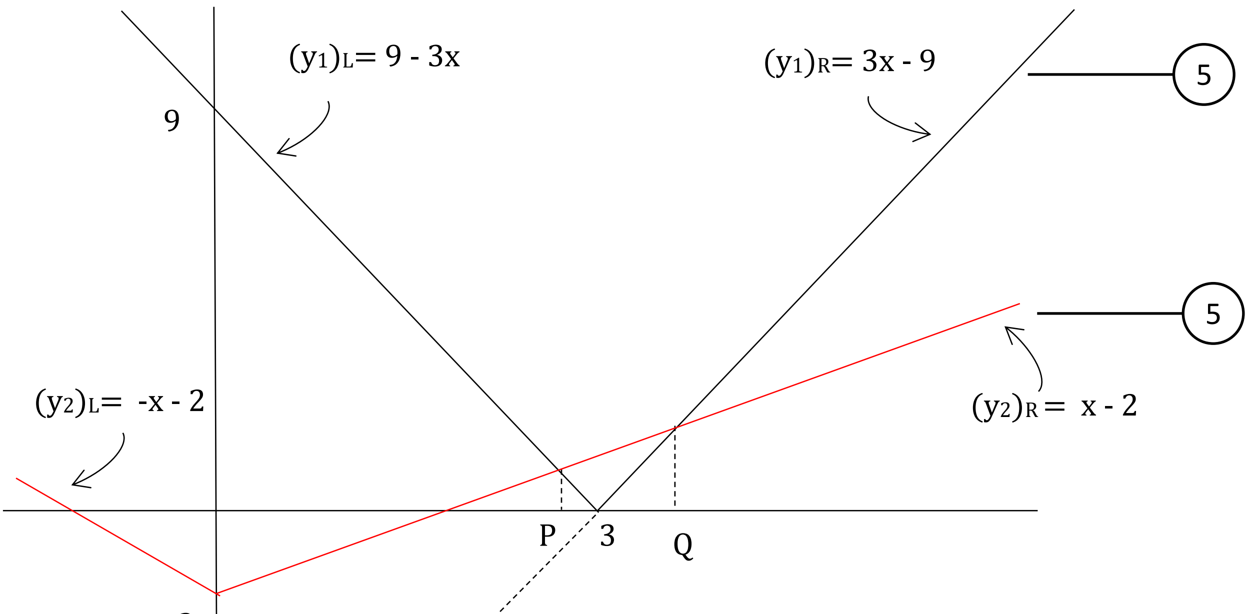
$\therefore$ n = 1 ට, ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වූ අතර, n=p ට සත්‍ය නම්, n =(p+1) සඳහා ද සත්‍ය බව සාධනය වේ. 5

$\therefore$ **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** ට අනුව, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

02. $y = 3\,|3-x|$ හා $y = |x|-2$ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්ථාර එකම oxy තලයක් මත සලකුණු කර දක්වන්න.
එමගින්, $|x-1|-3|x-4|>2$ අසමානතාව සපුරාලන $x \in \mathbb{R}$ අගය කුලකය ලියා දක්වන්න.

පිළිතුර -

	$x = 0$	$x = 3$
$y_1 = 3\,(3-x)$ $= 9 - 3x$	$y_1 = 3\,(3-x)$ $= 9 - 3x$	$y_1 = -3\,(3-x)$ $= 3x - 9$
	$y_1 = 9$	$y_1 = 0$
$y_2 = -x - 2$	$y_2 = x - 2$	$y_2 = x - 2$
	$y_2 = -2$	$y_2 = 1$



P ලබා ගැනීම සඳහා

$(y_1)_L = (y_2)_R$ විසඳිය යුතු අතර

Q ලබා ගැනීම සඳහා,

$(y_1)_R = (y_2)_R$ විසඳිය යුතුය

$\boxed{P}$ $\longrightarrow$ $(y1)L = (y2)R$

$$9 - 3x = x - 2$$

$$x = \frac{11}{4} \,/\!/$$

5

$\boxed{Q}$ $\longrightarrow$ $(y1)R = (y2)R$

$$3x - 9 = x - 2$$

$$x = \frac{7}{2} \,/\!/$$

$\therefore\ y_1 < y_2$ වනුයේ P හා Q අතර x අගයයන්හිදී ය.

$$\therefore\ y_1 < y_2 \Leftrightarrow \frac{11}{4} < x < \frac{7}{2}$$

$$3\,|\,3 - x\,| < |x| - 2 \Leftrightarrow \frac{11}{4} < x < \frac{7}{2}$$

$x \longrightarrow (x - 1)$ ලෙස ආදේශ කළ විට

$$3\,|\,3 - 1(x - 1)| < |x - 1| - 2 \Leftrightarrow \frac{11}{4} < (x - 1) < \frac{7}{2}$$ —— 5

$$3\,|\,4 - x\,| < |\,x - 1\,| - 2 \Leftrightarrow \frac{11}{4} + 1 < x < \frac{7}{2} + 1$$

$$3\,|\,x - 4\,| < |\,x - 1\,| - 2 \Leftrightarrow \frac{15}{4} < x < \frac{9}{2}$$ —— 5

$\therefore |\,x - 1\,| - 3\,|\,x - 4\,| > 2$ අසමානතාව සපුරාලන x අගය පරාසය

$$\frac{15}{4} < x < \frac{9}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

03. $z = 2 + i$ හා $z' = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$$\frac{|z| + z'}{|z| - z'} = \frac{|z|^2 - |z'|^2 + 2\,|z|\,Im\,(z')i}{|z|^2 + |z'|^2 - 2\,|z|\,Re\,(z')}$$

ලෙස දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, $|z| = |z'|$ නම් එවිට $\dfrac{|z| + z'}{|z| - z'}$ යන්න හුදෙක් අතාත්වික බව අපෝහනය කරන්න.

පිළිතුර -

$$\frac{|z| + z'}{|z| - z'} = \frac{\sqrt{5} + (x+iy)}{\sqrt{5} - (x+iy)} = \frac{\left(\sqrt{5} + x\right) + iy}{\left(\sqrt{5} - x\right) - iy}$$

$$= \frac{\left[\left(\sqrt{5} + x\right) + iy\right]}{\left[\left(\sqrt{5} - x\right) - iy\right]}\;\frac{\left[\left(\sqrt{5} - x\right) + iy\right]}{\left[\left(\sqrt{5} - x\right) + iy\right]} \qquad \text{——— } 5$$

$$= \frac{\left[\left(5 - x^2\right) - y^2\right] + \left[y\left(\sqrt{5} + x\right) + y\left(\sqrt{5} - x\right)\right]i}{\left(\sqrt{5} - x\right)^2 + y^2}$$

$$= \frac{5 - \left(x^2 + y^2\right) + 2\sqrt{5}y\,i}{5 + \left(x^2 + y^2\right) - 2\sqrt{5}x} \qquad \text{——— } 5$$

$$\frac{|z|^2 - |z'|^2 + 2\,|z|\,Im\,(z')i}{|z|^2 + |z'|^2 - 2\,|z|\,Re\,(z')} \;/\!/ \qquad \text{——— } 5$$

දැන්, $|z| = |z'|$ විට

$$\frac{|z| + z'}{|z| - z'} = \frac{|z|^2 - |z|^2 + 2\,|z|\,Im\,(z')i}{|z|^2 + |z|^2 - 2\,|z|\,Re\,(z')}$$

$$= \frac{Im\,(z')i}{|z| - Re\,(z')} \qquad \text{——— } 5$$

මෙහි $Im\,(z'),\ |z|, Re\,(z') \in \mathbb{R}$ බැවින් $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා මෙය

$$\frac{|z| + z'}{|z| - z'} = \lambda i$$ ලෙස දැක්විය හැක. ——— 5

∴ මෙය හුදෙක් අතාත්වික වේ. //

04. සියලු ධන නිඛිල n සඳහා $3^{2n+1} - 3.2^n$ යන්න 21 න් බෙදිය හැකි බව, ද්විපද ප්‍රසාරණය යොදා ගනිමින් සාධනය කරන්න.

පිළිතුර -

$$3^{2n+1} = 3.3^{2n}$$

$$= 3.(3^2)^n$$

$$= 3.9^n$$

$$= 3.(2+7)^n \quad 5$$

$$= 3[{}^nC_0.2^n + {}^nC_1.2^{(n-1)}.7 + {}^nC_2.2^{(n-2)}.7^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n.7^n] \quad 5$$

$$= 3.1.2^n + 3.7\,\underbrace{[{}^nC_1.2^{(n-1)} + {}^nC_2 2^{(n-2)}.7 + \ldots + 7^{(n-1)}]}_{\lambda \text{ යැයි ගනිමු}} \quad 5$$

සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\lambda \in \mathbb{Z}$ වේ. 5

$\therefore 3^{(2n+1)} = 3.2^n + 21\lambda$

$\therefore 3^{(2n+1)} - 3.2^n = 21\lambda$ 5

$\therefore \lambda$ යනු නිඛිලයක් බැවින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $3^{(2n+1)} - 3.2^n$ යන්න 21 න් බෙදේ.

05. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4}{\tan^2 4x - Sin^2 4x}\right) = \dfrac{1}{256}$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{\tan^2 4x - Sin^2 4x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(\tan 4x - Sin\,4x)\,(\tan 4x + Sin\,4x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\left[\frac{\sin 4x}{\cos 4x} - \sin 4x\right]\left[\frac{\sin 4x}{\cos 4x} + \sin 4x\right]} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4\,Cos^2\,4x}{Sin^2\,4x\,[1 - Cos\,2(2x)][1 + Cos\,(4x)]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4\,Cos^2\,(4x)}{Sin^2\,4x\,(2\,Sin^2\,2x)(1 + Cos\,4x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{Cos^2\,(4x)}{64\left(\frac{Sin\,4x}{4x}\right)\left(\frac{Sin\,4x}{4x}\right)2\left(\frac{Sin\,2x}{2x}\right)\left(\frac{Sin\,2x}{2x}\right)(1 + Cos\,4x)}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{128}\right)\frac{\lim\limits_{x\to 0} Cos^2(4x)}{\left[\lim\limits_{4x\to 0}\left(\frac{Sin\,4x}{4x}\right)\right]^2\left[\lim\limits_{2x\to 0}\left(\frac{Sin\,2x}{2x}\right)\right]^2\left[\lim\limits_{x\to 0}(1 + Cos\,4x)\right]} \quad 5 \quad 10$$

$$= \left(\frac{1}{128}\right)\frac{1}{(1)^2\,(1)^2\,(1+1)} \quad 5$$

$$= \frac{1}{256}\,//$$

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\left[\frac{\sin^2 4x}{\cos^2 4x} - \sin^2 4x\right]} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 4x}{\left(\frac{\sin^2 4x}{x^2}\right)(1 - \cos^2 4x)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 4x}{16\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2.16} \quad 10$$

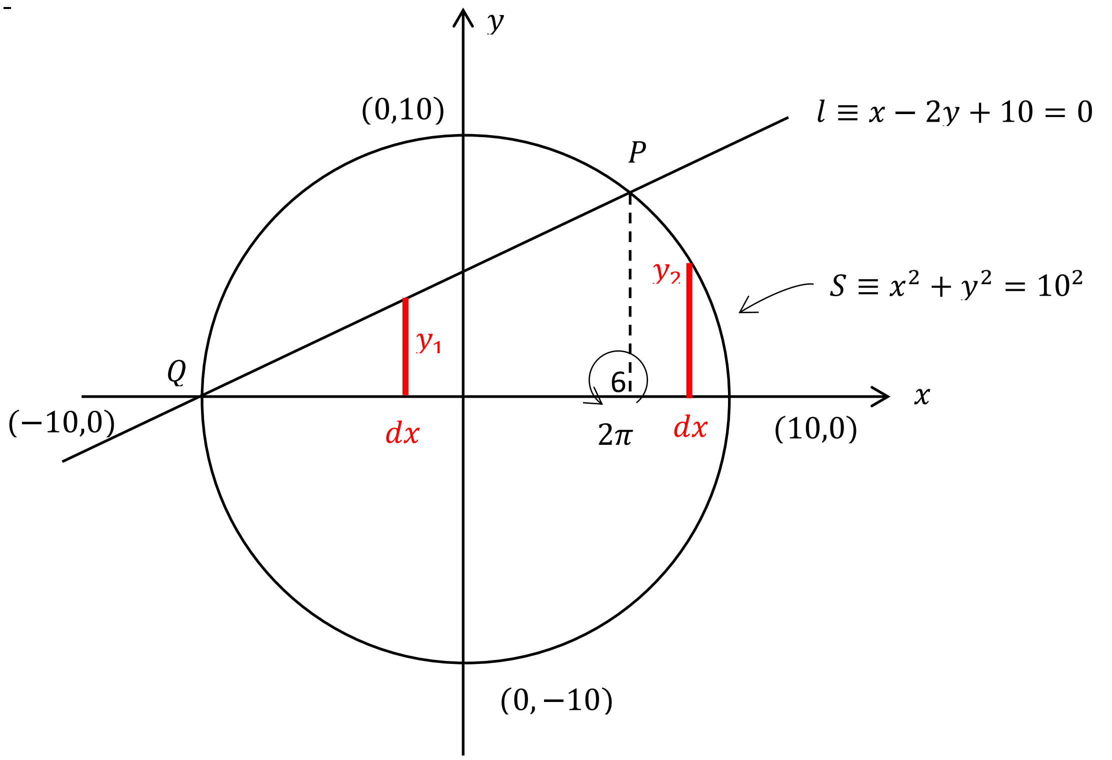
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)}{\left[\lim\limits_{4x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\right]^4.256} \quad 5$$

$$= \frac{1}{256}\,//$$

06. S$\equiv x^2+y^2-100=0$ හා $l\equiv x-2y+10=0$ යැයි ගනිමු.

S$=0$ වෘත්තයෙන් $l=0$ රේඛාවෙන් හා $x-$ අක්ෂයෙන් වට වූ වර්ගඵලය $x-$ අක්ෂය වටා රේඩියන 2π කෝණයකින් භ්‍රමණයෙන් ජනිත පරිමාව ඝණ ඒකක 480π බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -



P හා Q ලක්ෂ්‍ය සඳහා $l=0$ හා $S=0$ විසඳීමෙන්

$$x^2+y^2 = 10^2 \leftarrow x=(2y-10)$$

$$(2y-10)^2+y^2 = 10^2$$

$$5y^2-40y = 0$$

$$y(y-8) = 0$$

$\Rightarrow y_1=0$ හා $y_2=8$

එවිට $x_1=-10$ $\quad x_2=6$

$P\equiv(6,8),\quad Q\equiv(-10,0)$ ——— 5

$$\therefore V = \int_{-10}^{6} \pi\, y_1{}^2 dx + \int_{6}^{10} \pi\, y_2{}^2\, dx$$ 5

$$= \pi \int_{-10}^{6} \left(\frac{x+10}{2}\right)^2 dx + \pi \int_{6}^{10} (100 - x^2)\, dx$$ 5

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3} + 20\,\frac{x^2}{2} + 100x\right]_{-10}^{6} + \pi\left[100x - \frac{x^3}{3}\right]_{6}^{10}$$ 5

$$= \frac{\pi}{4}\left[(72 + 360 + 600) - \left(\frac{-1000}{3} + 1000 - 1000\right)\right] + \pi\left[\left(1000 - \frac{1000}{3}\right) - (600 - 72)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1032 + \frac{1000}{3}\right) + \pi\left(\frac{-1000}{3} + 472\right)$$ 5

$$= \frac{\pi}{4}.\frac{4096}{3} + \pi\frac{416}{3} = \pi\frac{1024}{3} + \pi.\frac{416}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}\,1440 = 480\pi$$ ඝණ ඒකක

07. $0 < \theta < {}^{\pi}/_{2}$ වූ θ යනු පරාමිතියක් විට, C වක්‍රයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් $x = a\,Sec\,\theta$ හා $y = b\tan\theta$ ලෙස දැක්වේ. a හා b නියත වේ.

C වක්‍රයේ සමීකරණය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ බව ලබාගන්න.

$\theta = {}^{\pi}/_{6}$ වන, වක්‍රය මත P ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය,

$2bx - ay = \sqrt{3}ab$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -

$x = a\,Sec\,\theta$ $\qquad\qquad$ $y = b\tan\theta$

$\frac{x}{a} = Sec\,\theta$ $\qquad\qquad$ $\frac{y}{b} = tan\,\theta$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = Sec^2\,\theta - tan^2\,\theta$$ 5

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = 1\,/\!/$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\,Sec\,\theta\tan\theta \quad \text{හා} \quad \frac{dy}{d\theta} = b\,Sec^2\,\theta$$ 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)}, \qquad \frac{dx}{d\theta} \neq 0 \text{ විට}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b\,Sec^2\,\theta}{a\,Sec\,\theta.\tan\theta} = \frac{b\,Sec\,\theta}{a\tan\theta}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_{P(\theta={}^{\pi}/_{6})} = \frac{b\,Sec\,({}^{\pi}/_{6})}{a\,tan\,({}^{\pi}/_{6})} = \frac{b({}^{2}/_{\sqrt{3}})}{a({}^{1}/_{\sqrt{3}})} = \frac{2b}{a} \qquad \text{—— } 5$$

$\therefore P$ දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය.

$$y - y' = m(x - x')$$

$$y - b\tan\theta = \frac{2b}{a}(x - a\,Sec\,\theta) \qquad \text{—— } 5$$

$$y - b.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2b}{a}\left(x - a.\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{—— } 5$$

$$ay - \frac{ab}{\sqrt{3}} = 2bx - \frac{4ab}{\sqrt{3}}$$

$$ay = 2bx - \sqrt{3}ab \Longrightarrow 2bx - ay = \sqrt{3}ab /\!/$$

08. $4x - 3y + 2 = 0$ හා $4x + 3y - 7 = 0$ රේඛා 2 අතර කෝණ සමච්ඡේදක රේඛා 2 න් හා x හා y අක්ෂ මගින් ආවෘත වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 15/16 බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -

කෝණ සමච්ඡේදක රේඛාවල සමීකරණ සෙවීම.

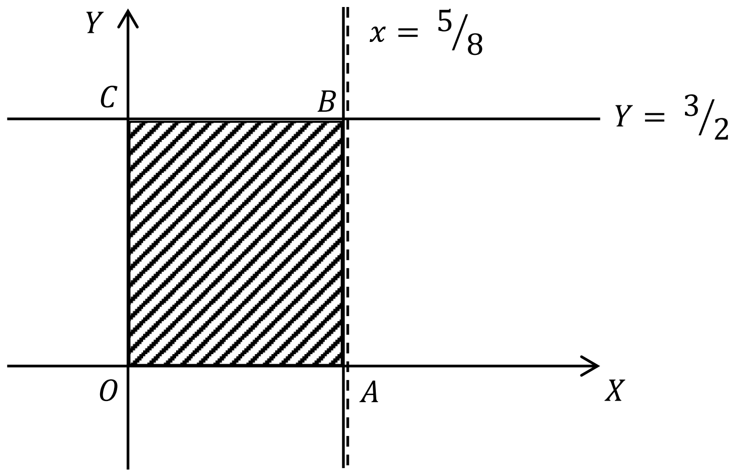
$$\left(\frac{4x - 3y + 2}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right) = \pm\left(\frac{4x + 3y - 7}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right) \qquad \text{—— } 5$$

$(+) \Longrightarrow 4x - 3y + 2 = 4x + 3y - 7$

$$y = {}^{3}/_{2} /\!/ \qquad \text{—— } 5$$

$(-) \Longrightarrow 4x - 3y + 2 = -4x - 3y + 7$

$$x = {}^{5}/_{8} /\!/ \qquad \text{—— } 5$$



5

කෝණ සමච්ඡේදක රේඛා 2 න් හා OX හා OY අක්ෂ මගින් ආවෘත - අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, S විට,

$$S = (OA)(OC)$$

$$= \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$ 5

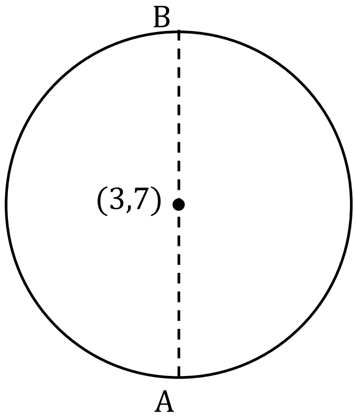
$$= \frac{15}{16}$$ වර්ග ඒකක

09. S≡ $x^2+y^2-6x-14y+54=0$ වෘත්තයේ y අක්ෂයට සමාන්තර විශ්කම්භයේ දෙකෙලවර හරහා යන $S'=0$ වෘත්තය මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා ද යයි. S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

පිළිතුර -

$S\equiv x^2+y^2-6x-14y+54=0$

$(x-3)^2+(y-7)^2=2^2$



A හා B ලක්ෂ්‍ය සඳහා S=0 වෘත්තයේ x =3 විට

$(3-3)^2+(y-7)^2=2^2$

$y-7=\pm 2$

$\oplus \Rightarrow y=9 \qquad \ominus \Rightarrow y=5$

$\therefore \quad A\equiv(3,5) \qquad B\equiv(3,9)$

5 5

A,B ලක්ෂ්‍ය 2 හරහාත්, මූලය හරහාත් යන වෘත්තය

$S'\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ යැයි ගනිමු.

$(0,0)\Rightarrow C=0/\!/$ —— 5

$(3,5)\Rightarrow 3^2+5^2+2g3+2f5+0=0$

$6g+10f=-34$ — (1)

$(3,9)\Rightarrow 3^2+9^2+2g3+2f9+0=0$

$6g+18f=-90$ — (2)

(2) − (1) $\longrightarrow f=-7$ —— 5

$\therefore$ (1) $\longrightarrow \quad g=6$ —— 5

$\therefore S'\equiv x^2+y^2+2(6)x+2(-7)y+(0)=0$

$x^2+y^2+12x-14y=0\ /\!/$

10. $n\epsilon\mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq n\pi$ විට, $Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන් $Cosec^2\theta = 1 + Cot^2\theta$ බව පෙන්වන්න. $Cosec\,\theta - Cot\,\theta = {}^1/_7$ බව දී ඇති විට $Cosec\,\theta + Cot\,\theta = 7$ බව අපෝහනය කර එයින් $Sin\,\theta = {}^7/_{25}$ ලබා ගන්න.

පිළිතුර -

$$Sin^2\theta + Cos^2\theta \quad = 1$$

$$\therefore \frac{Sin^2\theta}{Sin^2\theta} + \frac{Cos^2\theta}{Sin^2\theta} = \frac{1}{Sin^2\theta}, \qquad (\theta \neq n\pi \Longrightarrow Sin\theta \neq 0)$$

$$1 + \left(\frac{Cos\theta}{Sin\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{Sin\theta}\right)^2$$

$$1 + Cot^2\theta = Cosec^2\theta \;/\!\!/ \quad \text{———} \; 5$$

$$\Longrightarrow Cosec^2\theta - Cot^2\theta = 1$$

$$(Cosec\,\theta - Cot\,\theta)(Cosec\,\theta + Cot\,\theta) = 1 \quad \text{———} \; 5$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)(Cosec\,\theta + Cot\,\theta) = 1 \quad \text{———} \; 5$$

$$\therefore Cosec\,\theta + Cot\,\theta = 7 \; - (1)$$

$$Cosec\,\theta - Cot\,\theta = \frac{1}{7} \; - (2)$$

$$(1) + (2) \Longrightarrow 2Cosec\,\theta = 7 + \frac{1}{7} \quad \text{———} \; 5$$

$$Cosec\,\theta = \frac{25}{7} \quad \text{———} \; 5$$

$$\Longrightarrow Sin\,\theta = {}^7/_{25} \;/\!\!/$$

B කොටස

11. (a). $f(x) \equiv lx^2 + (n-1)\,x + 1$ හා $g(x) \equiv (m+1)\,x^2 - nx - 1$ යැයි ගනිමු.
$f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන වර්ග සමීකරණ 2 සඳහා ම $x = (\propto +1)$ ලෙස පොදු මූලයක් පවතින අතර ඒවායේ අනෙක් මූලයන් පිළිවෙලින් β හා γ වේ. තව ද $\propto \neq -1$ හා $(l+m) \neq -1$ වේ.

(i). $\propto = \frac{-(l+m)}{l+m+1}$

(ii). $\beta - \gamma = \frac{(1+m)(1-n)-ln}{l(m+1)}$

(iii). $l\beta + (m+1)\gamma = 0$ යන ප්‍රතිඵල ලබාගන්න.

$f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි විවේචකයන් වන පිළිවෙලින් Δf හා Δg ලියා දක්වා, $\Delta f + \Delta g = 2n^2 + 4m - 4l - 2n + 5$ බව පෙන්වන්න. $(\propto +1), \beta$ හා γ යන සියල්ල තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න නම් $8(\mathrm{l} - \mathrm{m}) < 9$ විය යුතු බව අපෝහනය කරන්න.

(b). $P(x) \equiv x^4 + x^3 - px^2 + p^2x - 1$ යැයි ගනිමු.

$P(x)$ සඳහා $(x+1)$ ලෙස හෝ (x^2+1) ලෙස සාධක පැවතිය නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

එහෙත් $(x+1)$ යනු $P(x)+1$ හි සාධකයක් නම් එවිට $P(x)+1 = x(x+1)(x^2+1)$ ලෙස හෝ $P(x)+1 = x^3\,(x+1)$ ලෙස දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න.

$(\propto +1)$ යනු $f(x) = 0$ හි මූලයක් බැවින්, $f(\propto +1) = 0$ ——— 5

$l(\propto +1)^2 + (n-1)(\propto +1) + 1 = 0$ —① ——— 5

$(\propto +1)$ යනු $g(x) = 0$ හි මූලයක් බැවින්, $g(\propto +1) = 0$ ——— 5

$(m+1)(\propto +1)^2 - n(\propto +1) - 1 = 0$ —② ——— 5

① + ② $\Longrightarrow (l+m+1)(\propto +1)^2 - (\propto +1) = 0$

$\propto \neq -1 \Longrightarrow (\propto +1) \neq 0 \Longrightarrow (l+m+1)(\propto +1) - 1 = 0$ ——— 5

$\therefore \propto +1 = \dfrac{1}{l+m+1} \Longrightarrow \propto = \dfrac{1}{l+m+1} - 1$ ——— 5

$$\propto = \frac{-(l+m)}{(l+m+1)} \quad /\!/$$

$(\propto+1)$ හා β යනු $f(x) \equiv lx^2 + (n-1)x + 1 = 0$ හි මූල බැවින්, මූල ඓක්‍යය සැලකීමෙන් $\longrightarrow \propto + \beta + 1 = \frac{1-n}{l}$ —③ එලෙස ම $(\propto+1)$ හා γ යනු — 5

$g(x) \equiv (m+1)x^2 - nx - 1 = 0$ හි මූල බැවින්, $\propto + \gamma + 1 = \frac{n}{m+1}$ —④ — 5

③ − ④ $\Longrightarrow \beta - \gamma = \frac{1-n}{l} - \frac{n}{m+1}$ — 5

$$= \frac{(1+m)(1-n) - ln}{l(m+1)} \ /\!/$$

පෙර පරිදි ම $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි මූල ගුණිත සැලකීමෙන්

$f(x) \to (\propto+1)\beta = \frac{1}{l}$ —⑤ — 5

$g(x) \to (\propto+1)\gamma = \frac{-1}{m+1}$ —⑥ — 5

$\frac{⑤}{⑥} \Longrightarrow \frac{(\propto+1)\beta}{(\propto+1)\gamma} = \frac{1/l}{-1/(m+1)} \Longrightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-(m+1)}{l}$ — 5

$\therefore l\beta + (m+1)\gamma = 0 \ /\!/$

$f(x) = 0$ හි විවේචකය,

$$\Delta f = (n-1)^2 - 4l$$

$$= n^2 - 2n + 1 - 4l \quad —⑦$$ — 5

$g(x) = 0$ හි විවේචකය,

$$\Delta g = n^2 + 4(m+1)$$

$$= n^2 + 4m + 4 \quad —⑧$$ — 5

⑦ + ⑧ $\Longrightarrow \Delta f + \Delta g = 2n^2 - 2n + 5 + 4(m-l) \ /\!/$ — 5

$(\propto+1),\ \beta,\ \gamma$ සියල්ල තාත්වික හා ප්‍රභින්න බැවින්

$\Delta f > 0$ හා $\Delta g > 0$ විය යුතුයි — 5

$\therefore \Delta f + \Delta g > 0$ විය යුතුයි

$\therefore 2n^2 - 2n + 5 + 4(m - l) > 0$ විය යුතුයි ———— 5

$P(n) = 2n^2 - 2n + 5$ යැයි සිතමු

$$P(n) = 2\left[n^2 - n + {}^{5}/_{2}\right]$$

$$= 2\left[(n - {}^{1}/_{2})^2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= 2\left[(n - {}^{1}/_{2})^2 + \frac{9}{4}\right]$$

එවිට $n = {}^{1}/_{2}$ වන විට $P(n)$ හි අවම අගය ලැබෙන අතර එය $[P(n)]_{අවම} = \frac{9}{2}$ වේ. ———— 5

$\therefore$ මෙම අවම $P(n)$ අගය සඳහා $\Delta f + \Delta g > 0$ විය යුතුය ———— 5

$\therefore \frac{9}{2} + 4(m - l) > 0$ විය යුතුය ———— 5

$$\Rightarrow \frac{9}{2} > 4(l - m)$$

$$\Rightarrow 8(l - m) < 9 \;/\!/$$

(b) කොටස

$$P(x) \equiv x^4 + x^3 - px^2 + p^2x - 1$$

$(x + 1)$ සාධකයක් නම් $x = -1$ මූලයක් විය යුතුයි.

$$P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - p(-1)^2 + p^2(-1) - 1$$

$$= -(p^2 + p + 1) \rightarrow \Delta p < 0$$

$\therefore$ කිසිදු $p \in \mathbb{R}$ සඳහා $P(-1) = 0$ විය නොහැක.

$\therefore (x + 1)$ සාධයක් නොවේ. ———— 10

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - (p+1) \\
\hline
x^2 + 1 & x^4 + x^3 - px^2 + p^2x - 1 \\
 & x^4 \qquad\quad + x^2 \\
\hline
 & \qquad x^3 - (p+1)x^2 + p^2x - 1 \\
 & \qquad x^3 \qquad\qquad\quad + x \\
\hline
 & \qquad\qquad -(p+1)x^2 + (p^2-1)x - 1 \\
 & \qquad\qquad -(p+1)x^2 \qquad\qquad - (p+1) \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad (p^2 - 1)x + p
\end{array}$$

මෙම ශේෂය ශූන්‍ය වන පරිදි තනි P අගයක් නොපවතී.

$\therefore (x^2 + 1)$ සාධයක් නොවේ. ———— 10

$P(x) + 1 = H(x)$ යැයි ගනිමු

එවිට $H(x) \equiv x^4 + x^3 - px^2 + p^2x$ වේ.

$(x+1)$ යනු $p(x) + 1 = H(x)$ හි සාධකයක් බැවින්

$H(-1) = 0$ වේ. 5

$$\Rightarrow (-1)^4 + (-1)^3 - p(-1)^2 + p^2(-1) = 0$$ 5

$$1 - 1 - p - p^2 = 0$$

$$p(p+1) = 0$$

$\Rightarrow p = 0$ හෝ $p = -1$ විය යුතුයි 5 5

$p = 0$ විට ; –

$\mathrm{P(x)+1 = H(x)} = x^4 + x^3$ 5

$$= x^3(x+1) \,/\!/$$

$p = -1$ විට ; –

$\mathrm{P(x)+1 = H(x)} = x^4 + x^3 + x^2 + x$

$$= x^3(x+1) + x(x+1)$$ 5

$$= (x+1)(x^3 + x)$$

$$= x\,(x+1)(x^2+1) \,/\!/$$

12. (a). A හා B පාසල් 2 කින් ගැහැණු ළමුන් හා පිරිමි ළමුන් පිළිවෙලින් 4,3, හා 5, 7වන අයුරින් ඇතුළත්වන සංචිතයක් ඇත. මෙම සංචිතයෙන් සාමාජික සංඛ්‍යාව 5ක් වන විට කමිටුවක් තෝරා පත් කරගත යුතුව ඇත.

පහත එක් එක් අවස්ථාව යටතේ වෙනස් කමිටු කොපමණ සංඛ්‍යාවක් පත්කළ හැකි දැයි සොයන්න.

(i). සංචිතයෙන් ඕනෑම 5 ක්,

(ii). සංචිතයෙන් ගැහැණු-පිරිමි දෙපක්ෂය ම නියෝජනය වන පරිදි ඕනෑම 5 ක්,

(iii). A හා B පාසල් 2 ම ඇතුළත් වන පරිදි ඕනෑම 5 ක්,

(iv). පාසල් 2 ම ඇතුළත් විය යුතු අතර ඒ ඒ පාසැලෙන් අනිවාර්යයෙන් ම ගැහැණු - පිරිමි දෙපක්ෂය ම නියෝජනය වන පරිදි ඕනෑම 5 ක්.

(b). $\lambda \geq 0$ හා $r \in \mathbb{Z}^{+}$ යැයි සිතමු

$$\frac{2}{r+\lambda} - \frac{2}{r+\lambda-2} = \frac{-4}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)}$$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\mathrm{U}_r = \mathrm{V}_r - \mathrm{V}_{(r+2)}$ වන පරිදි V_r සොයන්න.

මෙහි $\mathrm{U}_r = \dfrac{2}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)}$ වේ.

$$\sum_{r=1}^{n} \mathrm{U}_r = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)} - \left[\frac{2\,(\lambda+n)-1}{(n+\lambda)(n+\lambda-1}\right]$$ බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{r=1}^{n} \mathrm{U}_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එම අපරිමිත ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයන්න.

- λ සඳහා සුදුසු අගයක් දෙමින්

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+1)(r+3)} = \frac{5}{6}$$ බව අපෝහනය කරන්න.

(a).

A	
G	B
3	4

7

B	
G	B
5	7

12

මුළු පිරිස = 19

(i). ඕනෑම 5 ක් විට,

වෙනස් කමිටු සංඛ්‍යාව $= {}^{19}C_5$ — 10

$$= \frac{\lfloor 19}{\lfloor 5 \ \lfloor 14} = \frac{19,\ 18,\ 17,\ 16,\ 15, \lfloor 14}{5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1, \lfloor 14}$$

$= 19.\,18.\,17.\,2$

$= 11628$ — 5

(ii). (G , B) ගැහැණු - පිරිමි දෙපක්ෂය ම නියෝජනය වන පරිදි ඕනෑම 5 ක් විට,

G - 8	B - 11
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

$^{8}C_4 \times {}^{11}C_1 = 70 \times 11 = 770$ — 5

$^{8}C_3 \times {}^{11}C_2 = 56 \times 55 = 3080$ — 5

$^{8}C_2 \times {}^{11}C_3 = 28 \times 165 = 4620$ — 5

$^{8}C_1 \times {}^{11}C_4 = 8 \times 330 = 2640$ — 5

11110 — 5

(iii). A , B පාසල් 2 ම ඇතුළත් වන පරිදි ඕනෑම 5 ක් විට,

A - 7	B - 12
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

$^{7}C_4 \times {}^{12}C_1 = 35 \times 12 = 420$

$^{7}C_3 \times {}^{12}C_2 = 35 \times 66 = 2310$

$^{7}C_2 \times {}^{12}C_3 = 21 \times 220 = 4620$

$^{7}C_1 \times {}^{12}C_4 = 7 \times 495 = 3465$

10 — අදියර 2 කට 5 බැගින්

10815 — 5

(iv). A , B පාසල් 2ම සහ ඒ ඒ පාසැලෙන් ගැහැණු - පිරිමි දෙපක්ෂය ම ඇතුළත් විය යුතු විට.

A		B	
G-3	B-4	G-5	B-7
1+1	1	1	1
1	1+1	1	1
1	1	1+1	1
1	1	1	1+1

$^{3}C_2 \times {}^{4}C_1 \times {}^{5}C_1 \times {}^{7}C_1 = 3.4.5.7 = 420$

$^{3}C_1 \times {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 \times {}^{7}C_1 = 3.6.5.7 = 630$

$^{3}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{5}C_2 \times {}^{7}C_1 = 3.4.10.7 = 840$

$^{3}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{5}C_1 \times {}^{7}C_2 = 3.4.5.21 = 1260$

අදියර 2 කට 5 බැගින් 10

3150 — 5

(b).

$$\frac{2}{(r+\lambda)} - \frac{2}{(r+\lambda-2)} = 2\left[\frac{(r+\lambda-2)-(r+\lambda)}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)}\right]$$ — 5

$$= \frac{-4}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)} \quad //$$

$$\therefore \frac{-4}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)} = \frac{2}{(r+\lambda)} - \frac{2}{(r+\lambda-2)}$$ බැවින්,

$$\frac{2}{(r+\lambda)(r+\lambda-2)} = \frac{1}{(r+\lambda-2)} - \frac{1}{(r+\lambda)} \quad \text{වේ.}$$

$$\therefore \quad Ur = \frac{1}{(r+\lambda-2)} - \frac{1}{(r+\lambda)} \quad \text{වේ.} \qquad 5$$

දැන් $\dfrac{1}{r+\lambda-2} = Vr$ ලෙස ගත් විට, 5

$$\frac{1}{r+\lambda} = V_{(r+2)} \quad \text{වේ.} \qquad 5$$

$\therefore$ එවිට $\quad Ur = Vr - V_{(r+2)}$ වේ. 5

$$\begin{array}{llllll}
r=1 & \longrightarrow & U_1 & = & V_1 & -V_3 \\
r=2 & \longrightarrow & U_2 & = & V_2 & -V_4 \\
r=3 & \longrightarrow & U_3 & = & V_3 & -V_5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r=(n-2) & \longrightarrow & U_{(n-2)} & = & V_{(n-2)} & -V_n \\
r=(n-1) & \longrightarrow & U_{(n-1)} & = & V_{(n-1)} & -V_{(n+1)} \\
r=n & \longrightarrow & U_n & = & V_n & -V_{(n+2)}
\end{array} \quad (+) \qquad 5 \quad 5$$

$$U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots. + U_{(n-1)} + U_n = V_1 + V_2 - V_{(n+1)} - V_{n+2} \qquad 5$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} Ur = \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda} - \left[\frac{1}{(n+\lambda-1)} + \frac{1}{(n+\lambda)}\right] \qquad 5$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} Ur = \left[\frac{\lambda+\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}\right] - \left[\frac{(n+\lambda)+(n+\lambda-1)}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}\right] \qquad 5$$

$$= \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)} - \left[\frac{2(n+\lambda)-1}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}\right] \;/\!\!/$$

දැන්, මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වීම සඳහා,

$\lim\limits_{n\to\infty}$ සලකමු

එවිට $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} Ur = \lim_{n\to\infty} \left\{\left[\frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}\right] - \left[\frac{2(n+\lambda)-1}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)}\right]\right\}$

$$= \left(\frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)}\right) - \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{2}{n} + \frac{2\lambda}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{n} - \frac{1}{n}\right)}\right]$$

$$= \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} \text{ //} \qquad \text{——— } 10$$

මෙය පරිමිත අගයකි.

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} Ur$ වූ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. ——— 5

දැන්

$\lambda = 3$ ලෙස ගත් විට,

$Ur = \dfrac{2}{(r+3)(r+1)} = \dfrac{2}{(r+1)(r+3)}$ ලැබේ. ——— 5

∴ මුල් ප්‍රතිඵලයට අනුව,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+1)(r+3)} = \left[\frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)}\right]_{(\lambda=3)} \text{ වේ.} \qquad \text{——— } 5$$

$$= \frac{2.3 - 1}{3(3 - 1)}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ //} \qquad \text{——— } 5$$

13. (a). $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \\ \lambda & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -2 & \lambda \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ හා $R = \begin{pmatrix} \mu - 1 & 0 \\ -3 & \mu - 1 \end{pmatrix}$ යනු

$P^T Q = R$ වන පරිදි වූ න්‍යාස 3 කි. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

- $\lambda = \mu = -1$ බව පෙන්වන්න.
- අනුරූප R ලියා දක්වන්න.

එම R න්‍යාසය හා $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය සැලකීමෙන්

- $A = R^{-1}$ බව සාධනය කරන්න.

$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ විට.

- (i). $(R+I)S = -S$ බව සහ
- (ii). $R+2I+S = 0$ බව පෙන්වා එනයින්
- $(R+2I)(S-I) = S$ බව අපෝහනය කරන්න.

මෙහි I යනු (2 x 2) ඝණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ.

(b). $z_1 = -1+2i$ හා $z_2 = 2+i$ යැයි ගනිමු.

$\dfrac{z_1}{z_2}$ සොයා $\dfrac{z_2}{z_1}$ අපෝහනය කරන්න. එනයින්

$\dfrac{z_1 + z_2}{z_1}$ හා $\dfrac{z_1 + z_2}{z_2}$ ලබාගෙන

(i). $\dfrac{z_1 + z_2}{z_2} + \dfrac{z_1 + z_2}{z_1} = 2$ බව හා

(ii). $\dfrac{(z_1)^2 - (z_2)^2}{z_1 z_2} = 2i$ බව අපෝහනය කරන්න.

z_A යනු $|z_A| = 4$ හා $Arg(z_A) = \pi/6$ වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව වන අතර z_B යනු $z_B = iz_A$ වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවයි. **ආගන්ඩ් තලය** මත z_A හා z_B ලකුණු කර $z_C = (z_A + z_B)$ හි පිහිටීම ලබාගන්න.

$Tan(\pi/12) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

O,A,B හා C යනු ආගන්ඩ් තලය මත පිළිවෙලින් (o+oi), z_A, z_B හා $(z_A + z_B)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය 4 විට,

O කේන්ද්‍රය වෙමින් A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්ත චාපයෙන්, AC හා BC රේඛා 2 න් ආවෘත වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $4(4-\pi)$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -

(a) $P^T Q = R$ බැවින්

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \lambda \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu-1 & 0 \\ -3 & \mu-1 \end{pmatrix} \text{ ———— } 5$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3\lambda & (4\lambda+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu-1 & 0 \\ -3 & \mu-1 \end{pmatrix} \text{ ———— } 5$$

සමීකරණ 4 ම තිබේ නම් පමණක්

$$\Rightarrow \begin{matrix} -2 = \mu - 1 \\ \mu = -1 \mathbin{/\!/} \end{matrix}, \quad 0 = 0 \mathbin{/\!/}, \quad \begin{matrix} 3\lambda = -3 \\ \lambda = -1 \mathbin{/\!/} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 4\lambda + 2 = \mu - 1 \\ -2 = -2 \mathbin{/\!/} \end{matrix} \text{ ———— } 5$$

$\therefore$ අනුරූප, $R = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}_{(2\times2)} \mathbin{/\!/}$ ———— 5

$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ විට RA ගුණිතය සලකමු

$$RA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ———— } 5$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ———— } 5$$

$\Rightarrow$ RA = I වේ.

$$\left.\begin{aligned} \therefore R^{-1}RA &= R^{-1}I \\ IA &= R^{-1} \\ A &= R^{-1} \mathbin{/\!/} \end{aligned}\right\} \text{ ———— } 5$$

(i). $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ හා $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ විට

$$(R+I)S = \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ———— } 5$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore (R+I)S = -S \mathbin{/\!/}$ ———— 5 (ii). $R + 2I + S \quad = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} +^{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ———— 5

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ———— 5

$\therefore R + 2I + S = 0$ //

(i) $\Rightarrow (R + I)S = -S$

$\Rightarrow (R + I)S + S = 0$

$\Rightarrow (R + I + I)S = 0$

$\Rightarrow (R + 2I)S = 0$

(i) = (ii) බැවින්

$(R + 2I)S = R + 2I + S$ ———— 5

$\Rightarrow (R + 2I)S - (R + 2I) = S$ ———— 5

$\Rightarrow (R + 2I)(S - I) = S$

(b). $Z_1 = -1+2i$

$Z_2 = 2 + i$

- $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \left(\dfrac{-1 + 2i}{2 + i}\right)$

$= \left(\dfrac{-1 + 2i}{2 + i}\right)\left(\dfrac{2 - i}{2 - i}\right)$ ———— 5

$= \dfrac{-2 + i + 4i - 2\,(i^2)}{2^2 - (i)^2} = \dfrac{0 + 5i}{5}$

$= i$ // ———— 5

- $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i}\dfrac{(-i)}{(-i)}$ ———— 5

$= \dfrac{-i}{-(i)^2} = -\,i$ // ———— 5

- $$\frac{z_1+z_2}{z_1} = \frac{z_1}{z_1}+\frac{z_2}{z_1} = 1+(-i) = 1-i \,/\!/ \quad \text{———} \; 5$$
- $$\frac{z_1+z_2}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_2} = i+1 = 1+i \,/\!/ \quad \text{———} \; 5$$

$$\therefore \frac{z_1+z_2}{z_2}+\frac{z_1+z_2}{z_1} = (1+i)+(1-i) = 2 \,/\!/ \quad \text{———} \; 5$$

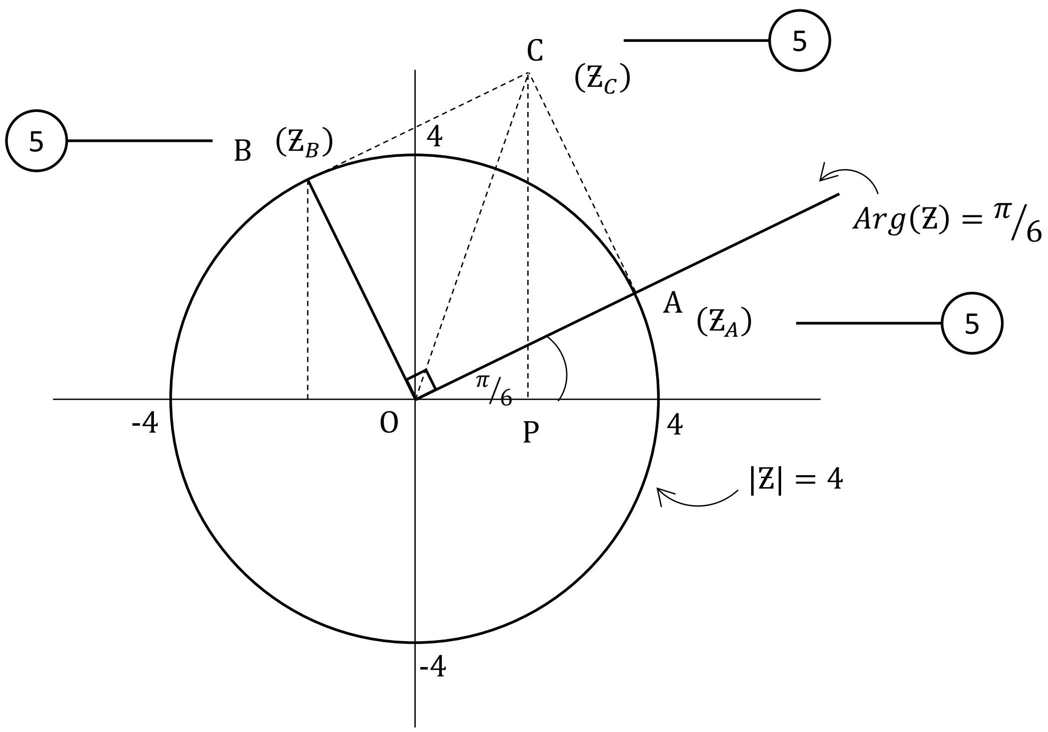
- $$\frac{(z_1)^2-(z_2)^2}{z_1z_2} = \frac{(z_1+z_2)(z_1-z_2)}{z_1z_2}$$

$$= \frac{(z_1+z_2)z_1}{z_1z_2} - \frac{(z_1+z_2)z_2}{z_1z_2} \quad \text{———} \; 5$$

$$= \left(\frac{z_1+z_2}{z_2}\right) - \left(\frac{z_1+z_2}{z_1}\right) \quad \text{———} \; 5$$

$$= (1+i) - (1-i)$$

$$= 2i \,/\!/$$



$$z_B = i\,z_A = z_A i$$

$$= z_A\left[\cos\left({}^{\pi}/_{2}\right) + i\sin\left({}^{\pi}/_{2}\right)\right]$$

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා 2 ක් ගුණ කිරීමේ දී ඒවායේ විස්ථාර එකතු වන බැවින්, හා මාපාංක ගුණ වන බැවින්,

Z_B යනු Z_A සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

විස්තාරය $= {}^{\pi}/_{2}$ හා $|Z| = 1$ වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ වූ විට ලැබෙන පිහිටීමයි.

∴ Z_B සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව රූපයේ පරිදි පිහිටිය යුතුයි.

දැන් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා 2 ක යෝගය පිළිබඳ ජ්‍යාමිතික අර්ථය සැලකීමෙන්,

OA හා OB බද්ධ පාද වූ සමාන්තරාස්‍රය, එනම් OACB සමචතුරස්‍රය සම්පූර්ණ කල විට (බද්ධ පාද 2 දිගින් සමාන $OA = OB = 4$ ඒකක හා ඒවා අතර කෝණය ${}^{\pi}/_{2}$ බැවින්) C හි පිහිටීම රූපයේ පරිදි ලැබේ.

∴ $Z_C = (Z_A + Z_B)$ වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව **ආගන්ඩ් තලය මත** C හි පිහිටයි.

දැන් OC විකර්ණය සලකමු.

එවිට $A\hat{O}C = \frac{{}^{\pi}/_{2}}{2} = {}^{\pi}/_{4}$ වේ.

තවද $X\hat{O}A = Arg(Z_A) = {}^{\pi}/_{6}$ වන බැවින්

$X\hat{O}C = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}, (= 75^0)$ වේ.

$\therefore Y\hat{O}C = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}, (= 15^0)$ වේ.

තවද $Y\hat{O}C = O\hat{C}P$ වේ. (ඒකාන්තර කෝණ)

එමෙන් ම,

$OP = Re(Z_C)$ හා

$PR = Im(Z_C)$ ද වේ.

$\therefore Tan\left({}^{\pi}/_{12}\right) = Tan(O\hat{C}P)$

$= \frac{OP}{PC}$

$= \frac{Re(Z_C)}{Im(Z_C)}$ —— 5

$z_C = z_A + z_B$

$= \left[4Cos\left(\pi/_6\right) + i\,4Sin\left(\pi/_6\right)\right] + \left[-4Cos\left(\pi/_3\right) + i\,4Sin\left(\pi/_3\right)\right]$

$= \left(2\sqrt{3} + 2i\right) + \left(-2 + 2\sqrt{3}\,i\right)$

$= 2\left(\sqrt{3} - 1\right) + i\,2\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\Rightarrow Re(z_C) = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$ හා ——— 5

$Im(z_C) = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)$ වේ. ——— 5

$\therefore Tan\left(\pi/_{12}\right) = \dfrac{Re(z_C)}{Im(z_C)} = \dfrac{2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2\left(\sqrt{3} + 1\right)}$

$= \left(\dfrac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} + 1\right)}\right)$ //

දැන් රූපයේ

- AB වෘත්ත චාපයෙන්, AC රේඛාවෙන් හා BC රේඛාවෙන් ආවෘත වර්ගඵලය සලකමු. (එය S නම්)

$S = (AOBC$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය$) - \dfrac{1}{4}\,(r = 4$ වූ වෘත්තයක වර්ගඵලය$)$ ——— 5

$= (4\,.\,4) - \dfrac{1}{4}\,\pi(4)^2$

$= 16\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ——— 5

$= 4\,(4 - \pi)$ වර්ග ඒකක //

14. (a). $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ සඳහා $f(x) = \frac{2(3-x-x^2)}{(x-2)^3}$ විට $f(x)$ හි x විශයයෙන් ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය වන $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{2(x+7)(x-1)}{(x-2)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න. තවදුරටත් $f(x)$ දෙවන ව්‍යුත්පන්න වන $f''(x)$, $f''(x) = \frac{4(x+3)}{(x-2)^4} - \frac{4}{(x-2)} f'(x)$ බව ලබාගන්න. ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය -ස්පර්ශෝන්මුඛ- අක්ෂ මත අන්තඃඛණ්ඩ පැහැදිලිව දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරය දළ සටහන් කරන්න. $f''_{(x)} = \frac{-4(x^2+11x-8)}{(x-2)^5}$ බව දී ඇත. ($\sqrt{153} \approx 12.4$ ලෙස උපකල්පනය කරන්න) $y = f(x)$ වක්‍රයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය ලබා ගන්න. .

(b). තමාගේ ඇස් මට්ටමට උස h වූ තැනැත්තෙකු සිරස් බිත්තියක සිට යම් දුරක තිරස් බිමෙහි නැවතී බිත්තියේ සිරස්තලයේ එල්ලා ඇති පින්තූරයක් නරඹයි. එම පින්තූරයේ උස 3h වන අතර එහි පහල තිරස් දාරය තිරස් බිමට 2h උඩින් පිහිටයි. පින්තූරය මගින් සිරස් තලයේ ඇසෙහි ආපාතනය කෙරෙන කෝණය උපරිම වීම සඳහා නිරීක්ෂකයා බිත්තියේ සිට කොපමණ දුරකින් තිරස්ව පොළොව මත සිට පින්තූරය නැරඹිය යුතු ද?

$$f(x) = \frac{2(3-x-x^2)}{(x-2)^3}$$

5   5

$$\frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{(x-2)^3(-2-4x) - 2(3-x-x^2)3(x-2)^2}{(x-2)^6}$$

$$= \frac{-2x - 4x^2 + 4 + 8x - 18 + 6x + 6x^2}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{2x^2 + 12x - 14}{(x-2)^4} \quad \text{——— } 5$$

$$f'(x) = \frac{2(x+7)(x-1)}{(x-2)^4} \quad /\!/$$

යලිත් x විශයයේ අවකලනයෙන්,

$$\frac{d[f'(x)]}{dx} = \frac{(x-2)^4(4x+12) - (2x^2+12x-14)\,4(x-2)^3}{(x-2)^8} \quad \text{——— } 5$$

$$= \frac{(x-2)^4.\ 4(x+3)}{(x-2)^8} - \frac{4}{(x-2)} \cdot \frac{2(x^2+6x-7)}{(x-2)^4} \quad \text{——— } 5$$

$$= \frac{4(x+3)}{(x-2)^4} - \frac{4}{(x-2)} f'(x) \quad /\!/$$

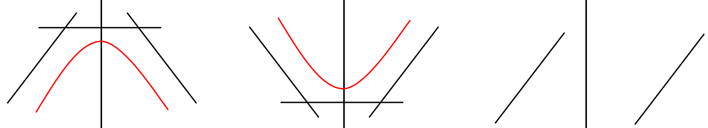
$y = f(x)$ වක්‍රය මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සඳහා $f'(x) = 0$ විට, 5

$$\frac{2(x+7)(x-1)}{(x-2)^4} = 0 \Rightarrow x = -7\,,\ \ x = 1$$ 5

තව ද, $f'(x)$ හි ''හරය $=0$'' විට x = 2

- මෙම x අගයයන් 3 සලකා වගුවක් පිළියෙල කිරීමෙන්,

	$x < -7$	$-7 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(-)	(+)	(+)



5 5

$y = \frac{26}{243}$ $y = -2$ $y \to \infty$

- $y = f(x)$ වක්‍රය මගින් $y -$ අක්ෂය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය (y - මත අන්තඃඛණ්ඩය) සඳහා
  $x = 0$ විට $f(o) = {}^{-3}/_{4} \Rightarrow (0, {}^{-3}/_{4})$ 5

- $x -$ අක්ෂය මත අන්තඃඛණ්ඩ සඳහා $y = 0$ විට

  $$0 = \frac{2(3-x-x^2)}{(x-2)^3} \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

  $$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$ 5

  $$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, (\approx -2.2) \Rightarrow (-2.2\,, 0)$$

  $$x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, (\approx 1.2) \Rightarrow (-1.2\,, 0)$$

- $y = \dfrac{-2x^2 - 2x + 6}{(x-2)^3}$ බැවින්

  $$y = \frac{-2x^2 - 2x + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

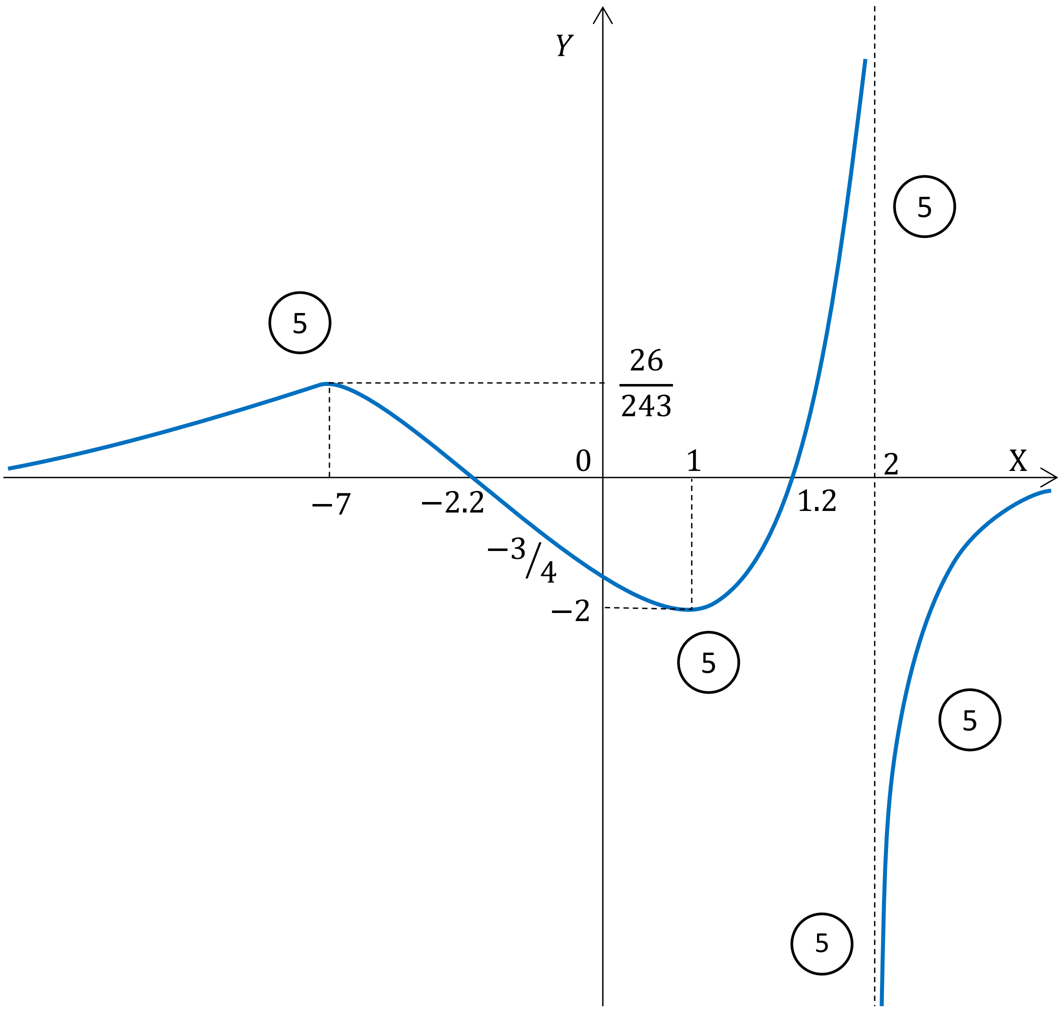
$$= \frac{\left(\frac{-2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right)}$$

$x \to \pm\infty$ විට
$$y = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0 - 0} \quad \Rightarrow$$

$x \to \pm\infty$ විට
$y \to 0$ වේ
(තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ රේඛා) —— 5

- $x = 2$ විට, $y \to \infty$

  $\therefore x = 2$ යනු සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ රේඛාවකි. —— 5



$y = f(x)$ මත නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය (පවතීනම්) හඳුනාගැනීම සඳහා,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4(x^2+11x-8)}{(x-2)^5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{153}}{2}$$

$$= \frac{-11 \pm 12.4}{2} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \oplus, \; x_1 = 0.7 \\ \ominus, \; x_2 = -11.7 \end{array}$$

	$-\infty < x < -11.7$	$-11.7 < x < 0.7$	$0.7 < x < 2$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

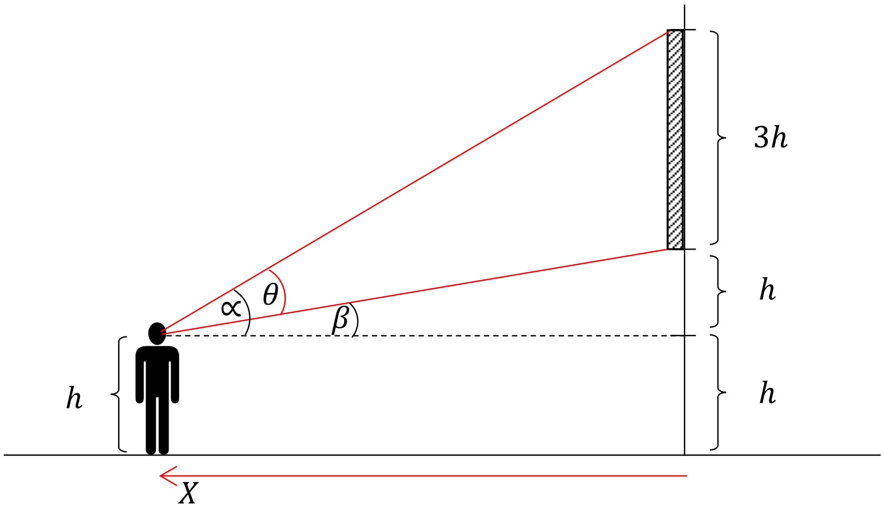
5 5

$\therefore$ $x = -11.7$ දී $f''(x)$ හි ලකුණ $\oplus$ සිට $\ominus$ දක්වාත්,

$x = 0.7$ දී $f''(x)$ හි ලකුණ $\ominus$ සිට $\oplus$ දක්වාත්, වෙනස් වේ.

$\therefore$ $x = -11.7$ හා $x = 0.7$ යනු $f(x)$ මත නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයනට අනුරූප x අගයයන් ය. 5

(b).



$$\theta = \propto - \beta$$

$$\tan\,\theta = \tan(\propto - \beta)$$

$$= \frac{\tan \propto - \tan\beta}{1 + \tan\propto .\ \tan\beta} \quad 5$$

$$= \frac{\left(\frac{4h}{x} - \frac{h}{x}\right)}{1 + \left(\frac{4h}{x}\right)\left(\frac{h}{x}\right)}$$

$$= \frac{3hx}{x^2 + 4h^2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta \quad = tan^{-1}\left(\frac{3hx}{x^2 + 4h^2}\right) \qquad 5$$

$$\therefore \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\left(1 + \frac{9h^2\, x^2}{[(x^2 + 4h^2)^2]}\right)} \left[\frac{(x^2 + 4h^2)\, 3h - 3hx(2x)}{(x^2 + 4h^2)^2}\right] \qquad 5$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 4h^2)^2 + 9h^2\, x^2}\, [3h\,(x^2 + 4h^2 - 2x^2)]$$

$$= \frac{3h\,(4h^2 - x^2)}{(x^2 + 4h^2)^2 + 9h^2\, x^2}$$

θ හි උපරිම / අවම සඳහා

$\frac{d\theta}{dx} = 0$ විට 5

$$\Rightarrow \quad \frac{3h\,(4h^2 - x^2)}{(x^2 + 4h^2)^2 + 9h^2\, x^2} = 0 \qquad 5$$

$$\Rightarrow \quad 4h^2 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4h^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\, 2h \qquad 5$$

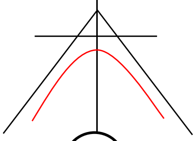
නමුත් $x > 0$ බැවින්

$x \neq -2h$ වේ.

$\therefore \quad x = 2h$ වේ. 5

දැන්

	$0 < x < 2h$	$2h < x$
$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$ ලකුණ	(+)	(-)



5

∴ $x = 2h$ විට, θ සඳහා උපරිමයක් පවතී.

∴ තම ඇසෙහි ආපාතනය වන කෝණය උපරිම වීම සඳහා නිරීක්ෂකයා පින්තූරය එල්ලා ඇති බිත්තියේ සිට 2h ලම්භක දුරකින් සිට පින්තූරය නැරඹිය යුතු ය. —— 5

15. (a) $x^3 = 2\tan^2\theta$ ආදේශය යෙදීමෙන් ($x > 0$ සඳහා) $\int \sqrt{x(2 + x^3)}\, dx$

අනුකලනය කරන්න.

(b). $\int_o^a f(x)dx = \int_o^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න. ප්‍රතිඵලය යොදා ගැනීමෙන් හා

$\int_o^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3 2\theta}\, d\theta$ අනුකලනය සැලකීමෙන් $\int_o^{\pi/2} \sec^3 2\theta = 0$ බව අපෝහණය කරන්න.

(c). $\int_o^{\pi} \frac{e^{2x}\cos x - e^x \cos x}{1 - e^x}\, dx$ අනුකලය අගයන්න.

(a). $x^3 = 2\tan^2\theta$ විට

$3x^2 dx = 4\tan\theta \sec^2\theta\, d\theta$ —— 5

$$I_o = \int \sqrt{x(2 + x^3)}\, dx$$

$$= \int x^{1/2}\sqrt{2 + x^3}\, dx$$

$$= \int \frac{x^2\sqrt{2 + x^3}}{x^{3/2}}\, dx \qquad \text{—— 5}$$

$$= \int \frac{\sqrt{(2 + 2\tan^2\theta)}}{\sqrt{2}\tan\theta} \frac{4}{3}\tan\theta \sec^2\theta\, d\theta \qquad \text{—— 5}$$

—— 5

$$= \int \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{(1+\tan^2\theta)}}{\sqrt{2}} \frac{4}{3} \sec^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\int \sec^3\theta\ d\theta \qquad 5$$

$I = \int \sec^3\theta\ d\theta$ යැයි සිතමු.

$$I = \int \sec\theta . \sec^2\theta\ d\theta$$

$$= \int \sec\theta . \frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\ d\theta \qquad 5$$

$$= \sec\theta . \tan\theta - \int \tan\theta . \frac{d}{d\theta}(\sec\theta)\ d\theta \qquad 5$$

$$= \sec\theta . \tan\theta - \int \tan\theta .\ \sec\theta\ \ \tan\theta\ d\theta \qquad 5$$

$$= \sec\theta . \tan\theta - \int \sec\theta\,(\sec^2\theta - 1)\ d\theta \qquad 5$$

$$= \sec\theta . \tan\theta - \underbrace{\int \sec^3\theta\ d\theta}_{I} + \int \sec\theta\, d\theta \qquad 5$$

$$\therefore 2I = \sec\theta . \tan\theta + \int \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)}\ d\theta$$

$$= \sec\theta . \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \qquad 5$$

$$I_o = \frac{4}{3} I$$

$$= \frac{4}{3} . \frac{1}{2} [\sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|] \qquad 5$$

$$= \frac{2}{3} \sec\theta \tan\theta + \frac{2}{3} \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c \quad // \qquad 5$$

(b). $I = \int_o^a f(x)dx$ යැයි සිතමු.

මෙහි $x = a - X$ ලෙස ආදේශ කළ විට $\qquad 5$

$dx = -dX \qquad 5$

<u>සීමා</u> $\begin{pmatrix} x = o \text{ විට} \\ X = a \end{pmatrix}$ හා $\begin{pmatrix} x = a \text{ විට} \\ X = o \end{pmatrix}$ වේ. $\qquad 5$

$$\therefore I = \int_a^o f(a-X)(-)\,dX = -\int_a^o f(a-X)\,dX \quad \text{—— } 5$$

$$= \int_o^a f(a-X)\,dX$$

දැන්, විචල්‍යය $X \to x$ ලෙස සැලකූ විට, (නිශ්චිත අනුකලනයක් විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත බැවින්) —— 5

$$I = \int_o^a f(a-x)\,dx \quad \text{වේ.}$$

$$\therefore \int_o^a f(x)\,dx = \int_o^a f(a-x)\,dx \quad \text{වේ.}$$

දැන් $\int_o^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3 2\theta}\,d\theta$ සඳහා ඉහත ප්‍රතිඵලය යෙදූ විට —— 5

$$\int_o^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3 2\theta}\,d\theta = \int_o^{\pi/2} \frac{\sin^2(\pi/2-\theta)}{\cos^3(\pi-2\theta)}\,d\theta = \int_o^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{-\cos^3 2\theta}\,d\theta \quad \text{—— } 5$$

$$\therefore \int_o^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3 2\theta}\,d\theta + \int_o^{\pi/2} \frac{\cos^2\ \theta}{\cos^3 2\theta}\,d\theta = 0 \Rightarrow \int_o^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3 2\theta}\right) d\theta = 0 \quad \text{—— } 5$$

$$\Rightarrow \int_o^{\pi/2} \sec^3 2\theta\ d\theta = 0 \quad /\!/$$

(C). $I_c = \int_o^{\pi} \frac{e^{2x}\cos x - e^x\cos x}{1-e^x}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$$\therefore I_c = \int_o^{\pi} \frac{e^x.e^x\cos x - e^x\cos x}{-(e^x-1)}\,dx \quad \text{—— } 5$$

$$= \int_o^{\pi} \frac{-e^x\cos x\,(e^x-1)}{(e^x-1)}\,dx = \int_o^{\pi} -e^x\cos x\ \ dx \quad \text{—— } 5$$

$$= \int_{\pi}^{o} e^x\cos x\ \ dx \quad \text{—— } 5$$

$$= \int_{\pi}^{o} \cos x\,.\frac{d(e^x)}{dx}\,dx \quad \text{(කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්)} \quad \text{—— } 5$$

$$= [e^x\cos x]_{\pi}^{o} - \int_{\pi}^{o} e^x.\ \frac{d(\cos x)}{dx}\,dx \quad \text{—— } 5$$

$$= [e^o.\cos o - e^{\pi}.\cos\pi] + \int_{\pi}^{o} e^x.\sin x\,dx \quad \text{—— } 5$$

$$= [1 + e^{\pi}] + \int_{\pi}^{o} \sin x\,.\,\frac{d(e^x)}{dx}\,dx$$ – (යලි කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යෙදීමෙන්)

$$= [1 + e^{\pi}] + [\sin x.e^x]_{\pi}^{o} - \int_{\pi}^{o} e^x\,.\frac{d(\sin x)}{dx}\,dx$$ —— 5

$$= [1 + e^{\pi}] + [\sin o.e^{o} - \sin \pi.e^{\pi}] - \int_{\pi}^{o} e^x \cos x\,dx$$ —— 5

$$I_c = [1 + e^{\pi}] - I_c$$ —— 5

$$\therefore 2I_c = [1 + e^{\pi}]$$

$$I_c = \frac{1}{2}[1 + e^{\pi}] \;/\!/$$ —— 5

16. $m > 0$ වූ $l_1 \equiv y = mx$ හා $l_2 \equiv 2mx - 3y + 1 = 0$ වන $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ රේඛා 2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන P හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

- මෙම P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ O මූලයේ සිට ඒකක $\sqrt{2m}$ ක දුරිනි. $m = 1$ බව පෙන්වන්න.
- $l_1 = O$ හා $l_2 = O$ රේඛා 2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යමින් $x-$ අක්ෂ්‍යය

  මත ධන දිශාවෙන් ඒකක 2 ක අන්තඃඛණ්ඩයක් සාදන $l_3 = O$ රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

- $l_2 = O$ රේඛාව $y-$ අක්ෂය ඡේදනය කෙරෙන ලක්ෂ්‍යය A හා $l_3 = 0$ රේඛාව $x-$ අක්ෂය ඡේදනය කෙරෙන ලක්ෂ්‍යය B විට O, A හා B ලක්ෂ්‍ය 3 හරහා යන $S_1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගන්න.
- තවද P කේන්ද්‍රය හා PA අරය වූ $S_2 = 0$ වෘත්තය ද සොයන්න.
- $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත එකිනෙක ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.
- P කේන්ද්‍රය වූ ද $S_1 = 0$ සමග ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන්නාවූ වෘත්තය සොයන්න.

$l_1 \equiv y = mx$ හා $l_2 \equiv 2mx - 3y + 1 = 0$ විසඳීමෙන්

$$2mx - 3(mx) + 1 = 0$$

$$\therefore x = {}^{1}\!/_{m} \Rightarrow y = m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$$

$$\therefore p \equiv \left({}^{1}\!/_{m}, 1\right) \;/\!/$$ —— 5 5

$O \equiv (0,0)$ සිට P ට දුර ඒකක $\sqrt{2m}$ බැවින්,

$\sqrt{\left(\frac{1}{m}-o\right)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2m}$ 5

$\frac{1}{m^2}+1=2m$

$1+m^2=2m^3$

$2m^3-m^2-1=0$

$(m-1)(2m^2+m+1)=0$ 5

$\Delta\, m<0 \implies m$ සඳහා තාත්ත්වික මූල නොපවතී. 5

$\therefore m=1$ // 5

$\ast\ l_1 \equiv mx-y=0$ හා $l_2 \equiv 2mx-3y+1=0$

$m=1$ විට $\rightarrow$ $l_1 \equiv x-y=0$ හා

$l_2 \equiv 2x-3y+1=0$ වේ.

$l_1=0$ හා $l_2=0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන

ඕනෑම සාධාරණ රේඛාවක් $l_1+\lambda l_2=0$ ලෙස දැක්විය හැක. $\lambda \in \mathbb{R}$

$\therefore x-y+\lambda(2x-3y+1)=0$ 10

අවශ්‍ය රේඛාව $x-$ අක්ෂය මත සාදන අන්තඃඛණ්ඩය $+2$ බැවින් එය (2,0) හරහා යයි. 5

$\therefore$ (2,0) ආදේශයෙන් $\rightarrow$ $2-0+\lambda(2.2-3.0+1)=0,\ \lambda=-{}^{2}/_{5}$ ලෙස ලැබේ. 5

$\therefore$ අවශ්‍ය රේඛාව

$l_3 \equiv x-y-\frac{2}{5}(2x-3y+1)=0$

$l_3 \equiv x+y-2=0$ // 5

$l_2=0-y-$ අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යය, $A \equiv \left(0,\ {}^{1}/_{3}\right)$ 5

$l_3=0-x-$ අක්ෂය කැපෙන ලක්ෂ්‍යය, $B \equiv (2\,,0)$ 5

තව ද, $O \equiv (0,0)$

O, A, B ලක්ෂ්‍ය 3 ම හරහා යන වෘත්තය,

$S_1 \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1\,y+c_1=0$ යැයි ගනිමු.

$O\ (0,0) \rightarrow\ 0+0+0+0+C_1=0$

$C_1=0$ // 5

$A\,(0, {}^{1}/_{3}) \rightarrow\ 0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2g_1(0) + 2f_1\left(\frac{1}{3}\right) + 0 = 0$

$f_1 = \frac{-1}{6}$ // ——— 5

$B\ (2,0) \rightarrow\ 2^2 + 0^2 + 2g_1(2) + 2f_1(0) + 0 = 0$

$g_1 = -1$ // ——— 5

∴ අවශ්‍ය වෘත්තය,

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2\left(\frac{-1}{6}\right)y + (0) = 0$ ——— 5

$3x^2 + 3y^2 - 6x - y = 0$ //

$\ast\quad P \equiv ({}^{1}/_{m}, 1) \xrightarrow{m=1} P \equiv (1,1)$ හා $A \equiv (0, {}^{1}/_{3})$

$\therefore\ PA \equiv \sqrt{(1-0)^2 + \left(1 - {}^{1}/_{3}\right)^2}$

$\equiv \sqrt{1 + {}^{4}/_{9}}$

$\equiv \frac{\sqrt{13}}{3}$ ඒකක. ——— 5

P කේන්ද්‍රය හා PA අරය වූ $S_2 = 0$ වෘත්තය,

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2\,y + c_2 = 0$ යැයි සිතමු.

කේන්ද්‍රය, $(-g_2, -f_2) \equiv P \equiv (1,1)$

$\Longrightarrow\ -g_2 = 1$ හා $-f_2 = 1$

$g_2 = -1$ // $f_2 = -1$ //

——— 5 ——— 5

තව ද, අරය $= PA$

$r = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - C_2}$

$\Longrightarrow\ \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - C_2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ ——— 5

$2 - c_2 = \frac{13}{9} \Rightarrow c_2 = \frac{5}{9}$ // —— 5

$\therefore S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2(-1)y + \left(\frac{5}{9}\right) = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + \left(\frac{5}{9}\right) = 0$ // —— 5

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්තවල නියතයන්,

$g_1 = -1$ $\quad$ $g_2 = -1$

$f_1 = -{}^1/_6$ $\quad$ $f_2 = -1$

$c_1 = 0$ $\quad$ $c_2 = {}^5/_9$

මෙම S_1 හා S_2 වෘත්ත එකිනෙක ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ නම්,

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ අවශ්‍යතාව තෘප්ත විය යුතුයි.

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-1)(-1) + 2(-{}^1/_6)(-1)$

$= 2 + {}^1/_3 = {}^7/_3$ — ① —— 5

$c_1 + c_2 = 0 + \frac{5}{9} = {}^5/_9$ — ② —— 5

${}^7/_3 \neq {}^5/_9$

$\Rightarrow 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2$ වේ. (සමාන නොවේ)

$\therefore$ S_1 හා S_2 වෘත්ත ප්‍රලම්භ නොවේ. —— 5

දැන්

$P \equiv (1,1)$ කේන්ද්‍රය වූ ද, $S_1 \equiv 3x^2 + 3y^2 - 6x - y = 0$ සමග ප්‍රලම්භ වූ ද වෘත්තය,

$S_3 \equiv x^2 + y^2 + 2g_3x + 2f_3y + c_3 = 0$ යැයි සිතමු.

කේන්ද්‍රය $\equiv (-g_3, -f_3) \equiv P(1,1)$ බැවින්

$-g_3 = 1$ $\quad$ හා $\quad$ $-f_3 = 1$ $\quad$ වේ.
$g_3 = -1$ $\quad\quad\quad$ $f_3 = -1$

5 $\quad$ 5

S_3 හා S_1 වෘත්ත ප්‍රලම්භ බැවින්,

$$2g_3g_1 + 2f_3f_1 = c_3 + c_1 \qquad 5$$

$$2(-1)(-1) + 2(-1)\left(\frac{-1}{6}\right) = c_3 + 0 \implies c_3 = {}^7/_3$$

$$\therefore S_3 \equiv x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2(-1)y + \frac{7}{3} = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 7 = 0 \quad // \qquad 5$$

17. (a). සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **'කෝසයින් නීතිය'** ප්‍රකාශ කරන්න.

i. ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාද වල දිග පිළිවෙලින් $(x+y), x$ හා $(x-y)$ වේ.

$\cos A = \frac{x-4y}{2(x-y)}$ බව පෙන්වන්න.

ii. $y = {}^x/_7$ නම් $A = \cos^{-1}({}^1/_4)$ බව ලබාගන්න.

iii. ත්‍රිකෝණයක පාද 3 හි දිග ආරෝහණ පිළිවෙලින් සැලකූ විට 6:7:8 අනුපාතයට පිහිටයි. මෙම ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය, $\cos^{-1}({}^1/_4)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b). $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

බව සාධනය කර,

$(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

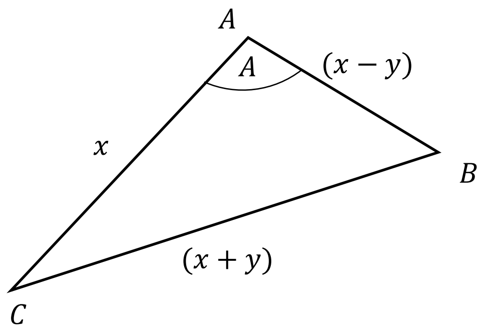
(c). $2\tan^{-1}(\sin x) - \tan^{-1}(2\sec x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a.) **සුළුකෝණී, සෘජුකෝණී** හෝ **මහාකෝණී** වූ ඕනෑම, **සම්මත අංකනය** සහිත ත්‍රිකෝණයක් සඳහා

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \qquad 10$$

වේ.

(i)



$$\cos A = \frac{x^2 + (x-y)^2 - (x+y)^2}{2x(x-y)} \quad 5$$

$$= \frac{x^2 - 4xy}{2x(x-y)} \quad 5$$

$$\therefore \cos A = \frac{x - 4y}{2(x-y)} \quad //$$

$y = {}^{x}/_{7}$ විට

$$\cos A = \frac{x - 4\frac{x}{7}}{2(x - \frac{x}{7})} \quad 5$$

$$= \frac{3\,{}^{x}/_{7}}{12\,{}^{x}/_{7}} \quad 5$$

$$\therefore \cos A = {}^{1}/_{4} \Rightarrow A = \cos^{-1}({}^{1}/_{4}) \quad //$$

(ii). ත්‍රිකෝණයක පාද 3 දිගින්, 6:7:8 අනුපාතයට පිහිටයි නම් එවිට එම පාදවල දිග ආරෝහණ පිළිවෙලට සැලකූ විට $\frac{6x}{7}, \frac{7x}{7}$ හා $\frac{8x}{7}$ ලෙසින් නිරූපනය කළ හැකි. 5

එවිට එම දිග $\left(x - \frac{x}{7}\right), x$ හා $\left(x + \frac{x}{7}\right)$ වේ. ${}^{x}/_{7} = y$ ලෙස ගත් විට. 5

$\Rightarrow (x-y), x$ හා $(x+y)$ වේ. එවිට මෙහි දිගම පාදය 5

$(x+y)$ බැවින් එයට සම්මුඛව පිහිටි විශාලතම කෝණය (පෙර කොටසේ සාධනයෙන්)

$= \cos^{-1}({}^{1}/_{4})$ වේ. 5

(b). $(\cos\propto + \cos\beta)^2 + (\sin\propto + \sin\beta)^2$

$= \cos^2\propto + \sin^2\propto + \cos^2\beta + \sin^2\beta + 2(\cos\propto\cos\beta + \sin\propto\sin\beta)$ 5

$= 2 + 2\cos(\propto - \beta)$

$= 2 + 2\cos 2\left(\frac{\propto - \beta}{2}\right)$ 5

$$= 2 + 2\left[2\cos^2\left(\frac{\propto - \beta}{2}\right) - 1\right]$$ 5

$$= 2 + 4\cos^2\left(\frac{\propto - \beta}{2}\right) - 2$$ 5

$$= 4\cos^2\left(\frac{\propto - \beta}{2}\right) \, /\!/$$

ඉහත ප්‍රතිඵලයේ $\propto = x$ හා $\beta = 3x$ ලෙස ආදේශ කල විට,

$$(\cos\propto + \cos\beta)^2 + (\sin\propto + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\propto - \beta}{2}\right)$$

$$(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = 4\cos^2\left(\frac{x - 3x}{2}\right)$$ 10

දැන්

$(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = 1$ ලෙස දී ඇති බැවින්

$$1 = 4\cos^2\left(\frac{-2x}{2}\right)$$ 5

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$, ($\therefore \cos(-\theta) = \cos\theta$ බැවින්)

$$\cos x = \pm\, {}^{1}/_{2}$$ 5

$\oplus$ සලකා

$\cos x = {}^{1}/_{2}$

$\cos x = \cos({}^{\pi}/_{3})$

$x = 2n\pi \pm {}^{\pi}/_{3} \, /\!/$

5 $\quad n \in \mathbb{Z}$

$\ominus$ සලකා

$\cos x = -{}^{1}/_{2}$

$\cos x = -\cos({}^{\pi}/_{3})$

$\cos x = \cos(\pi - {}^{\pi}/_{3})$

$\cos x = \cos\left(2\,{}^{\pi}/_{3}\right)$ 5

$x = 2n\pi \pm 2\,{}^{\pi}/_{3} \, /\!/$

5 $\quad n \in \mathbb{Z}$

(c). $2\tan^{-1}(\sin x) - \tan^{-1}(2\sec x) = 0$

$\tan^{-1}(\sin x) = \propto$ හා $\tan^{-1}(2\sec x) = \beta$ විට

$\tan \propto = \sin x$ හා $\tan \beta = 2\sec x$ වේ.

එවිට,

$$2\propto - \beta = 0 \quad \text{———} \; 5$$

$$2\propto = \beta$$

$$\tan 2\propto = \tan\beta \quad \text{———} \; 5$$

$$\frac{2\tan\propto}{1-\tan^2\propto} = \tan\beta \quad \text{———} \; 5$$

$$2\sin x = 2\sec x\,(1-\sin^2 x)$$

$$\sin x = \sec x\,(\cos^2 x) \quad \text{———} \; 5$$

$$\sin x = Cos\, x$$

$$\cos\left({}^{\pi}/_{2} - x\right) = \cos x \quad \text{———} \; 5$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} - x = 2n\pi \pm x$$

$$\oplus \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2n\pi + x \quad \text{———} \; 5$$

$$2x = {}^{\pi}/_{2} - 2n\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - 2n\right) \;/\!/ \qquad n \in \mathbb{Z} \quad \text{———} \; 5$$

$$\ominus \Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2n\pi - x$$

(x සඳහා විසඳුම් අනිර්ණ වේ.) ——— 5

අ.පො.ස. උසස් පෙළ

13 ශ්‍රේණිය

සංයුක්ත ගණිතය II

පැය තුනයි

Channel NIE

A කොටස

පිළිතුරු

(01). ස්කන්ධ පිළිවෙලින් $3m$ හා λm වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ අංශු 2 ක් සුමට තිරස් තලයක් මත, එකම සරළ රේඛාවක, ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවනට, පිළිවෙලින් λu හා u ප්‍රවේග වලින් චලිත වී සරළ ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු $3m$ අංශුව නිසලතාවට පත්විනි නම් අනෙක් අංශුව ලබාගන්නා ප්‍රවේගයත්, අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකයත් සොයන්න. තවදුරටත්, ගැටුම නිසා පද්ධතියේ කිසිදු ශක්ති හානියක් සිදු නොවිනි නම්

$\lambda = 1$ බව පෙන්වන්න.

මෙවිට ගැටුමේ දී අංශු අතර බලපෑ ආවේගය සොයන්න.

විසඳුම -

$\rightarrow$ $3m$ λm $\leftarrow$
λu u
(ගැ.මො.පෙර)

$3m$ $\leftrightarrow$ λm
I
(ගැටුම් මොහොත)

$3m$ λm
$\rightarrow o$ $\rightarrow v$
(ගැ.මො.පසු)

$\rightarrow$ නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්,

$$v - 0 = -e(-u - \lambda u)$$

$$v = (\lambda + 1)eu - (1)$$ 5

$\rightarrow$ රේ: ග: ස: නි:

$$\lambda m . v + 0 = -\lambda mu + 3m . \lambda u$$

$$v = 2u \;//$$ 5

$\therefore$ (1) $\Longrightarrow 2u = (\lambda + 1)eu$

$$e = \left(\frac{2}{\lambda + 1}\right) \;//$$ 5

කිසිදු ශක්ති හානියක් සිදු නොවිනි නම්, ගැටුම් ''පූර්ණ ප්‍රත්‍යස්ථ'' විය යුතුයි.

$\therefore e = 1$

එවිට $1 = \dfrac{2}{\lambda + 1}$ —— 5

$\Longrightarrow \lambda = 1$ //

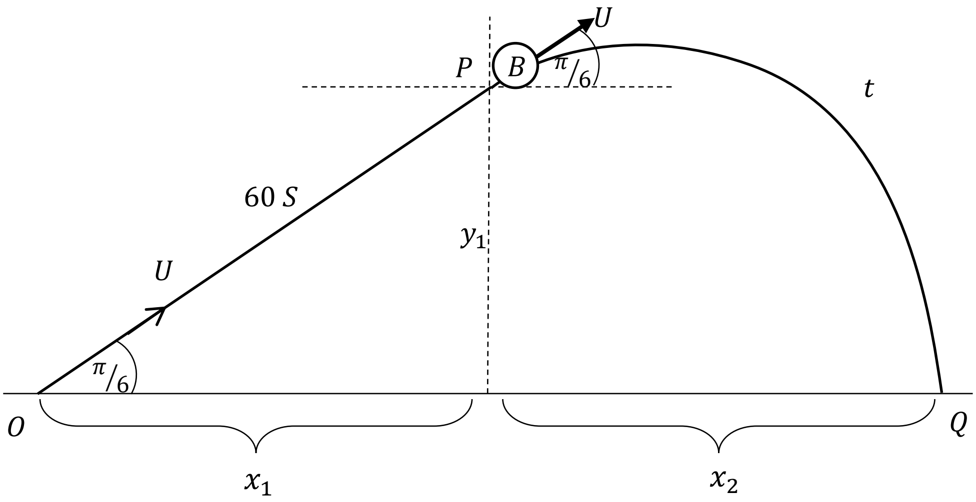
දැන් 3m ට $\leftarrow I = \Delta(mv)$

$I = o - (3m)(-\lambda u)$

$= 3mu$ // —— 5

(02). තිරස් ධාවන පථයක 360 Km h^{-1} වේගයෙන් ධාවන වූ යානයක් 0 ලක්ෂ්‍යයක දී තිරසට $^{\pi}/_{6}$ ආනතව ගුවන් ගත වී පැවති ප්‍රවේගයෙන් ඒකාකාරව මිනිත්තුවක් පියාසර කළ පසු එහි සිට බෝම්බයක් සීරුවෙන් මුදා හරී. බෝම්බය බිම පතිත වනුයේ තිරස් පොළව මත 0 සිට කොපමණ දුරකින් ද?

විසඳුම -



$u = 360 \times \dfrac{5}{18} m\, s^{-1}$

$= 100\, m\, s^{-1}$

$(o \rightarrow p)$ චලිතයට

$\nearrow s = ut$

$OP = (100)(60)$

$= 6000\, m$ —— 5

$\therefore x_1 = 6000 \cos\left(^{\pi}/_{6}\right)$

$= 3000\sqrt{3}\ m$ //

$y_1 = 6000 \cos(^{\pi}/_{3})$

$= 3000\ m$ //

මුදාහල බෝම්බයේ $(P \rightarrow Q)$ චලිතයට

$\uparrow s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$-3000 = u\cos(^{\pi}/_{3}).t - \dfrac{1}{2}(10)t^2$ —— 5

$-3000 = 50t - 5t^2$

$5t^2 - 50t - 3000 = 0$

$t^2 - 10t - 600 = 0$

$(t + 20)(t - 30) = 0$

$t > 0 \Longrightarrow t = 30\ s$ // —— 5

$\therefore OQ$ දුර $= x_1 + x_2$

$= 3000\sqrt{3} + 1500\sqrt{3}$

$= 4500\sqrt{3}\ m$

$= 4.5\sqrt{3}\ \ km$ // ——— 5

$\therefore\ (P \rightarrow Q)$ බෝම්බයට,

$\rightarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$x_2 = u\cos(\pi/6).t + 0$

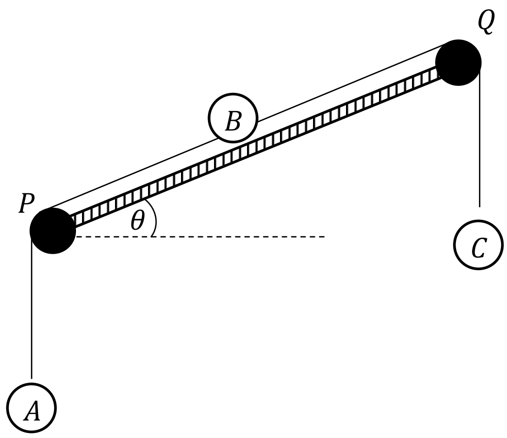
$= 100\frac{\sqrt{3}}{2}\ 30$

$= 1500\sqrt{3}\ m$ ——— 5

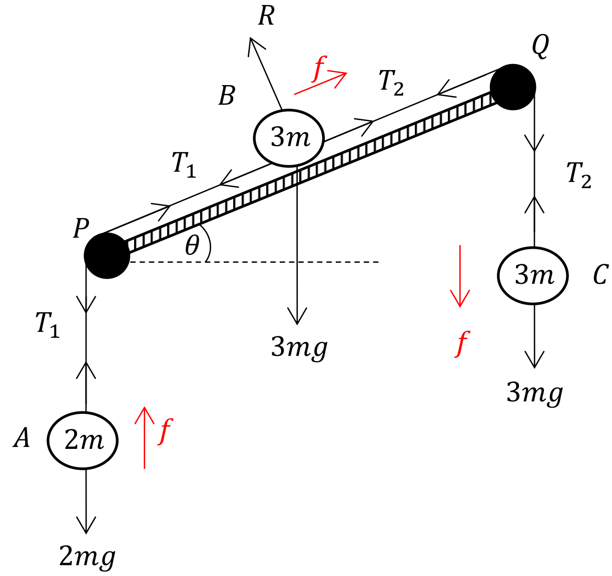
(03). රූපයේ පරිදි තිරසට θ ආනත තලයේ දෙකෙලවර P හා Q සුමට කප්පි 2 ක් සවිකර ඇත. ආනත තලය මත තබා ඇති B අංශුවට ඇඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු 2 ක් පිළිවෙලින් P හා Q කප්පි මතින් ගොස් කෙලවර දී A හා C අංශු දරයි. A, B, C අංශුවල ස්කන්ධ පිළිවෙලින් 2m, 3, හා 3m වේ. පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහල විට එහි ත්වරණය සොයන්න.

A අංශුව සිරස්ව ඉහලට චලනය වීමට නම්

$\theta < \sin^{-1}(1/3)$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.



පිළිතුර -



$F = ma$ යෙදීම

$(A), \uparrow \Longrightarrow T_1 - 2mg = 2mf \; - (1)$ ———— 5

$(C), \downarrow \Longrightarrow 3mg - T_2 = 3mf \; - (2)$ ———— 5

$(B), \nearrow \Longrightarrow T_2 - T_1 - 3mg\sin\theta = 3mf \; - (3)$ ———— 5

$(1) + (2) + (3) \Longrightarrow mg - 3mg\sin\theta = 8mf$

$f = \left(\frac{1 - 3\sin\theta}{8}\right) g \;\; //$ ———— 5

(A) අංශුව සිරස්ව ඉහලට චලනය වීමට නම්, $f > 0$ විය යුතුයි.

$\Longrightarrow \left(\frac{1 - 3\sin\theta}{8}\right) g > 0 \Longrightarrow 1 - 3\sin\theta > 0$ ———— 5

$\Longrightarrow \theta < \sin^{-1}(1/3) \;\; //$

(04). ක්ෂමතාව $10^3 HK \;\; W$ වූ රථයකට තැනිතලා මගෙහි $90\ km\ h^{-1}$ උපරිම ප්‍රවේගයක් ලබාගත හැක. රථයේ චලිතයට බලපාන මුලු ප්‍රතිරෝධය කොපමණ ද? මෙම රථය තිරසට $\pi/6$ ආනත, සරළ රේඛිය මගක ඉහලට $54\ km\ h^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ධාවනය වන මොහොතක එහි ත්වරණය ගණනය කරන්න.

රථයේ ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් K වන අතර මුලු ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතී.

විසඳුම -

$H = 10^3 HK$

$u = 90\ km\ h^{-1} -$ (උපරිම)

$= 90 \times \frac{5}{18}$

$= 25\ m\ s^{-1}$

$H = PV$

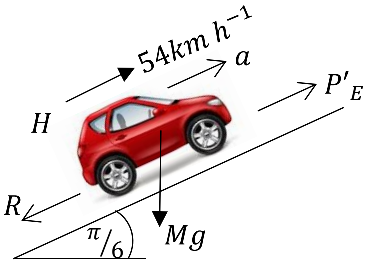
$10^3 HK = P_E . 25$ ———— 5

$P_E = 40HK\ N$

රථයට $\rightarrow \underline{F} = m\underline{a}$

$P_E - R = m(0) -$ ($\because$ උපරිම ප්‍රවේගය)

මුළු ප්‍රතිරෝධය $R = P_E = 40HK\ N \;\; //$ ———— 5



$$H = PV$$

$$10^3 HK = P'_E\left(54 \times \frac{5}{18}\right) \qquad 5$$

$$\therefore P'_E = \frac{200}{3}\ HK\ N$$

$$\nearrow F = ma$$

$$P'_E - R - mg\sin\left(\pi/_6\right) = ma \qquad 5$$

$$\frac{200}{3}HK - 40HK - 10^3 Kg\frac{1}{2} = 10^3 K.a$$

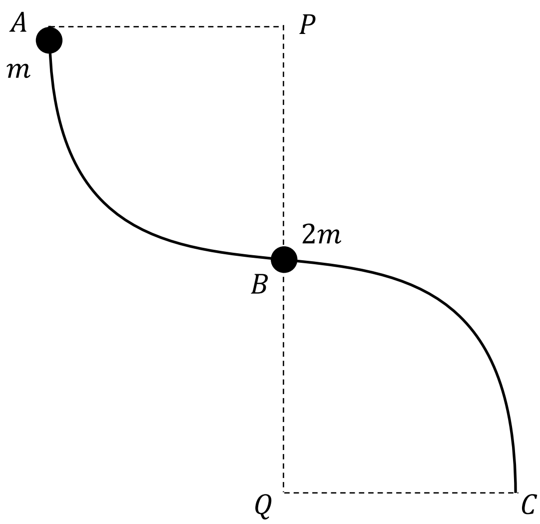
$$\frac{80H}{3} - 500g = 10^3 a$$

$$\left(\frac{8H}{3} - 50g\right)\frac{1}{500} = a$$

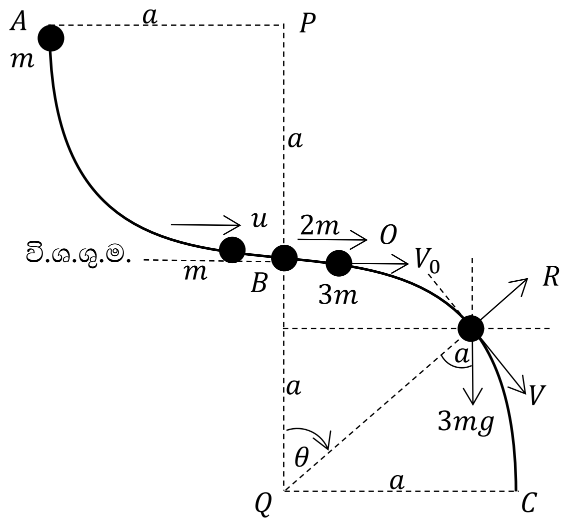
$$a = \frac{1}{750}(4H - 75g)\ m\,s^{-2} \ /\!/ \qquad 5$$

(05). එකම සිරස් තලයක රූපයේ දැක්වෙන AB හා BC සුමට සිහින් කම්බි, පිළිවෙලින් P හා Q කේන්ද්‍ර වූ හා සමාන අරයෙන් යුතු වූ වෘත්ත පාදක චාප කොටස් 2 කි.

B හි දී කම්බියට ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට පබළුවක් අමුණා නිසලව ඇති අතර එයින් අඩක ස්කන්ධයෙන් යුතු දෙවන අංශුවක් A දී කම්බියට අමුනා සීරුවෙන් මුදාහරී. එය B දී නිසලව ඇති පබළුව සමග ගැටී හා වේ. සංයුක්ත පබළුව හා කම්බිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව ශූන්‍යවන මොහොතේ දී එය හරහා යන අරය BQ සිරසින් උත්ක්‍රමණය වී ඇති කෝණය, $\cos^{-1}\left(20/_{27}\right)$ බව පෙන්වන්න.



පිළිතුර -



සංයුක්ත අංශුවේ වෘත්ත චලිත කොටස සලකා

$$\frac{1}{2}3mV_0^2 + O = \frac{1}{2}3m.V^2 - 3mg(a - a\cos\theta) \quad 5$$

$$V_0^2 = V^2 - 2ga(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{9}.2ga = V^2 - 2ga + 2ga\cos\theta$$

$$V^2 = ga\left[\frac{2}{9} + 2 - 2\cos\theta\right]$$

$$= ga[\frac{20}{9} - 2\cos\theta]$$

m ස්කන්ධ ($A \longrightarrow B$) චලිතයට

A දී (චාෘ ශෘ $+$ විෘ ශෘ) $=$ B දී (චාෘ ශෘ $+$ විෘ ශෘ)

$$O + mga = \frac{1}{2}mu^2 + O$$

$$u = \sqrt{2ga} \quad 5$$

B දී m හා 2m ගැටුම සලකා

රේෘගෘසෘනිෘ

$$3mV_0 = mu + 2mO$$

$$V_0 = \frac{u}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2ga} \quad 5$$

දැන් $\swarrow F = ma$

$$3mg\cos\theta - R = 3m\frac{V^2}{a} \quad 5$$

ප්‍රතික්‍රියාව ශූන්‍ය වන මොහොත සඳහා $R = 0$ විට

$$g\cos\theta = \frac{V^2}{a}$$

$$ga\cos\theta = ga\left[\frac{20}{9} - 2\cos\theta\right] \quad 5$$

$$3\cos\theta = \frac{20}{9}$$

$$\cos\theta = \frac{20}{27}$$

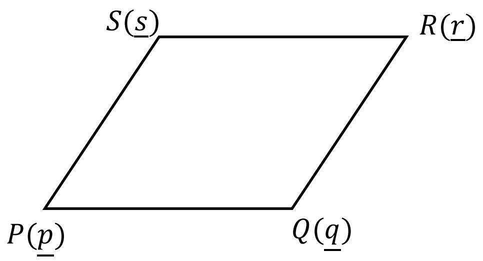
$$\theta = \cos^{-1}(20/27) \quad //$$

(06). O මූලය අනුබද්ධයෙන් PQRS රොම්බසයේ ශීර්ෂවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්

$\overrightarrow{OP} = -3\underline{i} - 5\underline{j}$, $\overrightarrow{OQ} = 3\underline{i} - 3\underline{j}$, $\overrightarrow{OR} = \propto \underline{i} + \beta\underline{j}$ හා $\overrightarrow{OS} = -\underline{i} + \underline{j}$ වේ.

$\propto$ හා β අගයයන් නිර්ණය කර PR හා QS විකර්ණ එකිනෙක ලම්බ සමච්ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න.

පිළිතුර -



$\overrightarrow{OP} = \underline{p} = -3\underline{i} - 5\underline{j}$

$\overrightarrow{OQ} = \underline{q} = 3\underline{i} - 3\underline{j}$

$\overrightarrow{OR} = \underline{r} = \propto \underline{i} + \beta \underline{j}$

$\overrightarrow{OS} = \underline{s} = -\underline{i} + \underline{j}$

❖ PQRS රොම්බසයක් බැවින්,

$$\left.\begin{matrix} PQ = SR \\ PQ \ // \ SR \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \\ \underline{q} - \underline{p} = \underline{r} - \underline{s} \end{matrix}$$

$(P \longrightarrow Q$ අභි දිශාව$) = (S \longrightarrow R$ අභි දිශාව$)$ $\quad 6\underline{i} + 2\underline{j} = (\propto +1)\underline{i} + (\beta - 1)\underline{j}$

$\Longrightarrow \propto +1 = 6 \quad$ හා $\quad \beta - 1 = 2$

5 $\quad \propto = 5 \ // \qquad \beta = 3 \ //$ $\quad$ 5

$\therefore R$ හි පිහිටුම් දෛශිකය

$\overrightarrow{OR} = \underline{r} = 5\underline{i} + 3\underline{j}$ වේ.

දැන්,

$\overrightarrow{PR} = \underline{r} - \underline{p} = 8\underline{i} + 8\underline{j}$

$\overrightarrow{SQ} = \underline{q} - \underline{s} = 4\underline{i} - 4\underline{j}$

$\therefore \overrightarrow{PR} . \overrightarrow{SQ} = \left(8\underline{i} + 8\underline{j}\right) . \left(4\underline{i} - 4\underline{j}\right)$

$= 32(\underline{i} . \underline{i}) - 32\left(\underline{i} . \underline{j}\right) + 32\left(\underline{j} . \underline{i}\right) - 32\left(\underline{j} . \underline{j}\right)$

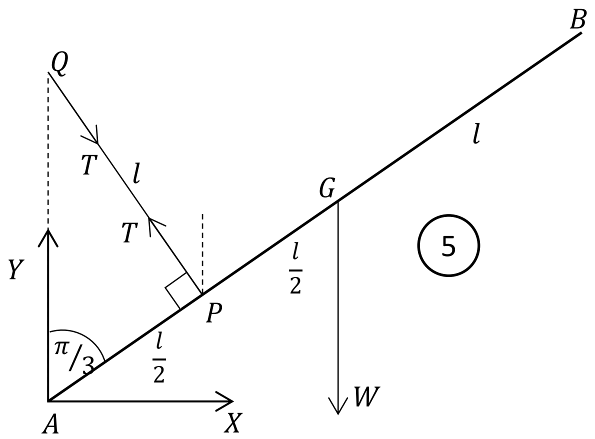
$= 32 - 32 = 0$ $\quad$ 5

$\therefore PR$ හා SQ විකර්ණ එකිනෙක $\perp$ වේ.

තව ද, PR හි ම: ල: $\equiv \left[\left(\frac{5-3}{2}\right) : \left(\frac{3-5}{2}\right)\right]$ $\equiv (1, -1)$ 5 QS හි ම: ල: $\equiv \left[\left(\frac{3-1}{2}\right) : \left(\frac{-3+1}{2}\right)\right]$ $\equiv (1, -1)$ 5 $\therefore PR$ හා QS හි ම: ල: සමපාත වන බැවින් ඒවා සමච්ඡේදනය වේ. $\therefore PR$ හි QS විකර්ණ එකිනෙක ලම්භ-සමච්ඡේදනය වේ. //	හෝ වෙනත් ක්‍රමයක්, PR හි ම: ල: පිහිටුම් දෛශිකය, $= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = 3\underline{i} - 5\underline{j} + \frac{1}{2}\left(8\underline{i} + 8\underline{j}\right)$ $= \underline{i} - \underline{j}$ — ① SQ හි ම: ල: පිහිටුම් දෛශිකය, $= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SQ} = -\underline{i} + \underline{j} + \frac{1}{2}\left(4\underline{i} + 4\underline{j}\right)$ $= \underline{i} - \underline{j}$ — ② ① = ② $\therefore$ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය සමපාත වේ.

(07). ඒකාකාර AB දණ්ඩක දිග $2l$ හා බර W වේ. එහි A කෙලෙවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුචලව අසව්කර දණ්ඩ උඩු සිරසට $\pi/3$ ආනතව - සමතුලිතව පවත්වාගනුයේ දණ්ඩේ P ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ අවිතත්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙලවර A ට සිරස්ව l ඉහලින් වූ Q ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳීමෙනි. $AP = l/2$ වේ. තන්තුව හා දණ්ඩ එකම සිරස් තලයක පවතී. නිවැරදි බල සටහන ඇඳ තන්තුවේ ආතතිය හා A හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

පිළිතුර -



5

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සලකා

$$\overset{\curvearrowleft}{A} = \overset{\curvearrowright}{A}$$

$$T(AP) = W\left(AG\cos {}^{\pi}/_{6}\right)$$

$$T.\frac{l}{2} = W.l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T = \sqrt{3}W \;/\!/ \quad \text{—— } 5$$

$$\uparrow = \downarrow$$

$$Y + T\cos {}^{\pi}/_{6} = W$$

$$Y = W - \sqrt{3}W\frac{\sqrt{3}}{2}$$

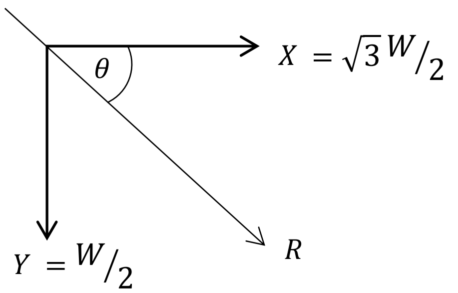
$$= -\frac{1}{2}W \;/\!/ \quad \text{—— } 5$$

$$\rightarrow = \leftarrow$$

$$X = T\cos {}^{\pi}/_{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}W \;/\!/ \quad \text{—— } 5$$

<u>∴ A හි බල</u>



$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3W^2}{4} + \frac{W^2}{4}}$$

$$= W \;/\!/$$

$$\tan\theta = {}^{Y}/_{X} = \frac{{}^{W}/_{2}}{\sqrt{3}\,{}^{W}/_{2}}$$

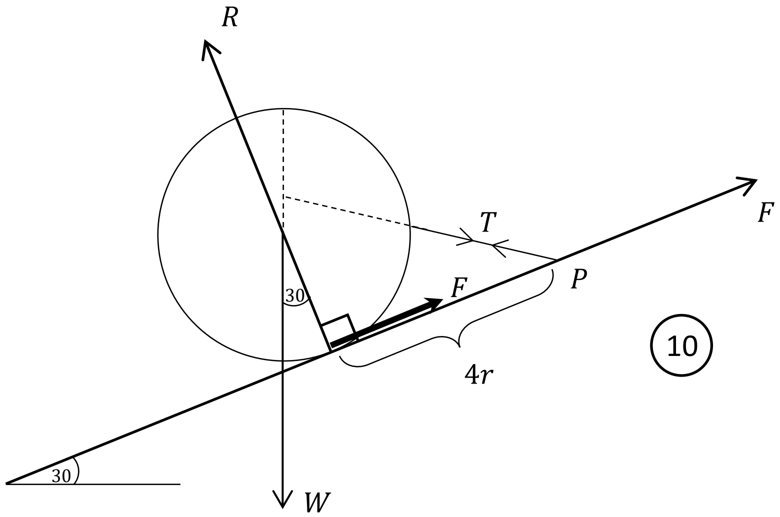
$$\theta = \tan^{-1}\left({}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)$$

$$\theta = {}^{\pi}/_{6} \;/\!/$$

5

(08). අරය $3r$ හා බර W වූ රළු ගෝලයක් තිරසට $^{\pi}/_{6}$ ආනත අචල රළු තලයක් මත සමතුලිත තබා ඇත්තේ ගෝලයේ පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් තලයමත ඉහල දිශාවෙන් වූ P ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳීමෙනි. ගෝලය හා තලයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ සිට P ට දුර $4r$ වේ. ගෝලය මත බල සියල්ල නිවැරදිව ලකුණුකර, ගෝලය මත තලයේ අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

පිළිතුර -



ගෝලයේ සමතුලිතතාව සලකා P වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\overset{\curvearrowleft}{P} = \overset{\curvearrowright}{P}$$

$$W\cos 30^0 \,.\, 4r + W\sin 30^0 \,.\, 3r \;= R\,.\,4r \qquad \text{—— } 10$$

$$W.\frac{\sqrt{3}}{2}\,.4 + W.\frac{1}{2}\,.3 = 4r$$

$$\therefore R = \frac{W}{8}\left(4\sqrt{3}+3\right) \;/\!/ \qquad \text{—— } 5$$

(09). A හා C සිද්ධීන් එකිනෙක ස්වායත්ත වූ, A, B, C සිද්ධි 3 ක් සඳහා පහත සම්භාවිත අගයයන් දී ඇත.

$$P(A) = \frac{1}{5}\,,\quad P(B) = \frac{1}{6}\,,\quad P(A \cap C) = \frac{1}{20} \quad \text{හා} \quad P(B \cup C) = \frac{3}{8}$$

C සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයා B හා C සිද්ධීන් 2 ද ස්වායත්ත වන බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -

A හා C සිද්ධීන් ස්වායත්ත බැවින්,

$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$ වේ.

$$\therefore \frac{1}{20} = \frac{1}{5}\,.P(C)$$

$$\therefore P(c) = \frac{1}{4} \;/\!/ \quad \text{———} \; 5$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(c) - P(B \cap C) \quad \text{———} \; 5$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - P(B \cap C)$$

$$\therefore P(B \cap C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}$$

$$= \frac{4+6-9}{24}$$

$$= \frac{1}{24} \; - \; (1) \quad \text{———} \; 5$$

$$P(B)\,P(C) = \frac{1}{6}\,.\frac{1}{4} = \frac{1}{24} \; - \; (2) \quad \text{———} \; 5$$

$$(1) = (2)$$

$\Longrightarrow P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$ වේ.

$\therefore$ B හා C සිද්ධීන් 2 ද ස්වායත්ත වේ. } 5

(10). 1, 2, 8, 9 යන සංඛ්‍යා කුලකයට x නැමැති ධන සංඛ්‍යාවට ඇතුළත් කළ විට මධ්‍යන්‍යය 1 කින් වැඩි වේ.

x හි අගය සොයා, x ඇතුළත් කිරීම නිසා සිදු වූ සම්මත අපගමනයේ වැඩිවීම $\left(\frac{2\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}\right)$ බව පෙන්වන්න.

පිළිතුරු -

මුල් සංඛ්‍යා කුලකය

$1,\ 2,\ 8,\ 9$

$$\bar{x}_1 = \mu_1 = \frac{1+2+8+9}{4}$$

$$= 5 \quad \text{—— } 5$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$$

$$= \frac{(5-1)^2+(5-2)^2+(5-8)^2+(5-9)^2}{4}$$

$$= \frac{16+9+9+16}{4}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{25}{2}$$

$$\therefore \sigma_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{—— } 5$$

නව සංඛ්‍යා කුලකය

$1,\ 2,\ 8,\ 9,\ x$

$$\bar{x}_2 = \mu_2 = \frac{1+2+8+9+x}{5}$$

$$\mu_1 + 1 = \frac{20+x}{5}$$

$$6 = \frac{20+x}{5}$$

$$x = 10 \ /\!/ \quad \text{—— } 5$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(6-1)^2+(6-2)^2+(6-8)^2+(6-9)^2+(6-10)^2}{4}$$

$$= \frac{25+16+4+9+16}{5}$$

$$\sigma_2^2 = 14$$

$$\sigma_2 = \sqrt{14} \quad \text{—— } 5$$

$\therefore$ සිදු වූ, සම්මත අපගමනයේ වැඩිවීම $= \sigma_2 - \sigma_1$

$$= \sqrt{14} - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}\right) /\!/ \quad \text{—— } 5$$

B කොටස

(11).(a). t = 0 මොහොතේ A අංශුවක් පොළව මත ලක්ෂ්‍යයක සිට ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව ඉහලට ආරම්භක $\sqrt{10ga}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. ${}^{9a}/_{2}$ සිරස් විස්ථාපනයක් ලද මොහොතේ එහි ක්ෂණික අභ්‍යන්තර පිපිරීමක් හේතුවෙන් එය P හා Q සමාන ස්කන්ධ දෙකකට වෙන්වන අතර P කොටසේ ප්‍රවේගය ක්ෂණිකව ශුන්‍ය වේ.

Q කොටසේ ප්‍රවේගය පිපිරීමට මොහොතකට පෙර පැවති අගය මෙන් දෙගුණයක් වන බව පෙන්වන්න.

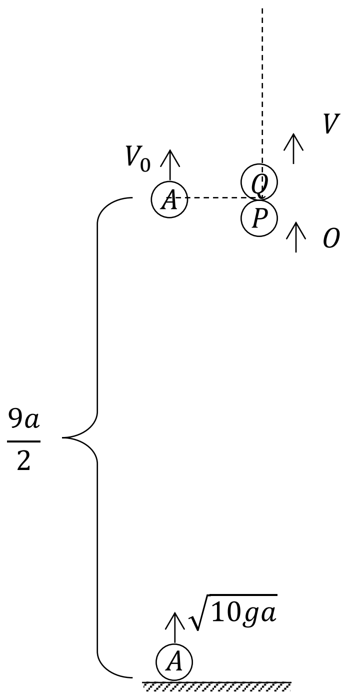
A අගුවේත් P හා Q කැබලි දෙකෙහිත් චලිතවලට අදාල ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්ථාර එකම රූපයක අඳින්න. (P කැබැල්ල බිම පතිත වන තෙක්.)

එමගින්,

(i). Q පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට එළඹෙන මොහොත් බිම සිට P ට ඇති උස.

(ii). ප්‍රක්ෂේප කල මොහොතේ සිට P කැබැල්ල යලි බිමට පතිතවන මොහොත වන විට ගතවී ඇති කාලය සොයන්න.

පිළිතුර -



ප්‍රක්ෂේපිත මොහොතේ සිට පිපිරීම සිදුවන මොහොත දක්වා A හි චලිතය සලකමු.

$\uparrow, V^2 = U^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$$V_0^2 = 10ga - 2g\frac{9a}{2}$$

$$= ga$$

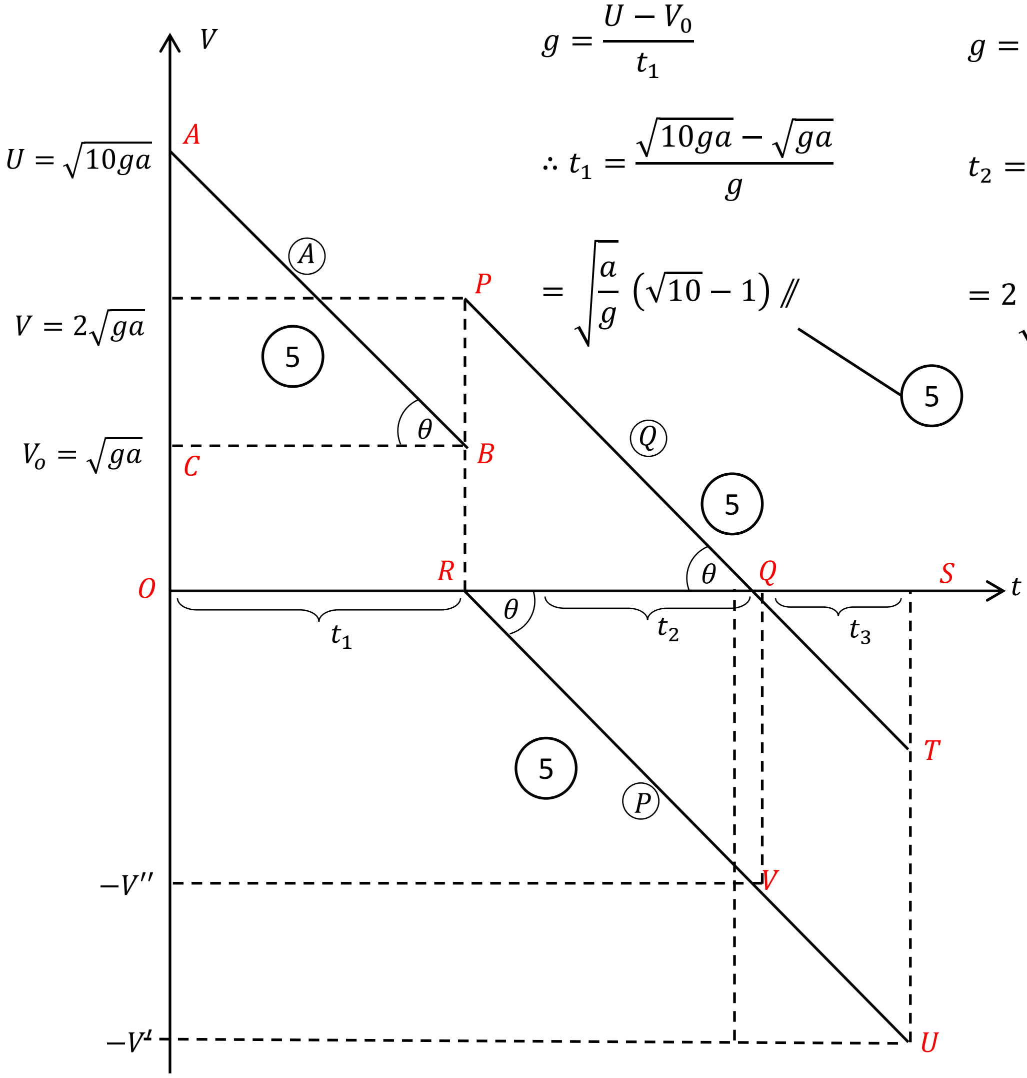
$$V_0 = \sqrt{ga} \quad \text{——— } 5$$

පිපිරුම් මොහොත සලකා,

ගං.සං.මු: $2m\,V_0 = m.V. + m.O$

$$V = 2V_0 = 2\sqrt{ga} \quad \text{——— } 5$$

$\therefore Q$ කොටසේ ප්‍රවේගය දෙගුණ වේ.



$\underline{ABC\ \Delta}$ න්

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$$

$$g = \frac{U - V_0}{t_1}$$

$$\therefore t_1 = \frac{\sqrt{10ga} - \sqrt{ga}}{g}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\,(\sqrt{10} - 1) \,/\!/ \quad 5$$

$\underline{PQR\ \Delta}$ න්

$$\tan\theta = \frac{PR}{QR}$$

$$g = \frac{V}{t_2}$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{ga}}{g}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \,/\!/ \quad 5$$

$\left(\underset{\uparrow}{A}\right.$ අංශුව ගිය උස$\left.\right) = (P \downarrow$ වැටෙන දුර $)$ — 5

$$\frac{9a}{2} = (RSU \text{ වර්ගඵලය})$$

$$\frac{9a}{2} = \frac{1}{2}(RS)(SU)$$

$$9a = (RS)(V')$$

$$9a = (t_2 + t_3)V' - (1) \quad 5$$

$\underline{RSU\ \Delta}$ න්

$$\tan\theta = \frac{US}{RS}$$

$$g = \frac{V'}{t_2 + t_3}$$

$$V' = g(t_2 + t_3) - ②$$ —— 5

$\underline{RQV\ \Delta}$ න්

$$\tan\theta = \frac{VQ}{RQ}$$

$$g = \frac{V''}{t_2}$$

$$V'' = gt_2$$ —— 5

$$①,② \Longrightarrow 9a = (t_2 + t_3)\, g(t_2 + t_3)$$

$$t_2 + t_3 = \sqrt{\frac{9a}{g}}\ /\!\!/$$ —— 5

(i). Q පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට එළැඹෙන මොහොතේ බිම සිට P ට ඇති උස h නම්,

h = ($A \uparrow$ ගිය උස) – (පිපිරීමෙන් පසු Q උපරිම ලක්ෂ්‍යයට යන තෙක් $P \downarrow$ වැටුණු දුර)

= ($OABR$ වර්ගඵලය) – (RQV වර්ගඵලය)

$$= \frac{9a}{2} - \frac{1}{2}(RQ)(VQ)$$ —— 5

$$= \frac{9a}{2} - \frac{1}{2}t_2V''$$

$$= \frac{9a}{2} - \frac{1}{2}t_2\, g\, t_2$$

$$= \frac{9a}{2} - \frac{1}{2}\, g\, \frac{4a}{g}$$

$$= \frac{5a}{2}\ /\!\!/$$ —— 5

(ii). ආරම්භයේ සිට P කැබැල්ල යළි බිම පතිතවන තෙක් ගත වී ඇති මුලු කාලය

$$T = t_1 + t_2 + t_3$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}(\sqrt{10} - 1) + \sqrt{\frac{9a}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}(\sqrt{10} + 2)\ /\!\!/$$ —— 5

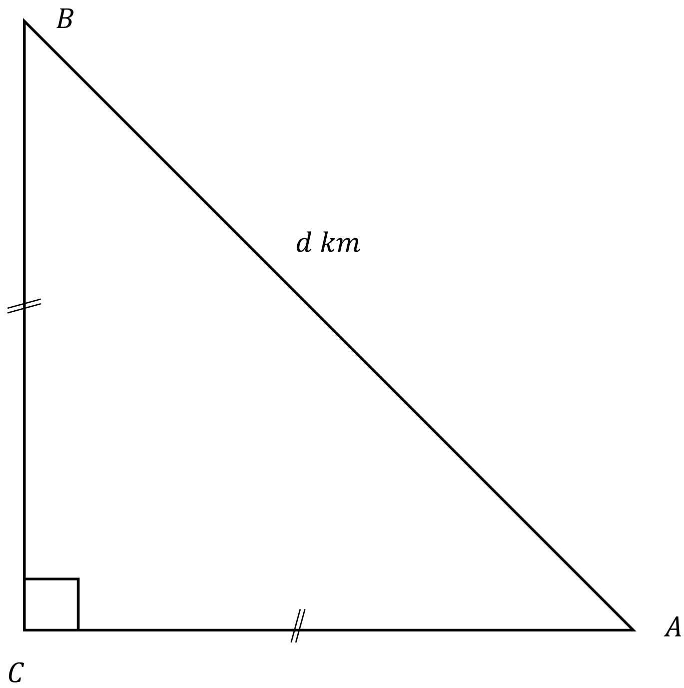
(b) නිශ්චල වාතයේ දී හෙලිකොප්ටරයක වේගය $u\ km\ h^{-1}$ වේ. A, B, C ස්ථාන තුනක් සම බිමෙහි පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{C}B = {}^{\pi}/_{2}$, $AB = d\ km$ හා $AC = BC$ වන අයුරිනි. එක්තරා දිනෙක BA දිශාව ඔස්සේ $V\ km\ h^{-1}$, $(v < u)$ වන ඒකාකාර සුළඟක් හමායන විටෙක යානය A ගෙන් පටන්ගෙන පිළිවෙළින් B හා C හරහා නොනැවතී ඒකාකාරීව නැවත A ස්ථානය වෙත පියාසර කරයි. යානයේ චලිත අවස්ථා 3 දැක්වීමට එකම රූපයක ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ 3 අඳින්න. ඒ ඒ ලක්ෂ්‍යයේ දී යානය හැරවීමට ගතවන කාලයන් නොසලකා හරිමින් මුළු ගමන සම්පූර්ණ කිරීමට යානයට ගතවන කාලය සොයන්න.

(i). $V = U$ විට,

(ii). $V > U$ විට,

පළමු $A \to B$ ගමන් කොටස සඳහා සිදුවන්නේ කුමක්දැයි හේතු සහිතව පහදන්න.

පිළිතුර -



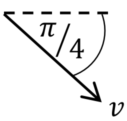
H - හෙලිකොප්ටරය

W - සුළඟ

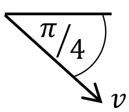
E - පොළව

සාපේක්ෂ ප්‍රවේග මූලධර්මයෙන්,

$(H,E) = (H,W) + (W,E)$

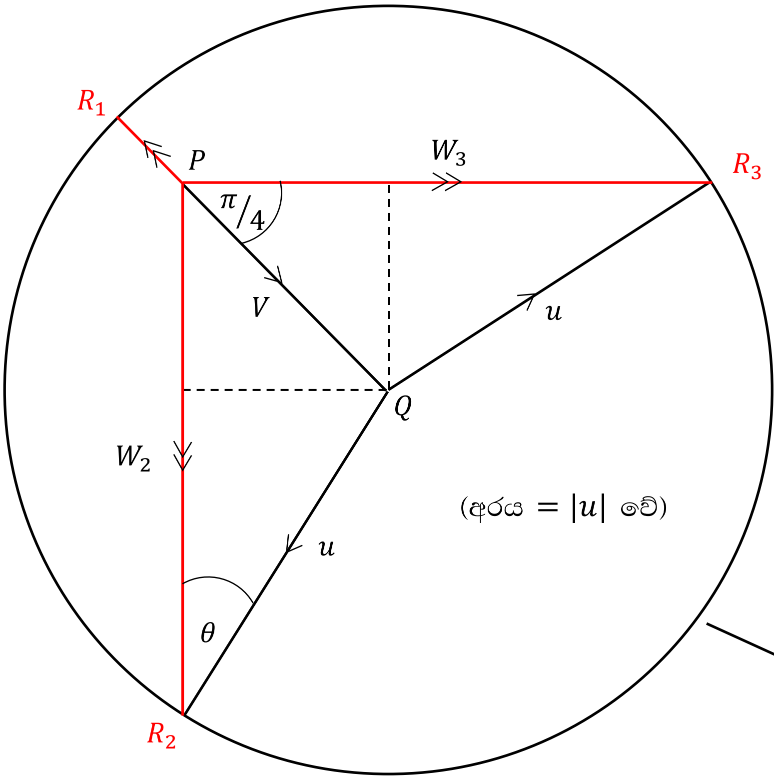
$\underset{1}{\nwarrow}\ \ \underset{2}{\downarrow}\ \ \underset{3}{\rightarrow} = u +$ 

—— 10

$=$ 

$+u$

$\overrightarrow{PR}_{1,2,3} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}_{1,2,3}$



- $PR_1 = PQ + QR_1$

  පළමු AB චලිතයට අදාල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය. (මෙය සරළ රේඛාවකි.)

- $PR_2 = PQ + QR_2$

  දෙවන BC චලිතයට අදාල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය.

- $PR_3 = PQ + QR_3$

  තෙවන CA චලිතයට අදාල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණය.

20

$(A \rightarrow B)$ පථයේ ප්‍රවේගය.

$PR_1 = U - V$

$\therefore$ $(A \rightarrow B)$ චලිතයට ගතවන කාලය,

$S = ut$ මගින්

$t_1 = \left(\frac{d}{u-v}\right)h$ —— 5

ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ සටහන, QR_1 රේඛාව (අරය) අනුබද්ධයෙන් සමමිතික බැවින්,

$PR_2 = PR_3 \Rightarrow W_2 = W_3$ වේ.

<u>රූපයට අනුව,</u>

$(QR_2)\cos\theta = (PR_2) - (PQ)\cos{}^{\pi}/_{4}$

$$U\cos\theta = W_2 - {}^{v}/_{\sqrt{2}} \quad - \ (1)$$

$(QR_2)\sin\theta = (PQ)\cos{}^{\pi}/_{4}$

$$U\sin\theta = {}^{v}/_{\sqrt{2}} \quad - \ (2)$$

$$①^2 + ②^2 \implies u^2\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta = \left(W_2 - \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore u^2 = W_2^2 - \sqrt{2}V\, W_2 + V^2$$

$$\therefore W_2^2 - \sqrt{2}V.W_2 + (V^2 - u^2) = 0$$

$$\therefore W_2 = \frac{\sqrt{2}V \pm \sqrt{\left(\sqrt{2}V\right)^2 - 4.1.(V^2 - u^2)}}{2.1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}V \pm \sqrt{4u^2 - 2V^2}}{2}\right)$$

$W_2 > U > V > O$ බැවින් හා $W_2 = W_3$ බැවින්

$$W_2 = W_3 = \left(\frac{\sqrt{2}V + \sqrt{4u^2 - 2V^2}}{2}\right)$$ ලෙස ලැබේ. ——— 10

$$\therefore t_2 = t_3 = \frac{BC}{PR_2} = \frac{d\cos(\pi/4)}{W_2}$$

$$= \frac{d}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}V + \sqrt{4u^2 - 2V^2}}{2}\right)}$$ ——— 5

$$= \left(\frac{d}{V + \sqrt{2u^2 - V^2}}\right)$$

$\therefore (A \to B), (B \to C), (C \to A)$ මුළු ගමනට ගතවන T කාලය

$$T = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + 2t_2$$

$$= \frac{d}{(U - V)} + \frac{2d}{(V + \sqrt{2u^2 - V^2})} \quad //$$ ——— 5

(i) $U = V$ උවහොත්

එවිට, $t_1 = \frac{d}{u - u} = \frac{d}{o} \to \infty$ ——— 5

මෙවිට A සිට B දක්වා පියාසර කිරීමට ගතවන කාලය අපරිමිත වේ. හෙවත් පොළොවට සාපේක්ෂව යානයේ ප්‍රවේගය $U - V = 0$ වන බැවින් යානයට $(A \to B)$ පියාසර කළ නොහැක. ——— 5

(ii) V > U උවහොත්

එවිට, $t_1 = \dfrac{d}{u-v}, V > U$ බැවින් $t_1 < 0$ වේ. ——— 5

මෙය ද විය නොහැක.

හෙවත් මෙවිට පොළවට සාපේක්ෂව $(A \rightarrow B)$ චලිත කොටසේ ප්‍රවේගය වන $(u-v) < 0$ — 5
වේ. එනම් එවිට ප්‍රවේගය $(A \rightarrow B)$ දිශාව ඔස්සේ නොව $(B \rightarrow A)$ ප්‍රථිවිරුද්ධ දිශාව ඔස්සේ වේ.

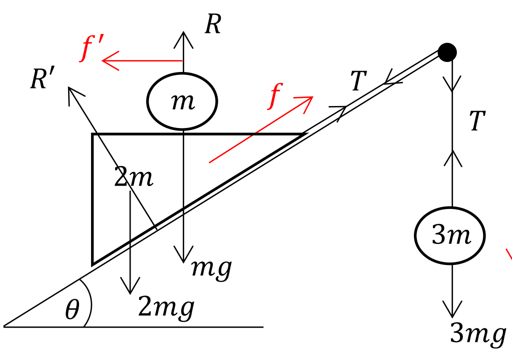
(12). (a). ස්කන්ධය 2m හා කෝණයක් θ වූ සුමට කුඤ්ඤයක් එහි එක් තල මුහුණතක් තිරසට θ ආනත සුමට අචල ආනත තලයක් මත තබා ඇත්තේ කුඤ්ඤයේ උඩත් මුහුණත තිරස් වන අයුරිනි. කුඤ්ඤයේ ආනත තලය සමග ස්පර්ශව පවතින මුහුණතෙහි ඉහල ශීර්ෂයට ඈඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ආනත තලයේ ඉහලම කෙලවරෙහි සවිකර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් ගොස් එහි අනෙක් කෙලවරේ ස්කන්ධය 3m වූ අංශුවක් දරයි. දැන් කුඤ්ඤයේ තිරස්, උඩත් මුහුණත මත ස්කන්ධය m වූ සුමට අංශුවක් තබා පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහල විට කුඤ්ඤය ගුරුත්ව ත්වරණයෙන් $\frac{2}{7}$ ක ප්‍රමාණයක විශාලත්යක් සහිත ඒකාකාර ත්වරණයකින් ආනත තලය ඔස්සේ ඉහලට චලනය වේ. $\theta = {}^{\pi}/_{6}$ බව පෙන්වන්න.

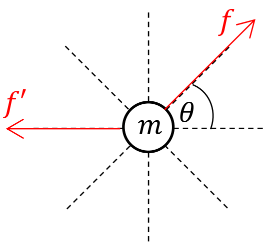
t කාලයක් චලනය වූ පසු කිසිදු ආවේගී ගැස්සීමකින් තොරව කුඤ්ඤයේ උඩත් මුහුණත මත වූ m ස්කන්ධය කුඤ්ඤයේ කෙලවරින් ඉවතට ගුරුත්වය යටතට විසිවේ.

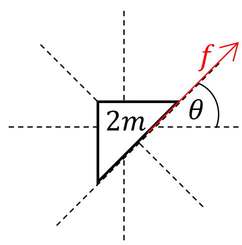
පොළොවට සාපේක්ෂව මෙම m ස්කන්ධය විසිවනුයේ තිරස්ව ද? හේතු පහදන්න.

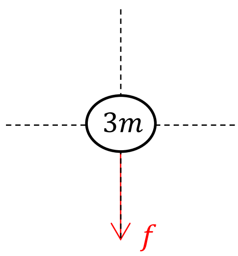
m ස්කන්ධය පද්ධතියෙන් ඉවත් වීමට පෙර හා පසු කුඤ්ඤයේ ත්වරණ අතර අනුපාතය 5:7 බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර -









- $m, 2m$ හා $3m$ හි පොළවට සාපේක්ෂ ත්වරණ

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීම

(m) , $\leftarrow \Rightarrow 0 = m(f' - f\cos\theta)$ —— 5

$\therefore f' = f\cos\theta \quad -(1)$

$(m) + (2m)$, $\Rightarrow T - mg\sin\theta - 2mg\sin\theta = m(f - f'\cos\theta) + 2m\,f - (2)$ —— 5

$(3m)$, $\downarrow \quad \Rightarrow 3mg - T = 3mf - (3)$ —— 5

$(1) + (2) \quad \Rightarrow 3g - 3g\sin\theta = 6f - f'\cos\theta$

$(1) \Rightarrow f' = f\cos\theta$

$\therefore 3g - 3g\sin\theta = 6f - f\cos^2\theta$ —— 5

$f = \frac{2}{7}g$ විට $\rightarrow 3g - 3g\sin\theta = (6 - \cos^2\theta)\frac{2}{7}g$ —— 5

$21 - 21\sin\theta = 12 - 2\cos^2\theta$

$9 - 21\sin\theta = -2(1 - \sin^2\theta)$

$2\sin^2\theta + 21\sin\theta - 11 = 0$ —— 5

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 11) = 0$

$\sin\theta \neq -11, \therefore 2\sin\theta - 1 = 0$

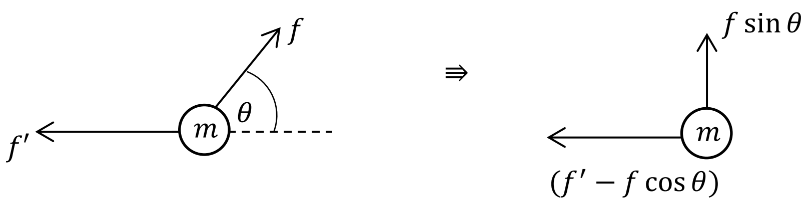
5

$\sin\theta = {}^{1}/_{2}$

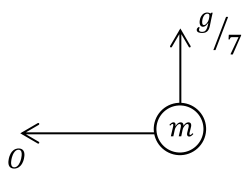
$\sin\theta = \sin{}^{\pi}/_{6}$

$\theta = {}^{\pi}/_{6}$ // —— 5

(m) ස්කන්ධය කුඤ්ඤයෙන් ඉවත්වන මොහොතේ එහි පවතින ත්වරණ සංරචක (පොළවට සාපේක්ෂව) සලකමු.



$$\theta = {}^{\pi}/_{6}\ , f = \frac{2}{7}\,g \text{ විට, හා } (1) \text{ අනුව}$$



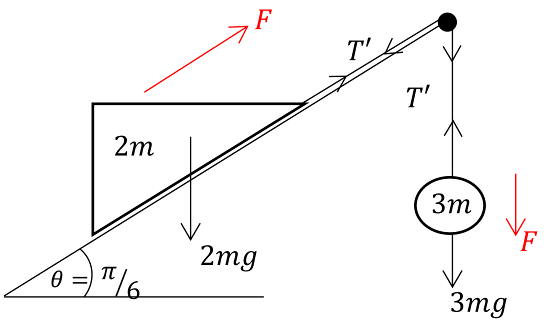
5

5

∴ පොළවට සාපේක්ෂව m අංශුව තිරස්ව විසි නොවේ. විසිවන (කූඤ්ඤයෙන් ඉවත්වන) මොහොතේ m හි පොළවට සාපේක්ෂ තිරස් ත්වරණ සංරචකය ශූන්‍ය වන අතර එවිට එයට පවතිනුයේ සිරස්ව ඉහලට ${}^{g}/_{7}$ ක ත්වරණයකි.

∴ එය එම ත්වරණයෙන් සිරස්ව උඩු දිශාවට කූඤ්ඤයෙන් ඉවත් වේ. 5

එය ඉවත් වූ පසු මොහොතක



$\boxed{F = ma}$

3m $\quad \downarrow \Rightarrow 3mg - T' = 3m\,F$ 5

2m $\quad \nearrow \Rightarrow T' - 2mg\cos\left({}^{\pi}/_{3}\right) = 2m\,F$ 5

$$2mg = 5m\,F$$

$$F = \frac{2}{5}\,g \ /\!/$$

5

∴ m අංශුව ඉවත්වීමට පෙර හා පසු 2m කූඤ්ඤයේ ත්වරණ අතර අනුපාතය,

$$f : F = \frac{2}{7}g : \frac{2}{5}\,g$$ 5

$$= 5:7 \ /\!/$$

(b) තිරස් පොළව මත පිහිටි 0 ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\pi/_3$ ආනත ආරම්භක $\sqrt{48gh}$ ප්‍රවේගයෙන් P අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. P අංශුව තම පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට එළැඹෙන මොහොතේ එම ලක්ෂ්‍යයේ නිසලව පැවති වෙනත් සමාන ස්කන්ධය සහිත Q අංශුවක ගැටී හා වේ. මෙම Q අංශුව l දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් අචල O' ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා තිබුණු අංශුවකි. $l = 3h$ වේ. සංයුක්ත අංශුව R යැයි ගනිමු.

R චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.

$O'R$ තන්තුව සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන සාධාරණ මොහොතක් සඳහා R හි ප්‍රවේගය W විට

$$W^2 = 3gh\,(2\cos\theta - 1)$$ බවත්,

එම මොහොතේ තන්තුවේ ආතතිය T විට

$$T = 2mg\,(3\cos\theta - 1)$$ බවත් සාධනය කරන්න.

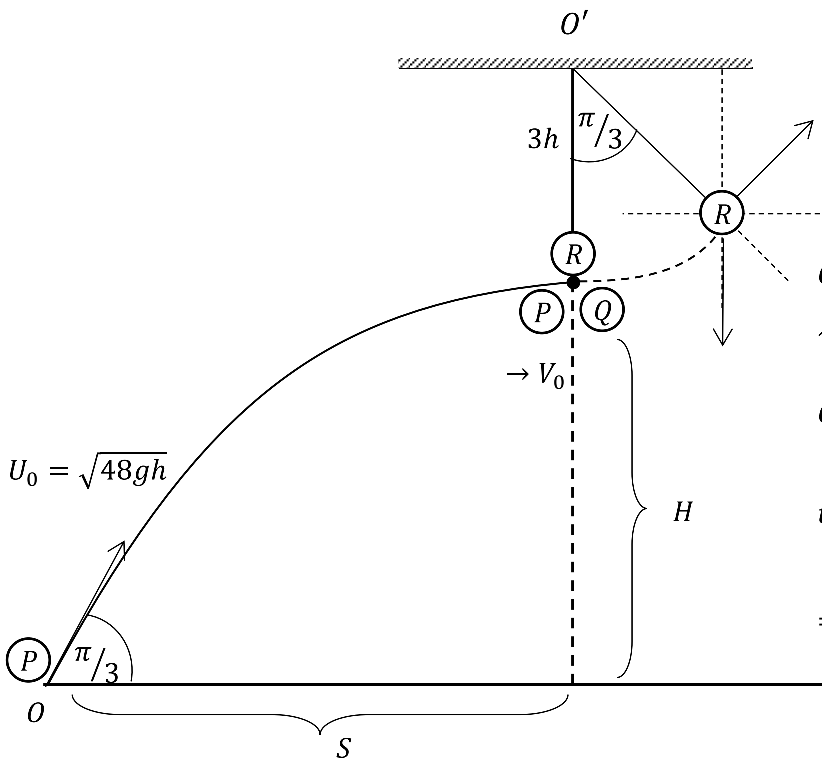
එනයින්, $O'R$ තන්තුව සිරස සමග $\pi/_3$ කෝණයක් සාදන මොහොතේ ක්ෂණිකව ම R සංයුක්ත අංශුව තන්තුවෙන් ගිලිහේ නම්,

(i). R අංශුව තන්තුවෙන් ගිලිහෙන මොහොතේ 0 සිට එයට ඇති සිරස් උස,

(ii). R අංශුව යළි පොළවට පතිත වන ලක්ෂ්‍යයට 0 සිට ඇති තිරස් දුර,

සොයන්න.

පිළිතුර -



O සිට උපරිම ලක්ෂ්‍යය තෙක් චලිතයට

$\uparrow V = u + at$

$0 = \sqrt{48gh}\cos(\pi/_6) - gt$

$t = \dfrac{4\sqrt{3gh}}{g}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 6\sqrt{h/_g}$ —— 5

P අංශුව ආරම්භයේ සිට පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යය තෙක් ප්‍රක්ෂිප්ත චලිතය සලකා,

$\rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$S = U_0 \cos(\pi/3)\, t$

$= \sqrt{48gh}\frac{1}{2}\, t = 12\sqrt{3}h$ //

5

$\rightarrow V = u + at$

$V_0 = U_0 \cos(\pi/3) + 0$

$V_0 = \sqrt{48gh}\frac{1}{2}$

$V_0 = 2\sqrt{3gh}$ // 5

ගැටුම සලකා

$\rightarrow V_0$ (P) m $\quad$ $\rightarrow 0$ (Q) m $\quad$ (R) $2m$ $\rightarrow V$

→ රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මයෙන්,

$2m.V = m.V_0 + m.0$

$V = \frac{V_0}{2}$ 5

$= \sqrt{3gh} \leftarrow R$ අංශුව චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය//

$\uparrow V^2 = u^2 + 2a\,s$

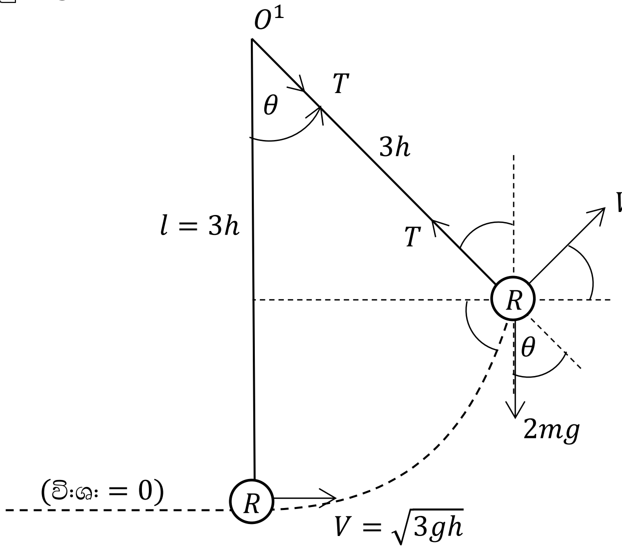
$0 = [U_0 \sin(\pi/3)]^2 - 2g\,H$

$\left[\sqrt{48gh}.\sqrt{3}/2\right]^2 = 2g\,H$

$48gh.\frac{3}{4} = 2g\,H$

$H = 18h$ 5

R සංයුක්ත අංශුව චලිතය ආරම්භ කළ මොහොත හා $O'R$ තන්තුව සිරසින් $\pi/3$ උත්ක්‍රමණය වී ඇති මොහොත යන අවස්ථා 2 සලකා යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, මේ සඳහා ගැටුම් ලක්ෂ්‍යය හරහා යන තිරස් මට්ටම, විභව ශක්ති ශුන්‍ය මට්ටම ලෙස සලකමු.



$E_2 = E_1$ 10

$(චා: + වි:)_1 = (චා: + වි:)_2$

$\frac{1}{2}(2m)V^2 + 0 = \frac{1}{2}(2m)W^2 + (2m)g\,(3h - 3h\cos\theta)$

$V^2 = W^2 + 2g(3h - 3h\cos\theta)$

$3gh = W^2 + 6gh - 6gh\cos\theta$

$W^2 = 6gh\cos\theta - 3gh$ 5

$\nwarrow F = ma$

$T - 2mg\cos\theta = 2m\left(\frac{W^2}{3h}\right)$ 10

$T = \frac{2m}{3h}\,.3gh\,(2\cos\theta - 1) + 2mg\cos\theta$

$= 2mg\,(2\cos\theta - 1) + 2mg\cos\theta$

$= 2mg\,(3\cos\theta - 1)$ // 5

$\theta = \pi/3$ විට, R අංශුව තන්තුවෙන් ගිලිහෙන බැවින්, එම මොහොතේ R හි ප්‍රවේගය,

$W^2 = 3gh\,(2\cos\theta - 1)$

$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow W^2 = 3gh\left[2\cos\pi/3 - 1\right]$

$W = 0$ // 5

(i). මෙම මොහොතේ O සිට R ට ඇති සිරස උස H_0 නම්,

$H_0 = H + 3h - 3h\cos\pi/3$

$= 18h + \frac{3h}{2} = \frac{39}{2}h$ // 5

(ii). R තන්තුවෙන් ගිලිහෙන මොහොතේ $W = 0$ බැවින් ගිලිහුණු R අංශුව ගුරුත්ව යටතේ සිරස්ව පහලට වැටේ. ∴ එය පොළවට පතිතවන ලක්ෂ්‍යයට O සිට ඇති තිරස් දුර d නම්,

$d = S + 3h\cos(\pi/6) = 12\sqrt{3}\,h + 3h\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{2}\sqrt{3}h$ // 5

(13). 3a ස්වාභාවික දිගින් යුතු සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ දුන්නක දෙකෙලවර A හා B වේ. A කෙලවර අචල තිරස් තලයකට සවිකර දුන්න සිරස්ව නිසල ඇත. ස්කන්ධය 2m වූ P අංශුව දුන්නේ B කෙලවර මත සීරුවෙන් තැබූ විට දුන්නේ දිග 2a වන පරිදි එය හැකිලේ.

දුන්නේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $6mg$ බව පෙන්වන්න.

දැන් P අංශුව A ට සිරස්ව ඉහලින් $4a$ උසින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයේ තබා සීරුවෙන් දුන්න මතට අතහරී. අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේ දී දුන්නට ලැබෙන අවම දිග $(2-\sqrt{3})a$ බව පෙන්වන්න.

අංශුව ගුරුත්වය යටතේ මුදාහල මොහොතේ සිට ඉහත කී දුන්නේ අවම දිග සහිත පිහිටීම පැමිණීමට ගතවන මුලු කාලය,

$\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left({}^{1}\!/_{\sqrt{3}}\right)\right\}$ බව සාධනය කරන්න.

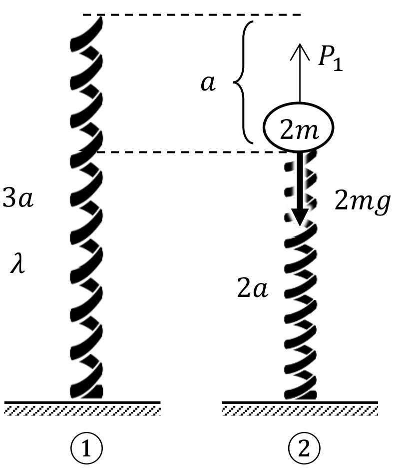
මෙම, දුන්නේ අවම දිග සහිත පිහිටීමේ දී දුන්නමත ඇති 2m ස්කන්ධය සහිත P අංශුවෙන් m ස්කන්ධයක් සිරුවෙන් ගැලවී දුන්න හා ගැටීමකින් තොරව ඉවතට හැලේ.

ඉතිරි අංශු කොටස තවත් කොපමණ කාලයක් දුන්න මත රැඳී දුන්න හා ස්පර්ශව පවතී ද?

පිළිතුර -

ගැටළුව තුළ චලිතයට අදාළව $2m$ ස්කන්ධයක් මෙන් ම, m ස්කන්ධයක් ද පවතින බැවින් එම $2m$ හා ප ස්කන්ධ වලට අදාළව වෙන වෙනම සරළ අනුවර්තී චලිතයන් පවතින බව පෙන්වා එම එක් එක් ස.අ.ච. වලට අදාළව චලිත කේන්ද්‍ර හා චලිත නියත (ω) සොයාගත යුතුයි.

$\lambda -$ සෙවීම



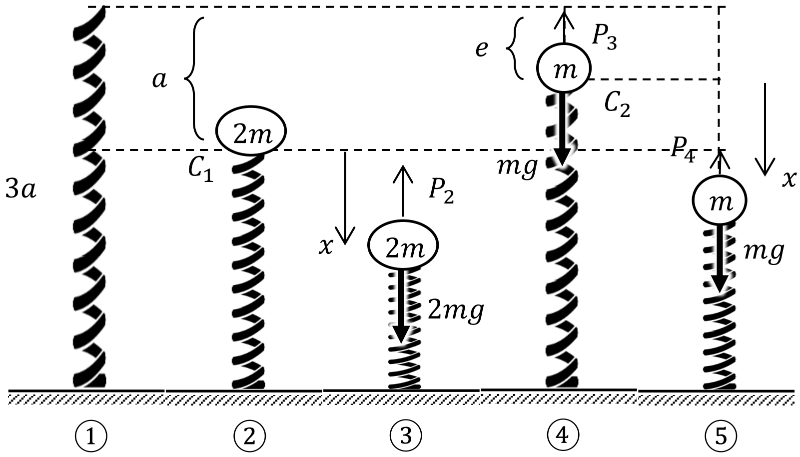
2 රූපය

$$\uparrow = \downarrow$$

$$P_1 = 2mg$$

$$\frac{a}{3a}\lambda = 2mg \quad \text{—— } 10$$

$$\lambda = 6mg \;/\!/$$



③ රූපය

10

$\downarrow F = ma$

$$2mg - P_2 = 2m\,\ddot{x}$$

$$2mg - \left(\frac{a+x}{3a}\right)6mg = 2m\,\ddot{x}$$

$$2g - 2g - \frac{2g}{a}x = 2\,\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \left(\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2 x = 0 \quad \text{—— 5}$$

මෙය $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ආකාර ගනී.

$\therefore$ $2m$ ස්කන්ධයේ චලිතය (දුන්න සමග ස්පර්ශ වූ පසු) සඃඅඃචඃකි. $\omega_1 = \sqrt{g/a}$ —— 5

④ රූපය

$\uparrow = \downarrow$

$$P_3 = mg$$

$$\frac{e}{3a}6mg = mg$$

$$e = {a}/{2} \quad \text{—— 5}$$

$\downarrow F = ma$

$$mg - P_4 = m\ddot{x} \quad \text{—— 10}$$

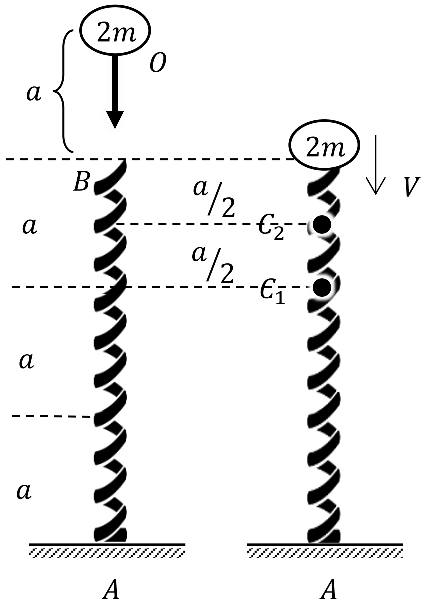
$$mg - \frac{\left(\frac{a}{2}+x\right)}{3a}6mg = m\ddot{x}$$

$$g - g - \frac{2g}{a}x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \left(\sqrt{\frac{2g}{a}}\right)^2 x = 0 \quad \text{—— 5}$$

මෙය $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ආකාර ගනී.

$\therefore$ m අංශුවේ චලිතය ද (දුන්න සමග ස්පර්ශව ඇති විට) සඃඅඃචඃකි. $\omega_2 = \sqrt{2g/a}$ —— 5



$2m$ අංශුව මුදාහල මොහොතේ සිට දුන්න සමඟ ස්පර්ශවන තෙක් (ස:අ:ච: අරඹන තෙක්) ගුරුත්ව චලිතය සලකා,

$\downarrow V^2 = u^2 + 2as$

$V^2 = 0 + 2ga$

$V = \sqrt{2ga}$ ——— 5

$\downarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = 0 + \frac{1}{2}g\,t_0^2$

$t_0 = \sqrt{2\,{}^{a}/_{g}}$ ——— 5

$2m$ අංශුව දුන්න සමඟ ස්පර්ශවන මොහොත සලකා,

$\dot{x}^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$ යෙදීමෙන්

$V^2 = \omega_1^2(A_1^2 - a^2)$ ——— 10

$2ga = \frac{g}{a}(A_1^2 - a^2)$

$\Rightarrow A_1 = \sqrt{3}a$ // ——— 5

∴ $2m$ අංශුව දුන්න මතට වැටුණු පසු එය ක්ෂණික නිසලතාවට එළඹෙන මොහොත වන විට අදාළ චලිත කේන්ද්‍රය වන C_1 සිට පහලට A_1 දුරක් ගමන් කරයි. දුන්නට අවම දිග ලැබෙනුයේ මෙම මොහොතේ දී ය.

∴ දුන්නේ අවම දිග $= 2a - A_1$ ——— 5

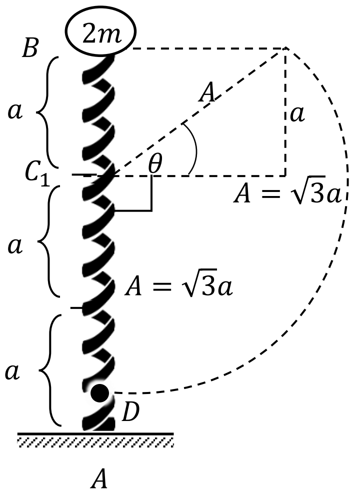
$= 2a - \sqrt{3}a$

$= (2 - \sqrt{3})a$ // ——— 5

අංශුව මුදාහල ආරම්භක මොහොතේ සිට දුන්න සමඟ ස්පර්ශවන තෙක් a දුරක් ගුරුත්වය යටතේ වැටෙන අතර ඒ සඳහා ගත වූ කාලය.

$$t_o = \sqrt{2a/g} \quad \text{(පෙර ලබාගත්)}$$

දැන්, දුන්න මත ස්පර්ශ වූ මොහොතේ සිට පහලම ලක්ෂ්‍යය එනම්, දුන්නේ අවම දිග ලැබෙන මොහොත තෙක් සෘ.අ.ච. සලකමු.



$\theta = wt$ යෙදීමෙන්

$$t = \left(\frac{\theta + \pi/2}{w_1}\right) \quad \text{—— 5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g/a}}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$\sin\theta = \frac{a}{A}$$

$$= a/\sqrt{3}a \quad \text{5}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)\right] \quad \text{—— 5}$$

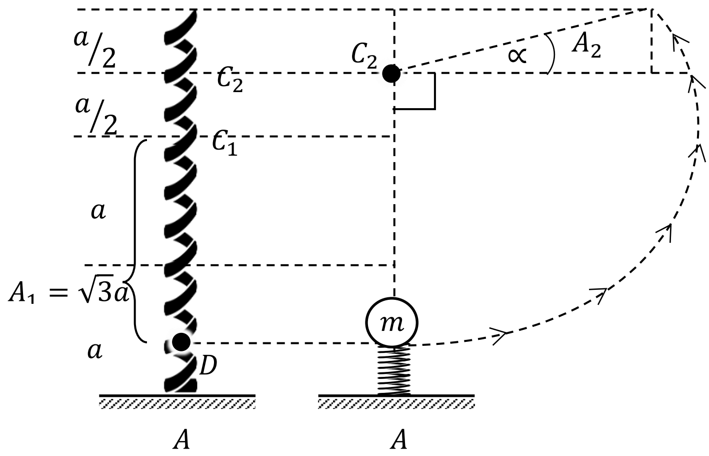
$\therefore$ මුදාහල මොහොතේ සිට D ලක්ෂ්‍යය වෙත $2m$ අංශුව පැමිණීමට ගත වූ මුලු කාලය T_1 නම්,

$$T_1 = t_o + t$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{g}} + \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)\right] \quad \text{—— 10}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)\right\} \quad /\!/$$

දැන් $2m$ අංශුව පහලම D ලක්ෂ්‍යයේ ඇති මොහොතේ එයින් m ස්කන්ධ කොටසක් ඉවත් වූ විට,



පහළ ම, D පිහිටීමේ දී

$$\dot{x}^2 = w^2(A^2 - x^2)$$

$$O = \omega_2^2[A_2^2 - (C_2D)^2] \Rightarrow A_2 = [C_2D] \quad \text{——— (10)}$$

$$\therefore A_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{3}a = \frac{a}{2}(1 + 2\sqrt{3}) \quad \text{——— (5)}$$

m ස්කන්ධ කොටසක් ඉවත් වූ පසු ඉතිරි වන m ස්කන්ධ කොටස, එම මොහොතේ සිට, යලි දුන්න තම ස්වභාවික දිග සහිත පිහිටීම දක්වා දිගහැරෙනතෙක් දුන්න මත රැඳී දුන්න හා ස්පර්ශ පවතී.

රූපයෙන්

$$\sin\propto = \left(\frac{a/2}{A_2}\right)$$

$$= \frac{a/2}{\frac{a}{2}(1 + 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{(1 + 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{11}\right) \quad \text{——— (10)}$$

$\theta = wt$ ඇසුරින්

m ස්කන්ධය දුන්න මත රැඳී ස්පර්ශව පවත්නා කාලය,

$$t = \frac{\theta}{w}$$

$$t = \left(\frac{\pi/2 + \propto}{w_2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{11}\right)\right] \;// \quad \text{——— (10)}$$

(**14**).(a). O යනු දෛශික මූලය වූ $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයකි. පිළිවෙලින් OA, AC, CB හා BO පාද මත P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ

$$OP{:}\,OA = AQ{:}\,AC = CR{:}\,CB = BS{:}\,BO = 1{:}\,3$$

වන අයුරිනි.

O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ.

(i) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික ලියා දක්වන්න.

(ii) $PQRS$ යනු සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

(iii) $A\hat{O}B = \theta$ විට,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{2\left(|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2\right)}{3|\underline{a}|\,|\underline{b}|}$$ වෙතොත්

$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය, ඍජුකෝණාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(b). oxy තලයේ වූ A, B, C ලක්ෂ්‍ය 3 ක දී පිළිවෙලින් P_1, P_2, P_3 බල ක්‍රියාකරයි.

මෙහි, $A \equiv (3a, -2a)$ $\quad\quad P_1 = -P\underline{i} + 3P\underline{j}$

$B \equiv (-a, -3a)$ $\quad\quad P_2 = 2P\underline{i} + 4P\underline{j}$

$C \equiv (2a,\ 5a)$ $\quad\quad P_3 = 3P\underline{i} - 2P\underline{j}$ වේ.

මෙහි a, λ, μ ධන අගයයන් වන අතර a මීටර් වලින් හා P නිව්ටන් වලින් මනිනු ලැබූ ධන රාශි වේ. O මූලය වටා මෙම බල පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $10Pa\ N\ m$ බව පෙන්වන්න.

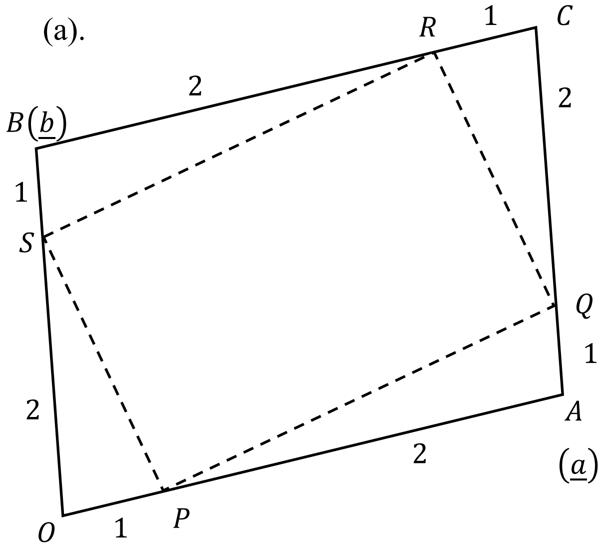
දැන් මෙම පද්ධතියට අමතරව $D\ (\lambda a, \mu a)$ ලක්ෂයේ දී ක්‍රියාකරන $P_4 = \left(\lambda P\underline{i} + \mu P\underline{j}\right)$ හතරවන බලයක් එකතු කරයි.

O මූලය වටා පැවති ඝූර්ණයේ කිසිදු වෙනසක් සිදු නොවන බව පෙන්වන්න.

දැන් P_1, P_2, P_3 හා P_4 බල 4 සහිතව නව බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත $E(O, \mu)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියා කරන R බලයක් වන අතර, R හි ක්‍රියා රේඛාව OX අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ වාමාර්තව ${}^{\pi}/_{3}$ කෝණයක් සාදයි. R හි විශාලත්වය ලියා දක්වන්න. λ හා μ හි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

පිළිතුරු -

(a).



$\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = \underline{p} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{3}\underline{a}$ // — 5

$\dfrac{OS}{OB} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \overrightarrow{OS} = \underline{s} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \dfrac{2}{3}\underline{b}$ // — 5

$\dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\underline{b}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$

$\underline{q} = \underline{a} + \dfrac{1}{3}\underline{b}$ // ——— 5

$\dfrac{BR}{BC} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \overrightarrow{BR} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{2}{3}\underline{a}$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BR}$

$\underline{r} = \underline{b} + \dfrac{2}{3}\underline{a}$ ——— 5

$\underline{p}, \underline{q}, \underline{r},$ හා $\underline{s}$ යනු පිළිවෙලින් $P, Q, R,$ හා S ලක්ෂ්‍ය වල O මූලයට සාපේක්ෂව පිහිටුම් දෛශික වේ.

<u>$PQRS$ චතුරස්‍රයේ,</u>

$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = \left(\underline{a} + \dfrac{1}{3}\underline{b}\right) - \dfrac{1}{3}\underline{a} = \dfrac{2}{3}\underline{a} + \dfrac{1}{3}\underline{b} - (1)$ ——— 5

$\overrightarrow{SR} = \underline{r} - \underline{s} = \left(\underline{b} + \dfrac{2}{3}\underline{a}\right) - \dfrac{2}{3}\underline{b} = \dfrac{2}{3}\underline{a} + \dfrac{1}{3}\underline{b} - (2)$ ——— 5

$(1) = (2) \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ වේ.

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{SR}|$ හා $\overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{SR}$

එනම් $PQ = SR$ $\quad\therefore PQ \,//\, SR$ වේ. ——— 5

$\therefore$ මේ අනුව $PQRS$ චතුරස්‍රයේ PQ හා RS සම්මුඛ පාද යුගලයක් විශාලත්වයෙන් සමාන හා දිශාවෙන් සමාන්තර වී ඇත. ඕනෑම චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන හා සමාන්තර වේ නම් එම චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයකි. // ——— 5

$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය, සෘජුකෝණාස්‍රයක් වීමට නම්

$PS \perp PQ$ විය යුතුයි.

එනම් එවිට $\overrightarrow{PS} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\therefore\ \overrightarrow{PS}\ .\ \overrightarrow{PQ} = 0$ විය යුතුයි. ——— 5

$$\left(\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS}\\ &= -\frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}\end{aligned}\right), \left(\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}\\ &= \frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}\end{aligned}\right)$$

දැන් $\overrightarrow{PS}\ .\ \overrightarrow{PQ} = 0$ වෙතොත්,

$$\left(-\frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b}\right) . \left(\frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b}\right) = 0$$ ——— 5

$$-\frac{2}{9}(\underline{a}.\underline{a}) + \frac{2}{9}(\underline{b}.\underline{b}) + \frac{3}{9}(\underline{a}.\underline{b}) = 0$$

$$-2|\underline{a}|\ |\underline{a}| \cos 0 + 2|\underline{b}|\ |\underline{b}| \cos 0 + 3|\underline{a}||\underline{b}| \cos\theta = 0$$

(මෙහි θ යනු $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ අතර කෝණය වේ.)

$\therefore\ 3|\underline{a}|\ |\underline{a}| \cos\theta = 2|\underline{a}|^2 - 2\ |\underline{b}|^2$ ——— 5

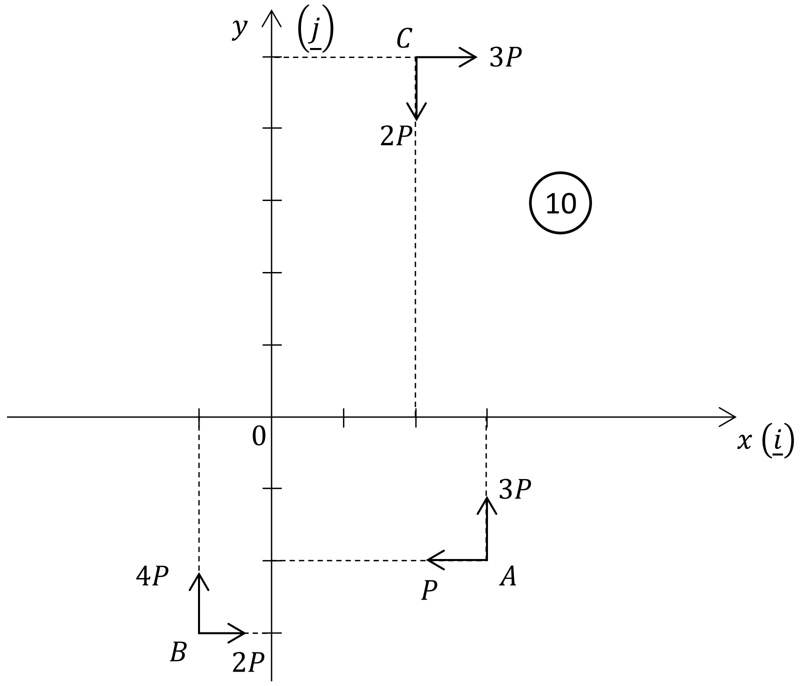
$$Cos\ \theta = \frac{2\left(|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2\right)}{3|\underline{a}|\ |\underline{b}|}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{2\left(|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2\right)}{3|\underline{a}|\ |\underline{b}|}$ වෙතොත්, $\overrightarrow{PS}\ .\ \overrightarrow{PQ} = 0$ වේ.

එනම් එවිට $PS \perp PQ$ වේ.

එනම් එවිට $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය සෘජුකෝණාස්‍රයක් වේ. ——— 5

(b) පිළිතුර -



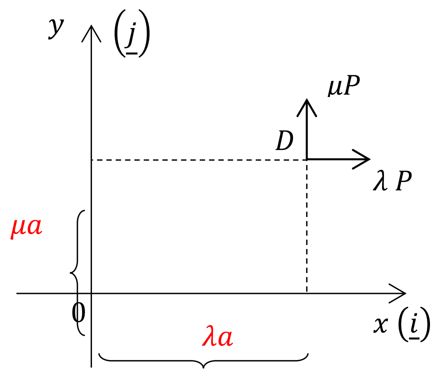
10

$O\circlearrowleft = (P)(2a) - (3P)(3a) - (2P)(3a) + (4P)(a) + (3P)(5a) + (2P)(2a)$ —— 10

$= 2Pa - 9Pa - 6Pa + 4Pa + 15Pa + 4Pa$

$= 10Pa\ N\ m$ // (පද්ධතියේ 0 වටා ඝූර්ණය)

❖ දැන් පද්ධතියට අමතරව එකතු කෙරෙන P_4 බලය පමණක් සලකමු.



5

P_4 බලයේ O වටා දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $= (\lambda P)\,(\mu a) - (\mu P)(\lambda a)$

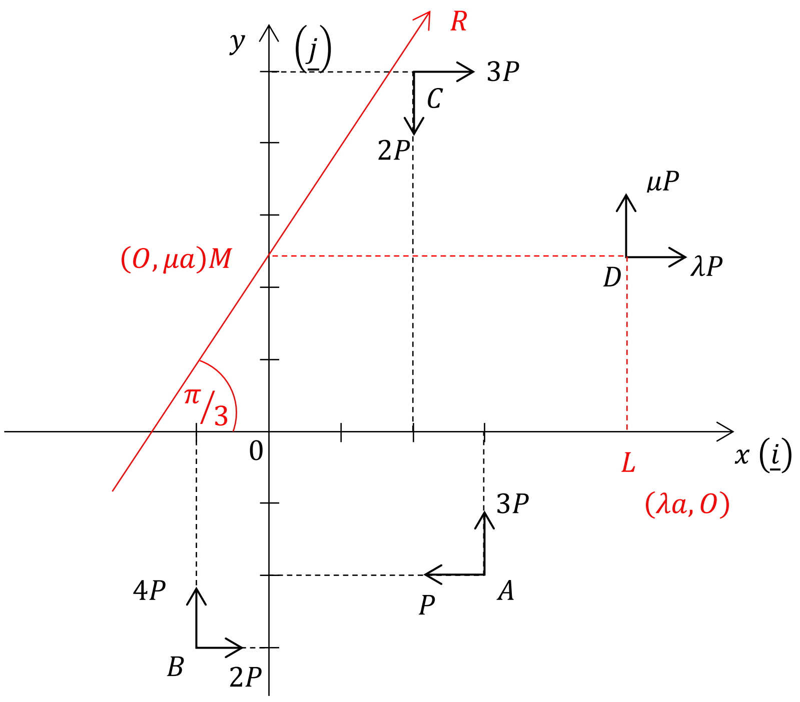
$= \lambda\mu Pa - \lambda\mu Pa$

$= O$ —— 5

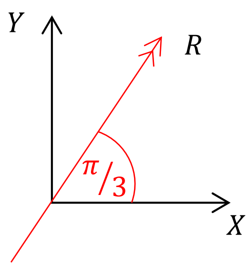
∴ පද්ධතියට P_4 බලය එකතුකලද එමගින් O වටා ඝූර්ණය ශුන්‍ය බැවින්, O වටා පැවති ඝූර්ණයේ කිසිදු වෙනසක් සිදු නොවේ. //

දැන් නව බල පද්ධතිය සලකමු.

$\begin{pmatrix} OL = \lambda & \text{හා} \\ OM = \mu & \text{වේ.} \end{pmatrix}$



මුළු බල පද්ධතියේ,



$\overrightarrow{X} = -P + 2P + 3P + \lambda P$

$= (4 + \lambda)P \ N$ ——— 5

$\uparrow Y = 3P + 4P - 2P + \mu P$

$= (5 + \mu)PN$ ——— 5

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$= \sqrt{(4 + \lambda)^2 P^2 + (5 + \lambda)^2 P^2}$

$= P\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 8\lambda + 10\mu + 41} \ \ N$ // ——— 5

$\tan(\pi/3) = \frac{Y}{X} = \sqrt{3}$ ——— 5

$Y = \sqrt{3}X$

$(5 + \lambda)P = \sqrt{3}(4 + \lambda)P$

$5 + \mu = 4\sqrt{3} + \sqrt{3}\lambda$ — 1 ——— 5

සම්ප්‍රයුක්තය $M(O,\mu)$ හරහා යන බැවින්

$\overset{\frown}{M} = O$ විය යුතුයි.

$$P(2a+\mu a) - 3p(3a) + 4P(a) - 2P(3a+\mu a) + 2P(2a) + 3P(5a-\mu a) - \mu P(\lambda a) = O \quad \text{—— } 10$$

$$(2a+\mu a) - 9a + 4a - 2(3a+\mu a)4a + 3(5a-\mu a) - \lambda\mu a = O$$

$$10 - 4\mu - \lambda\mu = 0 - (2) \quad \text{—— } 5$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = \left(\frac{5+\mu-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(2) \Rightarrow \lambda = \left(\frac{10-4\mu}{\mu}\right)$$

$$\therefore \frac{5+\mu-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10-4\mu}{\mu}$$

$$5\mu + \mu^2 - 4\sqrt{3}\mu = 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\mu$$

$$\mu^2 + 5\mu - 10\sqrt{3} = O \quad \text{—— } 5$$

$$\mu = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-10\sqrt{3})}}{2}$$

$$\mu = \frac{-5 \pm \sqrt{25+40\sqrt{3}}}{2} \quad \text{—— } 5$$

$\mu > O$ බැවින්,

$$\mu = \left(\frac{\sqrt{25+40\sqrt{3}}-5}{2}\right) /\!/ \quad \text{—— } 5$$

$(1) \Rightarrow$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(5+\mu-4\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[5 - 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{25+40\sqrt{3}}-5}{2}\right]$$

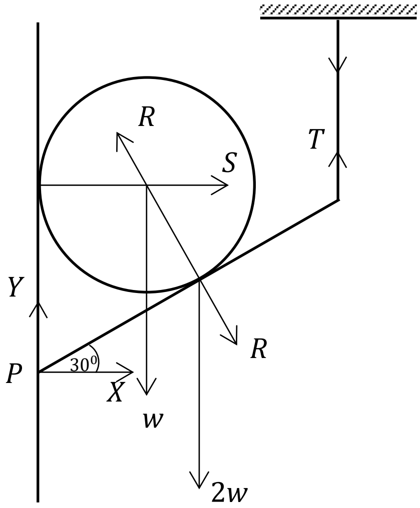
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{10-8\sqrt{3}+\sqrt{25+40\sqrt{3}}-5}{2}\right]$$

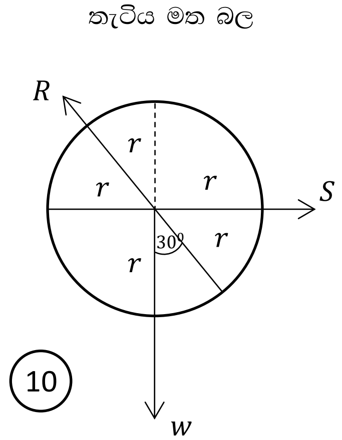
$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(5-8\sqrt{3}+\sqrt{25+40\sqrt{3}}\right) /\!/ \quad \text{—— } 5$$

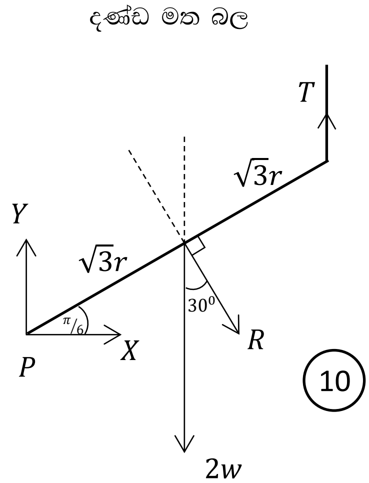
15. (a). දිග $2\sqrt{3}\,r$ හා බර $2w$ වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙලවරක් සිරස් බිත්තියක P ලක්ෂ්‍යයකට සුමටලව අසව්කර ඇත. දණ්ඩේ අනෙක් කෙලවරට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙලවරක් ගැටගසා තන්තුව සිරස්ව පවතින අයුරින් එහි අනෙක් කෙලවර සිවිලිමක අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත්තේ දණ්ඩ බිත්තියට ලම්භක සිරස් තලයක, තිරසට $\pi/6$ ආනතව පවතින අයුරිනි.

දැන් දණ්ඩ හා බිත්තිය අතර සුළු කෝණික හිඩැස තුළ බර w හා අරය r වූ සුමට, තුනී, ඒකාකාර තැටියක් දණ්ඩ හා බිත්තිය ස්පර්ශ වන අයුරින් සිරස් තලයක සමතුලිතව තබයි. දණ්ඩ මත හා තැටිය මත ක්‍රියා කරන සියලු බල නිවැරදිව වෙන වෙන ම රූප සටහන් 2 ක දක්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය හා P ලක්ෂ්‍යයේ දී දණ්ඩ මත බිත්තියෙන් ක්‍රියා කරන සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

පිළිතුර -







තැටියේ සමතුලිතතාව සලකා,

$\uparrow = \downarrow \quad \Rightarrow \quad R\cos(\pi/6) = w$

$$R = 2w/\sqrt{3} \quad // \qquad \text{———} \; 5$$

$\rightarrow = \leftarrow \quad \Rightarrow \quad S = R\cos(\pi/3)$

$$= \frac{2w}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} = w/\sqrt{3} \quad // \qquad \text{———} \; 5$$

දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සලකා,

$$\overset{\curvearrowleft}{P} = \overset{\curvearrowright}{P} \Longrightarrow (T).\left(2\sqrt{3}\,r\cos{}^{\pi}/_{6}\right) = (2w)\left(\sqrt{3}r\cos{}^{\pi}/_{6}\right) + (R)\left(\sqrt{3}r\right) \qquad \text{———— } 10$$

$$T.\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2w\sqrt{3}}{2} = \frac{2w}{\sqrt{3}}$$

$$T = {}^{5w}/_{\sqrt{3}} \;/\!/ \qquad \text{———— } 5$$

$$\rightarrow\; = \;\leftarrow\; \Longrightarrow X + R\cos({}^{\pi}/_{3}) = 0 \qquad \text{———— } 5$$

$$X = \frac{-2w}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}$$

$$= -{}^{w}/_{\sqrt{3}} \;/\!/ \qquad \text{———— } 5$$

X බලයේ, එනම් P ලක්ෂ්‍යයේ දී බිත්තියෙන් දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බලයේ තිරස් සංරචකය බිත්තිය දෙසට වේ.

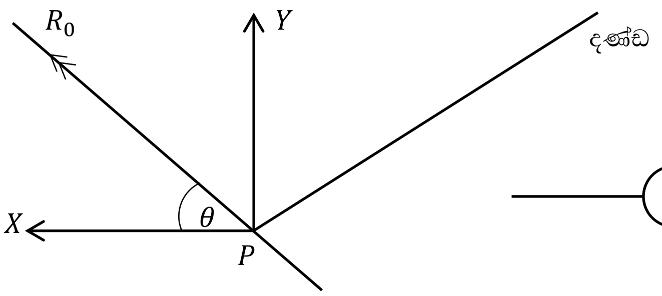
$$\overset{\leftarrow}{X} = {}^{w}/_{\sqrt{3}}$$

$$\uparrow\; = \;\downarrow\; \Longrightarrow Y + T = 2w + R\cos({}^{\pi}/_{6}) \qquad \text{———— } 5$$

$$Y = 2w + \frac{2w}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5w}{3}$$

$$= \frac{4w}{3} \;/\!/ \qquad \text{———— } 5$$

$\therefore P$ ලක්ෂ්‍යයේ දී, බිත්තියෙන් දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල සංරචක පහත රූපයේ පරිදි වේ.



———— 5

∴ P දී දණ්ඩ මත සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව,

$$R_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{\left({}^{w}/_{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(4\,{}^{w}/_{3}\right)^2} \qquad \text{——— } 5$$

$$= w\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{16}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{19}}{3}\,w \quad /\!\!/ \qquad \text{——— } 5$$

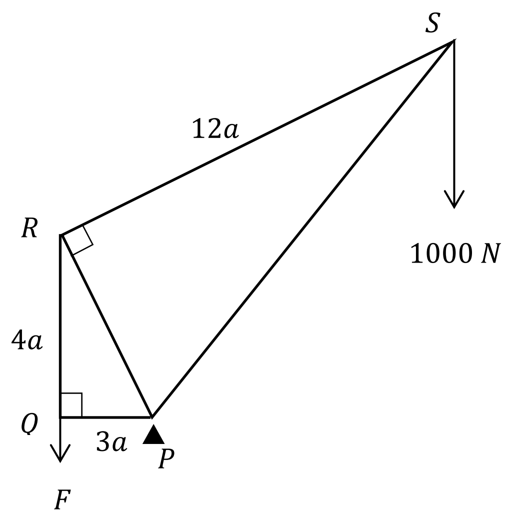
$$\tan\theta = \left({}^{Y}/_{X}\right)$$

$$= \left(\frac{4\,{}^{w}/_{3}}{{}^{w}/_{\sqrt{3}}}\right) = {}^{4}/_{\sqrt{3}}$$

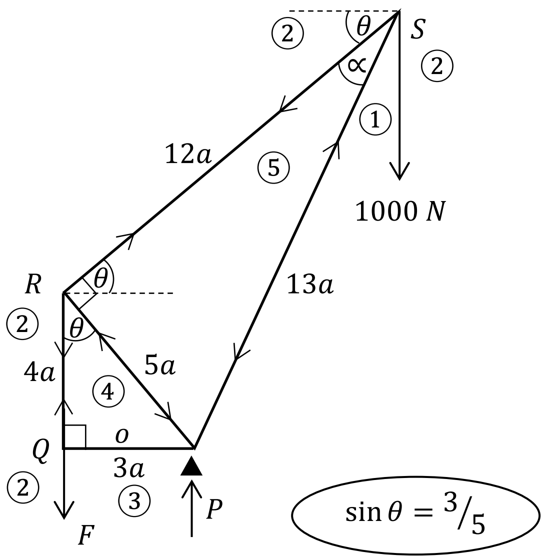
$$\theta = \tan^{-1}\left({}^{4}/_{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{——— } 5$$

P දී බිත්තියෙන් දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන සම්ප්‍රයුක්ත ප්‍රතික්‍රියාව තිරස සමඟ $\theta = \tan^{-1}\left({}^{4}/_{\sqrt{3}}\right)$ කෝණයක් සාදමින් ඉහල දිශාවට ක්‍රියාකරයි.

(b). රූපයෙන් දැක්වෙන රාමු සැකිල්ලේ $PQ = 3a, QR = 4a$ හා $RS = 12a$ වන පරිදි එය සැහැල්ලු දඬු 5කින් සමන්විත වේ. තව ද $P\hat{Q}R = P\hat{R}S = {}^{\pi}/_{2}$ වේ. මෙම රාමු සැකිල්ල P හි දී සුමටව අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇති අතර S දී $1000\,N$ භාරයක් හා Q දී සිරස්ව පහලට ක්‍රියා කරන $F\,N$ බලයක් යෙදා ඇත. F හි විශාලත්වය සොයන්න. **බෝ අංකනය** යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ දඬු 5 හි ක්‍රියාකෙරෙන ආතති හා තෙරපුම් වෙන වෙන් ම සොයන්න.



පිළිතුර -



$\sin\theta = {}^{3}/_{5}$

$\cos\theta = {}^{4}/_{5}$

$\sin\propto = {}^{5}/_{13}$

$\cos\propto = {}^{12}/_{13}$

සැකිල්ලේ සමතුලිතතාව සලකා, P වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\overset{\curvearrowleft}{P} = \overset{\curvearrowright}{P}$$

$$F.3a = 1000(12a\cos\theta - 3a) \quad \text{——— } 10$$

$$3F = 1000\left(12.\frac{4}{5} - 3\right)$$

$$F = \frac{1000}{3}\left(\frac{33}{5}\right)$$

$$F = 2200\ N \ /\!/ \quad \text{——— } 5$$

P හි අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව හැර, පද්ධතිය මත ක්‍රියාකෙරෙන අනෙක් බල 2 වනුයේ,

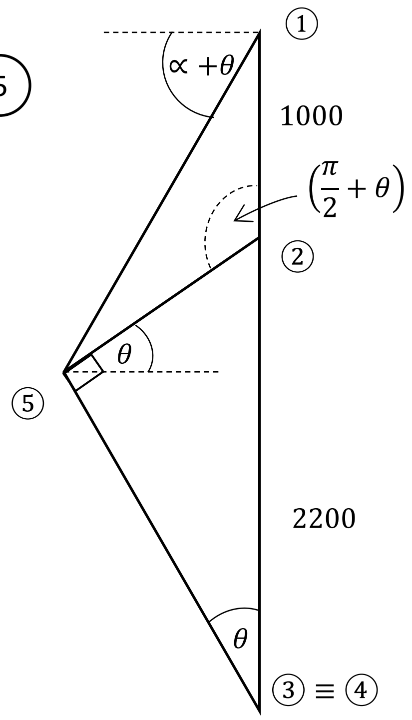
Q දී , F සිරස් බලය හා S දී , $1000\ N$ සිරස් බලය පමණි.

එම බල 2 ම සිරස් බැවින් P හි අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව ද සිරස්ව ම පමණක් පැවතිය යුතුයි.

$\therefore \uparrow = \downarrow$

$$P = F + 1000$$

$$P = 3200\ N \ /\!/ \quad \text{——— } 5$$



$$45 = 42\cos\theta$$
$$= (2200)\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= 1760$$

$$52 = 24\sin\theta$$
$$= (2200)\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= 1320$$

$①⑤ \cos(\propto + \theta) = ②⑤ \cos\theta$

$①⑤ [\cos\propto \cos\theta - \sin\propto \sin\theta] = 1320.\frac{4}{5}$

$①⑤ \left[\frac{12}{13}.\frac{4}{5} - \frac{5}{13}.\frac{3}{5}\right] = 1320.\frac{4}{5}$

$①⑤ \left(\frac{48-15}{13}\right) = 1320(4)$

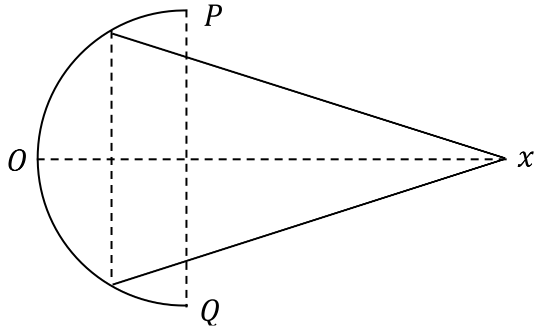
$①⑤ = \frac{(1320)(4)(13)}{33} = \frac{(120)(4)(13)}{3} = 2080$

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යා බලය	
	ආතතිය	තෙරපුම
PQ	5 -------- 5	-------- 5
QR	$2200\ N$	--------
RS	5 $1320\ N$ 5	--------
SP	--------	5 $2080\ N$ 5
PR	--------	5 $1760\ N$ 5

16.(i). අරය a වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධ ගෝලීය කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි තල ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ $\frac{a}{2}$ දුරකින් පිහිටන බවත්,

(ii). උස h වූ ඒකාකාර ඍජු වෘත්තාකාරය කුහර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ $\frac{h}{3}$ දුරකින් පිහිටි බවත්,

අනුකලනයෙන් සාධනය කරන්න.



රූපයේ දැක්වෙන සංයුක්ත වස්තුව තනා ඇත්තේ අරය $2a$ හා පෘෂ්ඨීය ඝණත්වය ρ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධගෝලීය කබොලක් හා පතුලේ අරය $\sqrt{3}a$ හා අඩ-සිරස් කෝණය $\frac{\pi}{6}$ වූ ද, පෘෂ්ඨීය ඝණත්වය σ වූ ද ඒකාකාර ඍජු-වෘත්ත කුහර කේතුවක් පොදු සමමිතික අක්ෂයක් ලැබෙන සේ කුහර අර්ධ ගෝලයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨයට කේතුවේ තල ආධාරකයේ ගැටිය දෘඪ ලෙස ඇලවීමෙනි.

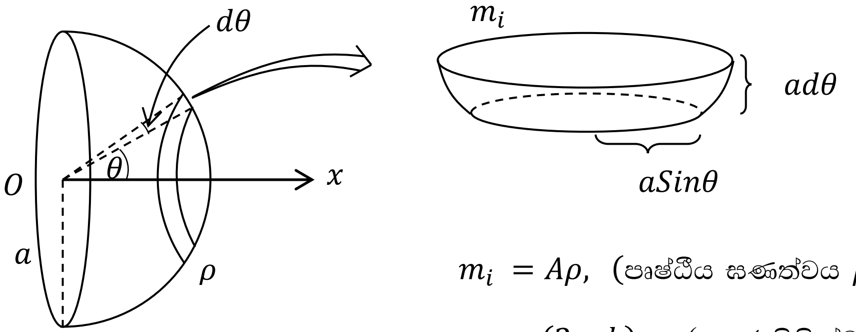
සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වන G ට, 0 සිට OX සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ දුර,

$OG = 2\frac{(2\rho + 3\sigma)}{(4\rho + 3\sigma)}a$ බව පෙන්වන්න.

මෙම සංයුක්ත වස්තුව P ගෙන් නිදහසේ එල්ලා තැබූ විට OX සමමිතික අක්ෂය සිරසට $\tan^{-1}(3)$ කෝණය ක ආනතයකින් සමතුලිතව පවතීනම් $\rho:\sigma = 3:2$ වියයුතු බව සාධනය කරන්න. දැන් කේතුවේ ශීර්ෂයට අමතර ලක්ෂීය ස්කන්ධයක් ඇදීමෙන් වස්තුවේ සමමිතික අක්ෂය තිරස් පිහිටීමකට ගෙන එනු ලැබේ. මෙසේ ඇදිය යුතු අමතර ලක්ෂීය ස්කන්ධය කුහර අර්ධගෝලීය කබොලේ ස්කන්ධයෙන් අඩක් බව පෙන්වන්න.

පිළිතුර

(i).



$m_i = A\rho$, (පෘෂ්ඨීය ඝණත්වය ρ)

$= (2\pi rh)\rho$, (කුහර සිලින්ඩරයක් ලෙස සලකා)

$= 2\pi a\sin\theta . ad\theta\rho$

x_i − සලකන ලද අංශුමාත්‍රීය m_i ස්කන්ධයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට, O සිට OX ඔස්සේ දුර විට,

$x_i = a\, Cos\,\theta$

මුළු කුහර අර්ධගෝලීය කබොලේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට OX ඔස්සේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int m_i x_i}{\int m_i}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} 2\pi a \sin\theta\ a\, d\theta\rho . a\, Cos\,\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi a\sin\theta\ ad\theta\rho} \quad 5 \quad 5$$

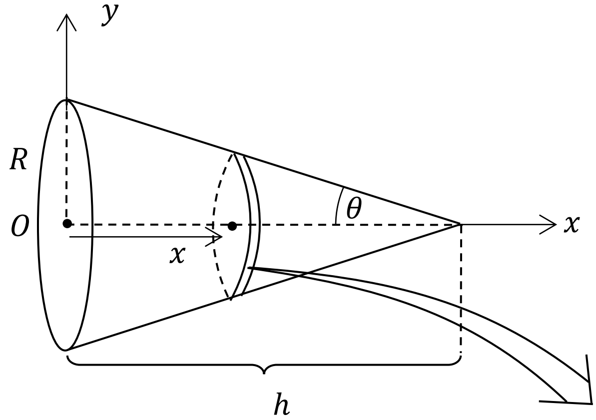
$$= \frac{\frac{a}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\ Cos\,\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} sin\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\ d\theta}{\int_0^{\pi/2} sin\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\left[-\frac{Cos\,2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}}{[-Cos\,\theta]_0^{\pi/2}} = \frac{a}{4}\frac{(Cos\,\pi - Cos\,0)}{(Cos\,^{\pi}/_2 - Cos\,0)} \quad 5 \quad 5 \quad 5$$

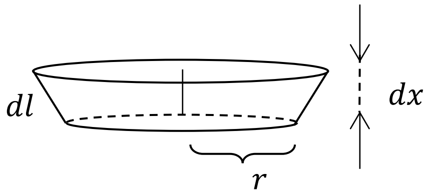
$$= \frac{a}{4}\frac{(-1-1)}{(0-1)} = \frac{a}{4}.2 = \frac{a}{2} \quad // \quad 5$$

30



කේතුව සෑදි ද්‍රව්‍ය වර්ගයේ පෘෂ්ඨීය ඝණත්වය $\rho\, kg\, m^{-2}$ යැයි ගනිමු.

0 සිට OX සමමිතික අක්ෂය ඔස්සේ සාධාරණ x දුරකින් කේන්ද්‍රය පිහිටි අංශුමාත්‍රීය පළලින් යුතු කුහර සිලින්ඩරාකාර කොටස සලකමු.



$$dl\, Cos\, \theta = dx$$

$$\therefore dl = dx.Sec\, \theta$$

අංශුමාත්‍රීය කොටසේ ස්කන්ධය

$$\therefore m_i = 2\pi r dl \rho$$

$$= 2\pi r.dx\, Sec\, \theta \rho$$

මෙම අංශුමාත්‍රීය වළලු කොටසේ අරය වන r යන්න x අනුව වෙනස් වන, එනම් x හි ශ්‍රිතයක් වන බැවින්, එය x විචල්‍යය ඇසුරින් පහත පරිදි ලබාගත යුතුයි.

$$\tan\theta = \frac{r}{h-x} \quad \text{හෝ} \quad \tan\theta = \frac{R}{h}$$

$$\therefore \frac{r}{h-x} = \frac{R}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-x)$$ 5

දැන්, මුළු කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට සමමිතික අක්ෂය වන OX ඔස්සේ දුර $\bar{x}$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int m_i x_i}{\int m_i}$$, (x_i − අංශුමාත්‍රීය කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ox ඔස්සේ දුර)

$$= \frac{\int_0^h 2\pi r\, dx\, Sec\theta \rho . x}{\int_0^h 2\pi r\, dx\, Sec\theta \rho}$$ 5 5 (π, ρ, θ − නියත වේ.)

$$= \frac{\int_0^h \frac{R}{h}(h-x)\, x\, dx}{\int_0^h \frac{R}{h}(h-x)\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^h (h-x)\, x\, dx}{\int_0^h (h-x)\, dx}$$

$$= \frac{\int_0^h (hx-x^2)\, dx}{\int_0^h (h-x)\, dx}$$

$$= \frac{\left[h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_o^h}{\left[hx - \frac{x^2}{2}\right]_o^h}$$ 5 5

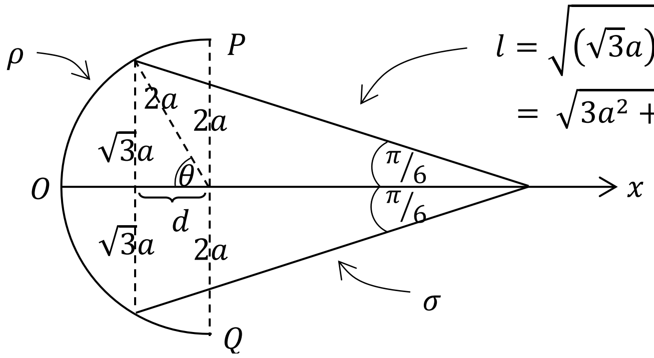
$$= \frac{\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right)}{\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right)} = \frac{3h^3 - 2h^3}{6h^2 - 3h^2} = \frac{h^3}{3h^2}$$ 5

$\therefore\ \bar{x} = \frac{1}{3}h$ //

30

මුළු කේතුව OX අක්ෂය වටා සමමිතික බැවින්, මුලු කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අංක්ෂය වන OX මත පිහිටිය යුතුයි.

∴ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ $\bar{y} = 0$ වේ.



$$l = \sqrt{\left(\sqrt{3}a\right)^2 + (3a)^2}$$
$$= \sqrt{3a^2 + 9a^2} = \sqrt{12a^2}$$
$$= 2\sqrt{3}a$$ 5

කුහර කේතු කොටසේ ලම්භ උස h නම් (රූපයෙන්)

$$\tan\left({}^{\pi}/_{6}\right) = \frac{\sqrt{3}a}{h}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{h}$$

$h = 3a$ 5

$$Sin\ \theta = \frac{\sqrt{3}a}{2a}$$

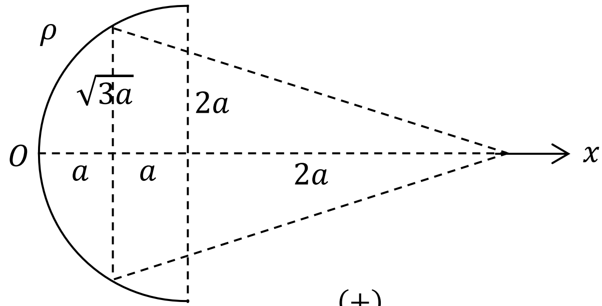
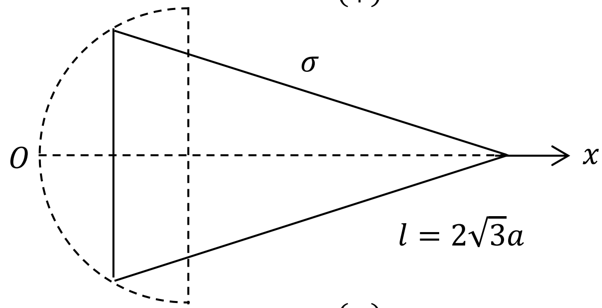
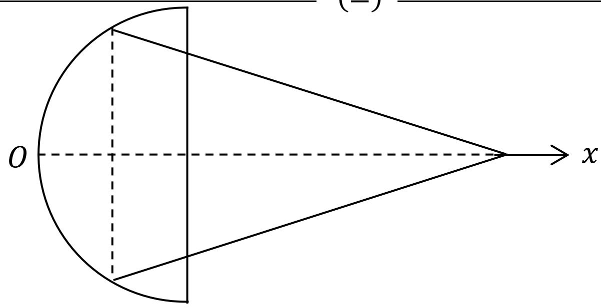
$$Sin\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ \theta = {}^{\pi}/_{3}$ 5

$\therefore d = 2a\ Cos\left({}^{\pi}/_{3}\right)$

$= a$

සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය සෙවීම.

	$m_1 = A\rho$ $= \frac{1}{2}4\pi(2a)^2\rho$ $= 8\pi a^2\rho$ 5	$x_1 = \frac{2a}{2}$ $= a$ 5
(+) 	$m_2 = A\sigma = \pi r l \sigma$ $= \pi(\sqrt{3}a)(2\sqrt{3}a)\sigma$ $= 6\pi a^2\sigma$ 5	$x_2 = a + \frac{1}{3}(3a)$ $= 2a$
(=) 	$M = (m_1 + m_2)$ $= 8\pi a^2\rho + 6\pi a^2\sigma$ $= 2\pi a^2(4\rho + 3\sigma)$	$\bar{x}$

$O \curvearrowleft \Rightarrow m_1 g . x_1 + m_2 g . x_2 = Mg . \bar{x}$ 5

$8\pi a^2\rho . a + 6\pi a^2\sigma . 2a = 2\pi a^2(4\rho + 3\sigma)\bar{x}$

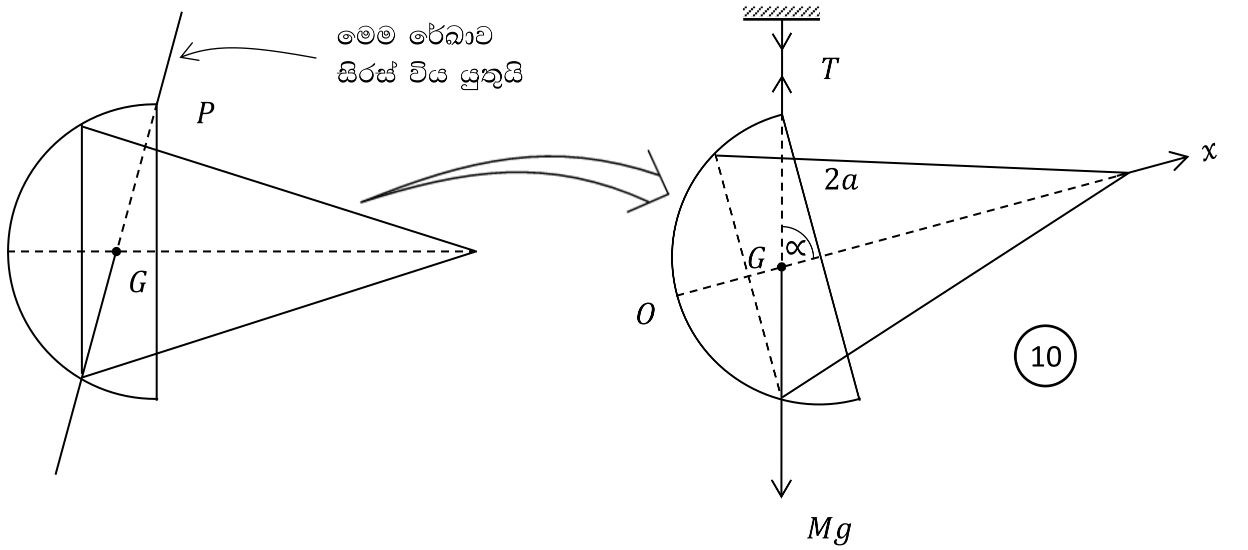
$4\rho . a + 3\sigma . 2a = (4\rho + 3\sigma)\bar{x}$ 5

$\therefore\ \bar{x} = \dfrac{2(2\rho + 3\sigma)}{(4\rho + 3\sigma)}$

40

මෙම සංයුක්ත වස්තුව

P ගෙන් නිදහසේ එල්ලා තැබූ විට. P ලක්ෂ්‍යය හා සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වන G සිරස්ව, ඒක රේඛීයව පිහිටිය යුතුයි.



$$\propto = \tan^{1}(3)$$

$$\tan \propto = 3$$

$$\frac{2a}{2a - OG} = 3$$

$$2a = 6a - 3(OG)$$

$$3(OG) = 4a \quad \text{———} \; 5$$

$$\frac{3.2(2\rho + 3\sigma)a}{(4\rho + 3\sigma)} = 4a$$

$$3\,(2\rho + 3\sigma) = 2(4\rho + 3\sigma)$$

$$6\rho + 9\sigma = 8\rho + 6\sigma$$

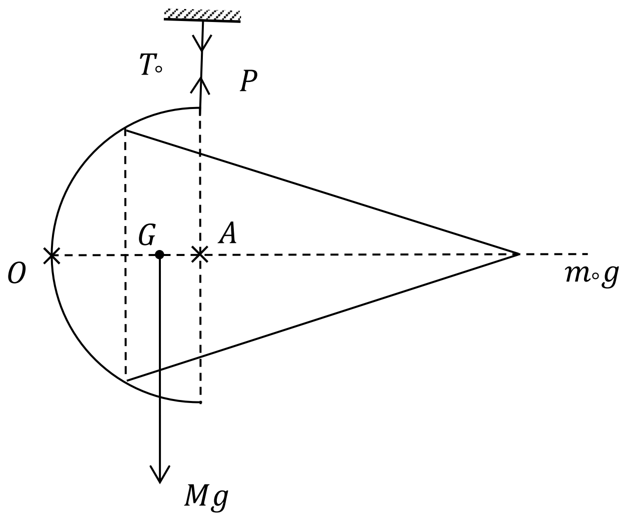
$$3\sigma = 2\rho$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\rho}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \; \rho : \sigma = 3:2 \,/\!/ \quad \text{———} \; 10$$

දැන් කේතුවේ ශීර්ෂයට අමතර ලක්ෂීය ස්කන්ධයක් ඈඳා සමමිතික අක්ෂය තිරස් පිහිටීමකට ගෙන ඒම සලකමු. මේ සඳහා අවශ්‍ය ස්කන්ධය $m_{\circ}$ යැයි ගනිමු.

25



සංයුක්ත වස්තුවේ සමතුලිතතාව සලකා,

$$\overset{\curvearrowleft}{A} = \overset{\curvearrowright}{A}$$

$$Mg.(2a - OG) = m_\circ g.2a$$

$$2\pi a^2(4\rho + 3\sigma)\left[2a - \frac{2(2\rho + 3\sigma)a}{4\rho + 3\sigma}\right] = m_\circ.2a \qquad \text{—— } 10$$

$$\left(\frac{\rho}{\sigma} = \frac{3}{2} \text{ බැවින් } \Rightarrow \sigma = \frac{2\rho}{3} \text{ යෙදීමෙන්,}\right)$$

$$2\pi a^2\left(4\rho + 3.\frac{2\rho}{3}\right)\left[1 - \frac{\left(2\rho + 3.\frac{2\rho}{3}\right)}{4\rho + 3.\frac{2\rho}{3}}\right] = m_\circ \qquad \text{—— } 10$$

$$2\pi a^2\, 6\rho\left[1 - \frac{4\rho}{6\rho}\right] = m_\circ$$

$$2\pi a^2\, 6\rho\left(\frac{2}{6}\right) = m_\circ$$

$$m_\circ = 4\pi a^2\rho$$

කුහර අර්ධගෝලීය කබොලේ ස්කන්ධය $= M_1 = 8\pi a^2\rho$ —— 5

$$\therefore\ m_\circ = \frac{1}{2}M_1 \text{ // වේ.}$$

25

17. (a). ස්ත්‍රී-පුරුෂ දෙපක්ෂයම නියෝජනය වන එක්තරා සංගහණයක 40% ක් පිරිමි වන අතර එම පිරිමින්ගෙන් p% ප්‍රමාණයක් රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු අය වෙති. තව ද මෙම පිරිසේ සිටින කාන්තාවක, රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව q වේ.

මෙම සංගහණයෙන් අහඹු ලෙස තෝරාගන්නා අයෙකු, රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු පිරිමියෙකු වීමේ සම්භාවිතාව 0.08 ක් වන අතර රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු කාන්තාවක වීමේ සම්භාවිතාව 0.18 ක් වේ. මෙම තොරතුරු රුක් සටහනකින් නිරූපණය කර p හා q හි අගයයන් ලබාගන්න.

මෙම පිරිසෙන් අහඹු ලෙස තෝරාගන්නා අයෙකු,

(i). රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු නොවූවකු වීමේ,

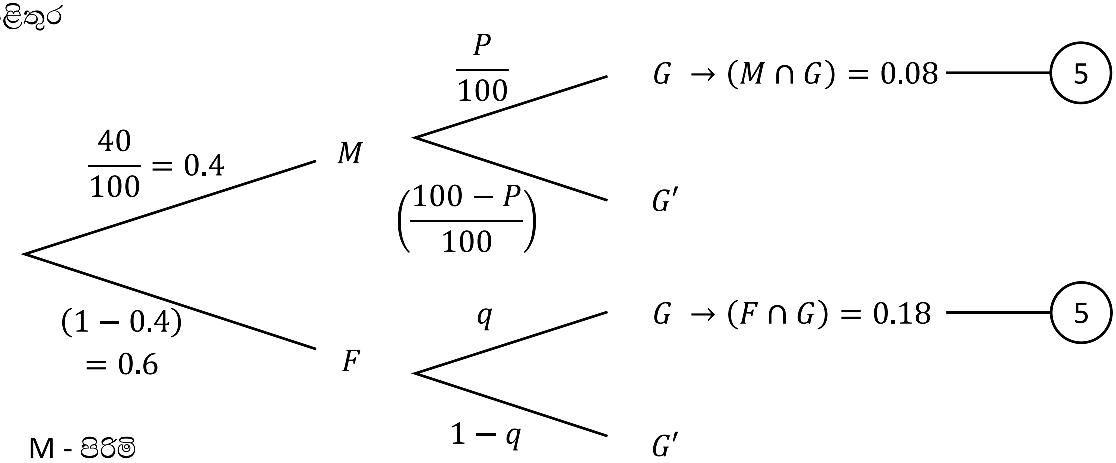
(ii). පිරිමියෙකු හෝ රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු කාන්තාවක හෝ වීමේ,

(iii). රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු පිරිමියෙකු නොවීමේ,

(iv). රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු නොවූවෙකු නම්, කාන්තාවක වීමේ,

සම්භාවිතාවන් ගණනය කරන්න.

17 - a පිළිතුර



M - පිරිමි

F - ගැහැණු

G - රාජ්‍ය සේවයේ නියුතු

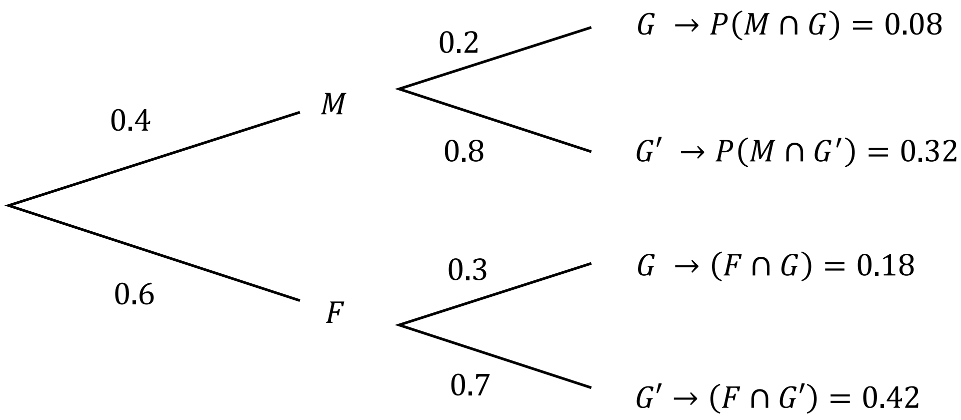
$$P(M \cap G) = 0.08$$
$$0.4 \times \frac{P}{100} = 0.08$$
$$P = \frac{8}{0.4}$$
$$= 20 \ /\!/$$

5

$$P(F \cap G) = 0.18$$
$$0.6 \times q = 0.18$$
$$q = \frac{18}{60}$$
$$= 0.3 \ /\!/$$

5

20



(i). $P(G') = P(M \cap G') + P(F \cap G')$ —— 5

$= 0.32 + 0.42$

$= 0.74$ // —— 5

(ii). $P\big(M \cup (F \cap G)\big) = P(M) + P(F \cap G)$ —— 5

$= 0.4 + 0.18$

$= 0.58$ // —— 5

(iii). $P(G \cap M)' = 1 - P(G \cap M)$ —— 5

$= 1 - 0.08$

$= 0.92$ // —— 5

(iv). $P(F|G') = \dfrac{P(F \cap G')}{P(G')}$ —— 5

$= \dfrac{0.42}{0.74}$

$= \dfrac{42}{74} = \dfrac{21}{37}$ // —— 5

40

(b).

	පන්ති ප්‍රාන්තරය	මධ්‍ය අගය x_i	සංඛ්‍යාතය	
1		10	12	
2		25	f_1	
3		40	f_2	
4		55	33	
5		70	13	
6		85	14	

මුළු දත්ත ප්‍රමාණය 120 ක් වූ තරම සමාන පන්ති ප්‍රාන්තර 6 කින් යුතු සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක එක් එක් පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය අගය (පන්ති ලකුණ) සහ අනුරූප සංඛ්‍යාතයන් ඉහත වගුවේ සපයා ඇත. මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මාතය 52.5 ක් වේ. ව්‍යාප්තියේ පන්ති ප්‍රාන්තර සියල්ල නිබිලමය ලෙස ලියා දක්වා f_1 හා f_2 අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය කොපමණ ද?

සුපුරුදු අංකනයෙන් $u_i = \left(\frac{x_i - \bar{x}}{c}\right)$ කේතනය යොදාගනිමින් ව්‍යාප්තියේ **මධ්‍යන්‍යය, විචලතාව** හා **කුටිකතා සංගුණකය** ගණනය කරන්න.

පිළිතුරු -

ව්‍යාප්තියේ මාතය 52.5 ක් බැවින් එය සිව්වන පන්ති ප්‍රාන්තරයට අයත් වේ. එබැවින්,

මාතය $M_\circ = L + \dfrac{C\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$

$$52.5 = 47.5 + \frac{15(33 - f_2)}{(33 - f_2) + 20} \quad\text{—— 10}$$

$$\frac{15(33 - f_2)}{53 - f_2} = 5$$

$$99 - 3f_2 = 53 - f_2$$

$$99 - 53 = 2f_2$$

$$f_2 = 23 \ // \quad\text{—— 5}$$

මුළු දත්ත ප්‍රමාණය 120 ක් බැවින්

$$\sum f_i = 120$$

$$12 + f_1 + f_2 + 33 + 13 + 14 = 120 \quad\text{—— 5}$$

$f_2 = 23$ ආදේශයෙන්, $f_1 = 25$ // ලැබේ. 5

ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය,

$$M_d = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - Cuf_L\right)C}{f_{md}}$$

$$= 32.5 + \frac{(60-37)\,15}{23} \quad \text{——— } 10$$

$$= 32.5 + 15 = 47.5 \;/\!/ \quad \text{——— } 5$$

40

වෙනත් ක්‍රමයකින් මධ්‍යස්ථය 60 වන බව පහත අයුරින් ද ලබා ගත හැක.

මෙම ව්‍යාප්තියේ සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය සැලකීමේ දී 33 - 47 පන්තියේ දී එය 60 ක් ලෙස ලැබේ. මුළු දත්ත ප්‍රමාණය 120 ක් වන බැවින් මධ්‍යස්ථය වනුයේ 60 වන දත්තයයි.

එබැවින් 33-47 පන්තියේ උඩත් සීමාවේ දී මධ්‍යස්ථය පිහිටයි. ∴ මධ්‍යස්ථය වනුයේ 47.5 වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (5)	මධ්‍ය අගය x_i	f_i	Cuf	U_i	U_i^2	f_iU_i	$f_iU_i^2$
3 — 17	10	12	12	-3	9	-36	108
18 — 32	25	25	39	-2	4	-50	100
33 — 47	40	23	60	-1	1	-23	23
48 — 62	55	33	93	0	0	0	0
63 — 77	70	13	106	1	1	13	13
78 — 92	85	14	120	2	4	28	56
		120	(5)			$\sum f_iu_i = -68$ (5)	$\sum f_iu_1^2 = 300$ (5)

$$\bar{x} = \mu = A + \frac{C\sum f_iu_i}{\sum f_i}$$

$$= 55 + \frac{15(-68)}{120} \quad \text{——— } 5$$

$$= 55 - \frac{68}{8}$$

$$= 55 - 8.5$$

$$= 46.5 \quad \text{——— } 5$$

$$S^2 = \sigma^2 = C^2\left[\frac{\sum f_i U_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i U_i}{\sum f_i}\right)^2\right]$$

$$= 15^2\left[\frac{300}{120} - \left(\frac{-68}{120}\right)^2\right] \qquad 5$$

$$= \frac{15^2}{120^2}\,[300 \times 120 - 68^2]$$

$$= \left(\frac{15}{120}\right)^2 [36000 - 4624]$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^2 (31376)$$

$$= 490.25 \qquad 5$$

∴ සම්මත අපගමනය, $S = \sigma = +\sqrt{490.25}$

$$= 22.14 \qquad 5$$

කුටිකතාව

$$SK = \left(\frac{\text{මධ්‍යස්ථය - මාතය}}{\text{සම්මත අපගමනය}}\right)$$

$$= \left(\frac{46.5 - 52.5}{22.14}\right) \qquad 5$$

$$= -0.27. < 0$$

∴ මෙම ව්‍යාප්තිය ඍණ කුටික වේ.

50